Liceo Scientifico G.Ulivi – Parma

Il sistema di numerazione: aspetti socio-epistemologici alla base delle scelte e dei cambiamenti

Bertolini Maria Chiara, Borchini Luca, Buzzoni Giacomo, Caminati Francesco, Ciarmela Davide, Cristiani Andrea, Distefano Michele, Giannini Francesca, Magni Pietro, Pastore Alessandro, Piroli Lorenzo, Ravazzoni Giulia, Segadelli Simone, Tonelli Riccardo, Valentini Giacomo.
Coordinatore: Prof. Maffini Achille

Indice

In copertina: la statua di Fibonacci a Pisa

0. Introduzione.

Il concorso promosso dalla Mathesis in collaborazione con l'Istituto Italiano Storico per il Medioevo è stato vissuto innanzi tutto come un'occasione di analisi e riflessione di carattere socio-epistemologico alla base dei concetti matematici.
In particolare, l'introduzione in occidente dei sistemi di numerazione costituisce, a nostro avviso, un chiaro esempio di come non solo la matematica sia un frutto della storia e della cultura dell'uomo, ma anche come possa influire nella costruzione di tale cultura. Di riflesso, quindi, si tratterà di analizzare quali saranno le implicazioni rispetto a determinate posizioni come l'idea di oggetto matematico, problema comparso di fatto recentemente nella riflessione sulla matematica, ma che trova le sue radici nella storia stessa di questa disciplina.
La scelta che si è fatta, quindi, è stata quella di ricercare e tentare di analizzare le basi culturali alla base di questioni apparentemente "tecniche" come un sistema di numerazione.
Per quanto riguarda il percorso occidentale, tutto ruota naturalmente attorno alla comparsa dello zero, come cifra, ma soprattutto come concetto, numero e, conseguentemente, oggetto matematico.
La scelta fatta offre l'occasione per riflessioni di più ampia portata e apre la strada a ricerche ed analisi che vanno oltre l'ambito prettamente matematico: da cosa nasce un concetto, perché alcune civiltà sviluppano determinati concetti, come una civiltà può acquisire da altre determinati concetti, su quali basi è possibile un confronto; infine, quale relazione c'è tra la comparsa e l'uso di un concetto e la sua accettazione. La matematica, nel suo essere asetticamente neutra, diventa quindi un mezzo per riflettere sul rapporto e sul confronto fra culture diverse.
Questa prospettiva apre più ampi orizzonti al lavoro che qui viene proposto e che, necessariamente, tratterà solo marginalmente questi aspetti; ma ci offre lo stimolo per continuare nella sua trattazione.
Il lavoro che qui verrà presentato è proposto con una struttura che vuole essere dinamica.
Si parte dalla traduzione delle prime pagine del Liber Abbaci[1] (d'ora in poi lo indicheremo con [LA]) di Leonardo Pisano, più noto come Fibonacci. Con l'opera di Fibonacci compare formalmente in occidente il sistema di numerazione posizionale con una trattazione non solo pratica, ma anche concettuale.
Il testo di Fibonacci è noto (qui si propone in una traduzione curata dai ragazzi che costituiscono il gruppo di lavoro), ma ciò che ci è interessato fare è mettere in evidenza e commentare nel testo gli aspetti che permettono di aprire delle finestre sulle questioni per noi rilevanti e precedentemente evidenziate. Il testo proposto costituirà quindi una sorta di guida su cui si inseriranno commenti e ipotesi di approfondimento. La traduzione verrà conseguentemente inframmezzata da commenti (in corsivo) per evidenziare immediatamente l'aspetto per noi rilevante prima di rimandare al paragrafo del terzo e quarto capitolo in cui questi aspetti verranno ulteriormente sviluppati (il paragrafo verrà indicata tra parentesi quadre). Ciò che si vuole mostrare con questa struttura è come in un testo di questo tipo si possano leggere molti degli aspetti culturali ed epistemologici che sono alla base di un argomento matematico.
Nel secondo capitolo, verranno proposti e commentati alcuni problemi tratti da un trattato d'abaco presente nella biblioteca Palatina di Parma. Si è optato per questa scelta, anziché proporre direttamente problemi simili presenti sul Liber Abbaci per tre motivi principali:

1) la scarsa notorietà degli stessi rispetto ai più famosi problemi di Fibonacci;
2) il loro collocarsi in un periodo storico diverso e, malgrado ciò, presentare ancora problematiche simili;
3) il legame del manoscritto con la realtà parmense e quindi per la possibilità che offre di presentare qualcosa più legato al contesto del gruppo di lavoro.

La struttura dinamica del lavoro vorrebbe permetterne una lettura secondo percorsi personalizzati.
Questa scelta comporta, come inconveniente, che alcuni concetti siano ripresi in più paragrafi.

[1] Abbiamo scelta di lasciare questa dizione, anziché quella di Liber Abaci frequentemente utilizzata, poiché è quella con cui è titolata l'edizione da noi utilizzata.

1. Il Liber Abbaci.

1.1. Il contesto storico-culturale

L'estrema ricchezza per il mondo occidentale rappresentata dal patrimonio lasciato dalla matematica greca, cessò di dare i suoi frutti in occidente a partire dal V secolo d.C. fino a circa il XV secolo in tutto l'occidente.
Il testimone dello studio e della diffusione della matematica greca passò alla cultura araba e indiana. La barriera linguistica ha costituito almeno fino XII secolo d.C. un grosso ostacolo per i dotti europei sulla via della conoscenza che queste realtà culturali producevano. Solo a partire da tale secolo tale barriera linguistica cominciò ad essere superata e favorire così una diffusione di conoscenze ed un confronto specifico da cui erano preclusi. All'inizio del XII secolo nessun europeo avrebbe potuto pretendere d'essere un matematico o un astronomo vero senza una buona conoscenza,non deve quindi stupire il fatto che i principali matematici fossero mori, ebrei o greci.
Con la diffusione successivamente di testi dall'arabo nelle varie lingue europee nel XIII secolo si ebbe un'espansione del bacino d'utenza della matematica; la prima opera tradotta fu Elementi d'Euclide, ma la traduzione di Adelardo da Bath, cui seguirono quelle delle tavole astronomiche dell'arabo Al-khuwarizmi (1126) e dell'Almagesto di Tolomeo, non suscitò,almeno in un primo momento, molto fascino tra i dotti europei. Maggior successo ottennero i traduttori operanti in Spagna,in particolare a Toledo,dov'erano conservati un gran numero di manoscritti e dove la lingua madre era l'arabo,il che facilitava il flusso interlinguistico d'informazioni.
Tra i traduttori più importanti ricordiamo Gerardo da Cremona il quale, recatosi in Spagna al fine di studiare Tolomeo, finì con il dedicare la sua vita alla traduzione dall'arabo.
Durante il periodo di traduzioni del XII secolo le cifre indiane erano state spiegate ai lettori latini da Adelardo da Bath e da Giovanni di Siviglia,mentre tra gli ebrei veniva introdotto un sistema di numerazione analogo ad opera di Abraham ibn Erza.Come nella cultura bizantina le prime 9 lettere dell'alfabeto greco, con l'aggiunta d'un segno speciale per lo zero, avevano sostituito le cifre indiane. Così ibn Erza usò le prime 9 cifre alfabetiche ebraiche e un circoletto per lo zero nel sistema decimale posizionale per i numeri interi. Nonostante le numerose descrizioni del sistema numerico arabo, l'abbandono del vecchio sistema numerico romano avvenne molto lentamente anche per via della larga diffusione dell'uso dell'abaco che si perpetrò fino al diciassettesimo secolo.
Come spesso accade nella storia del pensiero, anche per lo sviluppo della matematica occidentale nel medioevo l'elemento catalizzatore fu esterno alla matematica: lo sviluppo dei commerci.
Lo sviluppo dei commerci nel XIII secolo pose sulla scena culturale due tipi di matematici: quelli attivi nelle scuole ecclesiastiche o nelle università e quelli impiegati nel commercio e negli scambi. Parallelamente cambiarono i bisogni legati alla matematica: accanto alla dimensione filosofico-speculativa si fece sempre più strada la dimensione pragmatica, iniziando così la dicotomia tuttora presente (e che vedremo anche in altre parti di questo lavoro) tra matematica speculativa e matematica come strumento.
In questo contesto culturale si inserisce la figura e l'opera di Leonardo Pisano(1880 circa-1250), più noto come Fibonacci.
Il padre di Leonardo, Bonaccio, era impiegato della repubblica di Pisa presso la dogana di Bugia (oggi Bejaia) in Algeria. Di là chiamò il figlio, perché potesse,viaggiando, studiare i procedimenti aritmetici che gli arabi usavano, e che si rivelavano assai utili nel commercio. Le intenzioni del padre di Leonardo erano dunque sostanzialmente limitate a quella che abbiamo definito come dimensione "pratica", ma il giovane si interessò a tutta la parte teorica, tipica degli Elementi di Euclide. Leonardo quindi si poneva a metà strada e questo lo fece essere una figura che occupava, per formazione e per intelligenza, una posizione privilegiata: aveva curiosità e motivazioni di sapere e la possibilità di viaggiare, visto anche il ruolo svolta da Pisa in quel tempo. I suoi viaggi lo portarono fino a Costantinopoli, alternando il commercio con gli studi matematici, riuscendo ad

assimilare pienamente tutto l'insieme della matematica classica, sia attraverso le fonti arabe, sia anche a diretto contatto con le fonti antiche.
Verso il 1200 rientrò a Pisa, dove negli anni successivi pubblicò nel 1202 e nel 1228 la sua opera di quindici capitoli, il Liber Abbaci, tramite la quale introdusse per la prima volta in Europa le nove cifre (da lui chiamate indiane), assieme al segno 0; accanto alla presentazione delle cifre propose criteri di divisibilità, regole di calcolo di radicali quadratici e cubici ed altro. In sostanza un testo anche di matematica.
Le conoscenze che espone gli derivavano principalmente dallo studio da lui intrapreso sotto il controllo d'un maestro musulmano e dai numerosi viaggi in Egitto, Siria e Grecia, a testimonianza di come la figura di Fibonacci costituisca una sintesi ed una cerniera con altre culture.

1.2. Il testo.

Il Liber Abbaci uscì nel 1202 e seppure nasca come testo "utile" non mancano, come detto, questioni importanti sul piano prettamente culturale. In particolare è importante l'idea che se ne desume (per certi aspetti molto moderna) che si stiano dando le connotazioni per la costruzione di un linguaggio. Di seguito verranno proposte le prime pagine del testo di Fibonacci (fino alle presentazione delle tecniche di moltiplicazione). La traduzione sarà in Arial, mentre i commenti in corsivo; sono state inoltre evidenziate frasi o parole su cui ci si è maggiormente soffermati col commento.

Mi scrisse, o signor mio, sommo filosofo, il maestro Michele Scotto, affinché trascrivessi a voi un libro sul numero, che or ora composi:onde assecondando la vostra richiesta scrutando in modo più sottile quello stesso lo corressi con l'indagine per il vostro onore e per l'utilità di molti altri. Nella correzione di questo aggiunsi alcune cose necessarie e tolsi alcune cose superflue. In questo libro elaborai una completa dottrina dei numeri vicino al modo degli Iudi, scelsi nella stessa scienza la cosa assai più notevole. E l'aritmetica e la geometria sono scienze connesse, e supplementari a vicenda, non si può esporre una dottrina completa del numero se non si inseriscono alcune cose geometriche o riguardanti la geometria che qui operano soltanto alla maniera dei numeri e questa maniera è desunta da molte prove e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche. Ma in altro libro che ho composto sulla pratica della geometria ho spiegato diffusamente le cose pertinenti alla geometria e molte altre,dimostrando le singole cose e facendovi seguire delle prove geometriche.

La principale preoccupazione di Fibonacci sembra quella di sottolineare come, seppure in questo testo si parli di numeri, non intende allontanarsi dalla tradizione greca in cui "numeri" e geometria procedevano insieme (o meglio, secondo la tradizione euclidee, i problemi algebrici venivano trattati e risolti con strumenti geometrici). Dal punto di vista matematico potrebbe essere una preoccupazione superflua, ma se ne coglie la vera portata se la si considera rispetto alla tradizione in cui Fibonacci si muove. Come più avanti emergerà, prima di proporre degli strumenti di calcolo, il problema principale è relativo all'introduzione di un linguaggio e di un concetto chiave per la trattazione, quello dello zero, ma lontano proprio dalla tradizione a cui si riferisce. Sembra quindi che Fibonacci voglia tranquillizzare che non esce dall'ortodossia. Ma perché questo bisogno? [3.2.]

Ma questo libro riguarda sia la teoria che la pratica perciò coloro che mediante esso vorranno conoscere bene la pratica di questa scienza,bisogna che continuamente con lunga pratica ed esercizio persistano nelle pratiche:perché quando una scienza mediante la pratica si è trasformata in abito (mentale) la memoria e l'intelletto concordano a tal punto con le mani e le figure che quasi per un unico impulso ed anelito nel medesimo istante vanno d'accordo naturalmente per tutte le cose circa il medesimo oggetto e allora quando il discepolo avrà raggiunto l'abito gradualmente potrà pervenire facilmente alla perfezione

di questo. E perché la dottrina risultasse più facile ho diviso questo libro in quindici capitoli perché il lettore possa più facilmente trovare tutto ciò che vuole a questo proposito. Inoltre se in quest'opera si trova qualcosa di insufficiente o difettoso lo sottopongo alla vostra correzione.
Essendo stato mio padre costituito dalla patria come pubblico scrivano…per i mercanti pisani che là confluivano, facendomi andare da lui nella mia fanciullezza considerata l'utilità e il vantaggio futuro volle che io mi trattenessi lì per qualche giorno e fossi istruito nello studio dell'abaco. Dove per un mirabile magistero introdotto nell'arte mediante le nove figure degli indiani tanto mi piacque la conoscenza dell'arte più delle altre cose e mi rivolsi ad essa poiché qualsiasi cosa fosse studiata di essa presso l'Egitto, la Siria, la Sicilia e la provincia con i suoi vari modi nei vari luoghi del commercio poi ho viaggiato con molto studio e ho imparato la controversia della disputa.

Il [LA] si inserisce come ponte culturale tra l'occidente e la tradizione orientale. Non si tratta solo quindi di un libro "di numeri", ma di un confronto e uno scambio con altre culture. Sottolinea il legame con la tradizione greca, è come se si mettesse anche in evidenza che il mondo occidentale può attingere anche da altri contesti. Questo riferimento si ricollega sicuramente all'esperienza umana di Fibonacci, ma è anche indicatore di una selettività su cosa "mostrare" di queste realtà. [4.2. – 4.4. - Spagna]

Ma tutto questo e l'algoritmo e gli archi di Pitagora li ho considerati quasi un errore riguardo alla maniera degli indiani. Perciò adottando più strettamente il modo degli indiani e considerandolo più attentamente e aggiungendo alcune cose dal proprio senso e alcune cose tratte dalle sottigliezze dell'arte geometrica ho cercato di comporre nel modo più chiaro possibile questo lavoro in quindici libri dimostrando quasi tutte le cose che ho inserito con una prova certa perché coloro che all'esterno aspirano a questa scienza nel modo più perfetto vengano istruiti e la gente latina in futuro come sinora non si trovi sprovvista di essa.

In questa parte c'è la dichiarazione delle fonti, ma anche l'orgoglio di avere apportato aspetti migliorativi sul piano tecnico e la convinzione di aver fornite un potente strumento all'occidente. Nella formulazione della sua dichiarazione sembra che oltrepassi gli aspetti culturali che hanno favorito o impedito (a seconda dei contesti) il tipo di numerazione. Fibonacci si sposta sul piano più propriamente matematico e su questo piano vuole che la sua opera venga letta e giudicata. L'enfasi che dà al termine "dimostrando" e "modo più perfetto" sembra essere legato a questo presupposto di credibilità, tanto più che, come vedremo, nella trattazione non si può parlare di dimostrazioni in senso tecnico, così come le intendiamo noi, ma neppure come le intendeva la tradizione geometrica greca. [4.3.]

Riguardo la conoscenza delle 9 figure indiane e di come si scrivono con esse ogni numero, e quali numeri, e in che modo si debbano tenere tra le mani, e riguardo l'introduzione all'abaco.
Riguardo la moltiplicazione dei numeri interi.
Riguardo l'addizione degli stessi.
Riguardo la sottrazione dei numeri minori dai maggiori.
Riguardo la moltiplicazione dei numeri interi con numeri decimali e di decimali senza buon ordine.
Riguardo l'addizione, la sottrazione e divisione dei numeri interi con i decimali e riduzione di parti di numeri in singole parti.
Riguardo l'acquisto e la vendita delle cose vendibili e simili.
Riguardo il baratto delle cose vendibili e dell'acquisto delle cose bolsonali , e per quelle regole simili.

Riguardo i fatti tra complici
Riguardo la consolazione del denaro e delle loro regole, che servono a consolare.
Riguardo le soluzioni delle molte lamentele poste che definiamo erranti
Riguardo le regole tramite cui si risolvono quasi tutte le domande con metodo errato.
Riguardo il trovare radici di quadrati e cubi dalla moltiplicazione e divisione sia dalla sottrazione di loro da loro stessi e del trattato dei binomi e delle cose tolte e delle loro radici
Riguardo le regole pertinenti alle proporzioni in geometria, riguardo le questioni d'algebra e "almuchabale"

Viene qui proposto e sintetizzato il contenuto del testo. Già si nota come vengano trattati argomenti diversi sul piano matematico: da questioni tecniche come le modalità per le operazioni, alle questioni pratiche, relative soprattutto ai commerci. È come se le due anime di Fibonacci si riassumessero in questo libro[2], in cui si contrappongono e si confondono due diverse percezioni della matematica come strumento: pratico per i conti da parte del mercante e ricco di conoscenza da parte dello studioso.

Incipit del primo capitolo
Ci sono nove figure degli indiani 9 8 7 6 5 4 3 2 1
Perciò con queste nove figure, e con quella di segno 0, che in arabico viene chiamata zephiro [zero], si scrive qualsiasi numero, come si dimostra più in basso. Infatti il numero è una raccolta piena di unità o un complesso di unità, che aumenta all'infinito per i suoi gradi.

Si potrebbero utilizzare queste ultime tre righe per fare molta matematica e molto di ciò che matematica significa. Come vedremo anche in seguito, ciò che Fibonacci si sta introducendo è sostanzialmente un linguaggio ed in quanto tale presenta innanzi tutto l'alfabeto. La cosa però più interessante è da una parte la infinita possibilità di scrivere numeri per mezzo di pochi segni, dall'altra un tentativo di definizione di numero per mezzo della nozione di cardinalità, salvo poi arrivare ad una forma di identificazione tra il numero e la sua rappresentazione. In particolare, la definizione di numero come "raccolta piena di unità" pone in modo conflittuale il numero come assenza di unità. È quindi in un qualche modo naturale che questo accenno alla semantica lasci poi rapidamente il posto a considerazioni di carattere morfologico o sintattico.
Una ulteriore considerazione riguarda il nome utilizzato per il simbolo 0.
Com'è noto i nomi non sono neutri ed evidenziano le tracce del percorso culturale alla base del simbolo. Rimandiamo a [4.4.] per un suo approfondimento. Ciò che qui ci preme evidenziare è come Fibonacci debba richiamare un termine per indicare lo 0 (che contrariamente alle altre cifre chiama segno, anziché figura ed anche questa distinzione è sintomo di una diversa accezione, non solo morfologica) desunto da un'altra lingua. Per presentare lo zero occorre uscire dal contesto specifico. Il mondo arabo diventa il metalinguaggio a cui ci si deve rivolgere. [3.1. - 4.4.]

Dai quali il primo è formato dalle unità, che vanno da uno fino a dieci. Il secondo e formato dalle decine, che vanno da dieci fino a cento. Il terzo è formato dalle centinaia che vanno da cento a mille. Il quarto è formato dalle migliaia che vanno da mille a diecimila, e in questa sequenza di grado all'infinito, qualsiasi grado sia formato dal decuplo del suo antecedente. Il primo grado nell'ordinamento dei numeri inizia da destra. Il secondo, in vero, segue il primo a sinistra. Il terzo segue il secondo. Il quarto il terzo, il quinto il quarto e sempre così verso sinistra il grado segue l'altro grado. Perciò la figura che si trova in primo grado rappresenta sé stessa, così: se in primo grado sarà una figura di un'unità, e lo rappresenta una figura; se di due cifre, due; se di tre cifre, tre; e così via per l'ordine che

[2] Il titolo del libro è, com'è noto, improprio e fuorviante, non essendo un libro d'abaco, ma anzi tendente a superare l'abaco.

segue, fino alla figura di nove cifre: nove figure che saranno certamente in secondo grado, rappresenta tante decine, quante nel primo le unità. Questo avviene se la figura di una unità occupa il secondo grado, denota il dieci; se di due, il venti; se di tre, il trenta; se di quattro, il quaranta. Infatti la figura che sarà in terzo grado denota tante centinaia quante nel secondo le decine, o nel primo le unità, come se la figura fosse di cento unità; se di due, duecento; se di tre, trecento; quindi la stessa che potrebbe essere nella quarta posizione tante migliaia quante centinaia nella terza, o decine nella seconda, nella prima designa le unità; e così sempre mutando la posizione, il numero aumenta decuplicando. E affinché questo che è stato detto sia reso più chiaramente, ciò sarà mostrato con le immagini. Se fosse nella prima posizione la figura di un sette, e di un tre nella seconda, ambedue assieme denotano 37; mentre al contrario: una figura di un tre al primo posto e un sette al secondo, denoteremo 73.

Inizia qui una parte piuttosto lunga in cui Fibonacci spiega come si costruiscono i numeri.
La parte è tecnicamente piuttosto noiosa, ma è cruciale nella prospettiva linguistica. Come detto, qui non si tratta tanto di dire cosa sia un numero, ma come fornirne una rappresentazione. Il problema è quindi sostanzialmente morfologico e la strutturazione è soprattutto linguistica: è stata specificato cosa sia l'alfabeto (le cifre) si tratta di indicare come costruire le "parole". A questa difficoltà si aggiunge il ruolo particolare assunto dallo zero anche sul piano morfologico: contrariamente ad altre cifre non può occupare tutte le posizioni. [morfologia-4.1.])
A queste si possono aggiungere altre due osservazioni: la scrittura procede da destra a sinistra, ponendo problemi sia per quanto riguarda la lettura (a cui si ricollega la proposta di suddividere le cifre a gruppi di tre che si vedrà in seguito) che invece avviene da sinistra a destra, sia il concetto di successione collegata alla costruzione di sequenze di cifre che rappresentano numeri. In pratica si potrebbe dire che il bisogno di avere (potenzialmente) infiniti simboli per rappresentare i numeri, tipico di una notazione non posizionale, alla possibilità (potenzialmente infinita) di aggiungere cifre. Nella difficoltà relativa al passaggio della costruzione della notazione alla sua lettura si gioca buona parte dell'efficacia concettuale della nuova numerazione e l'attenzione posta da Fibonacci in questa descrizione sembra dare atto di questa consapevolezza.
Inoltre la notazione posizionale pone, in questa fase, il problema di ciò che possa essere inteso con numero, con la identificazione, espressa dalla frase evidenziata, tra la cifra e le unità che rappresenta, di chiara connotazione semantica. Questo conflitto tra le diverse connotazioni del simbolo 0 con cui Fibonacci deve fare i conti non sono una cosa strana nel percorso culturale precedente o del suo tempo (vedi [3.2.]).

Ugualmente se ci fosse al primo posto un quattro e un'unità nel secondo, così scriveremmo 14, evidentemente XIIII; invece se l'uno fosse al primo posto e il quattro al secondo, scriveremmo XLI così, 41. A sua volta nel primo caso fanno 72, e nel secondo 27; al contrario fa 72. Se invece volesse scrivere settanta, pone al primo posto 0, e dopo la figura del sette, così 70; se vuole scrivere ottanta la figura dell'otto segue lo zero così 80: da questa dimostrazione qualsivoglia numero dalle decine alle centinaia lo puoi scrivere con due figure. In verità con tre figure scrive da cento fino a mille; come se la figura dell'otto fosse al primo posto, e quella del cinque al secondo, e un'unità nel terzo,scriveremmo 158, centocinquantotto; e viceversa: se la figura dell'unità fosse nel primo, e quella del cinque nel secondo, e dell'otto nel terzo scriveremmo 851, ottocentocinquantuno; al contrario: se la figura dell'otto fosse al primo posto, e quella dell'unità al secondo, e quella del cinque al terzo, scriveremmo 518. Allo stesso modo se cambiassi la figura del cinque fosse al primo posto, quella dell'otto al secondo, e quella dell'unità al terzo, scriveremmo 185. Allo stesso modo se la figura dell'unità fosse al primo posto, quella dell'otto al secondo e quella del cinque al terzo, certamente scriveremmo 581; in verità tre unità come 111, fanno centoundici. Veramente se volessi scrivere cinquecento, nella prima e nella seconda posizione metti gli zeri, e nella terza la figura del cinque, in questo modo scrivi 500; e così con due zeri potresti scrivere qualsivoglia numero delle centinaia.

Viene ribadita in questa parte l'anomalia dello zero nella costruzione morfologica. Come in altre parti, anche qui il tutto viene proposto sotto forma di esempi. Sarebbe interessante proporre una strutturazione formale, in base ad una concezione moderna degli aspetti linguistici. La cosa non è banale e sarebbe più semplice se fatta da sinistra a destra e non da destra a sinistra come la successione delle cifre suggerisce. Questa differenza ha delle significative ripercussioni nel momento in cui si cercasse di fornire un algoritmo per stabilire una relazione d'ordine tra i numeri in base alle stringhe che li rappresentano.

E se vorrai scrivere le centinaia con le decine o le unità, poni in primo grado lo zero, al secondo le decine , nel terzo le centinaia, quelle che vuoi (quante ne vuoi). Ad esempio : se nella prima posizione ci fosse lo zero,e nella seconda il segno del nove, e nella terza il due, significherebbe (sarebbe marcato) 290. Ma se vorrai scrivere le centinaia con le unità senza le decine porrai in seconda posizione, cioè nel luogo delle decine lo zero e nella prima posizione la cifra delle unità che occorrerà e nella terza posizione la cifra delle centinaia; come se ci fosse nella posizione il segno del 9 nella seconda lo 0 nella terza il 2 esprimeranno 209, e così secondo la sopradetta dimostrazione come vorrai scriverai un numero da cento fino a mille con tre segni, infatti con quattro scriverai da mille fino a diecimila come è mostrato nei seguenti numeri sopra annotati con le figure. E così si deve procedere per i numeri restanti. Infatti con 5 segni sono scritti tutti i numeri da dieci mila fino a cento mila, con sei cifre davvero, da centomila fino a mille migliaia , e così via, aggiungendo un segno ai segni, il numero aumenta gradualmente in ordine decimale. Da qui se capiterà che qualcuno non sappia leggere o capire un qualche numero di molte cifre a causa della quantità delle cifre farò in modo di mostrare in che modo debba essere compreso o letto quello stesso.

Riteniamo che questa parte meriti due commenti: il primo è la segnalazione, sicuramente sconcertante per il tempo in cui Fibonacci scrive, di come basti inserire una sola cifra per avere un aumento incredibile dei numeri che si possono rappresentare. Il secondo: la possibilità, con la notazione posizionale, di dare un nome a ogni numero. In questa fase si passa quindi dalla struttura delle notazioni al nome dei numeri corrispondenti. Si costruisce quindi il passaggio dalla stringa al significato, dalla morfologia alla semantica. [4.6.]

Perciò riguardo la prima figura, questo è per la figura di primo grado, si dica uno.
Della seconda che è nel secondo grado, si dica dieci.
Della terza che sarà nel terzo grado, si dica cento, e si accenti quella nella parte superiore. Infatti della quarta figura dello stesso numero, si dica mille, e si accenti nella parte inferiore. Della quinta, in verità, si dica diecimila.
Della sesta perciò centomila, e si accenti nella parte superiore.
Della settima si dica mille migliaia, e si accenti quella indietro nella parte inferiore. Dell'ottava si dica diecimila migliaia.
Della nona si dica centomila migliaia e si accenti quella nella parte superiore.
Della decima si dica millemila migliaia, e si accenti quella nella parte inferiore; e così sempre per questi tre numeri, si intende per mille volte tanto, per diecimila volte tanto, per centomila volte tanto nella parte superiore, fino all'ultimo grado del numero si cerchi di accentare. E perciò si incominci a leggere il numero dall'ultimo grado dello stesso per un accordo d'accento, dicendo sempre sugli accenti inferiori tante mille migliaia quante saranno state accentate davanti alla stessa nella parte inferiore verso il primo grado, e sugli accenti superiori, dicendo tante cento migliaia quante saranno state accentate davanti a quella nella parte inferiore similmente verso il primo grado del numero; e delle

figure che non saranno state accentate dopo il quarto grado del numero si dica tante dieci mila volte quante saranno state accentate davanti alle stesse nella parte inferiore, e così si potrà conoscere e leggere qualsiasi numero di molte figure voglia. E affinché questo si comprenda meglio, proponiamo un certo numero di otto figure: 87654321.

Come accennato in precedenza, la possibilità di fornire un nome ai numeri desunto dalla struttura di ciò che li rappresenta diventa una forma di potere sull'oggetto numero. Se questa parte assomiglia ad una sorta di genesi delle numerazioni, il rimando più diretto sembra proprio essere il libro della Genesi, in cui la possibilità di fornire un nome alle cose (agli animali) diventa sostanzialmente potere sulle stesse. In pratica, è il "nome" che "fa" il numero e questo è antitetico rispetto alla tradizione precedente. In questo modo subentrano questioni di esistenza legate agli oggetti considerati, con uan conseguente implicazione filosofica. [3.2.]

Per esempio, si parla di unità di un numero(cifra) che è nella prima posizione,si parla di decine di due numeri che sono consecutivi, si parla di centinaia, di tre numeri che formano una terna che sono accentate nella parte superiore. Si parla di migliaia di quattro numeri che occupano quattro posizioni, che sono accentati nella parte inferiore che è presentata (si vede) dal numero scritto precedentemente.
Si parla di dieci mila di un quinario di 5 numeri che occupano cinque posizioni, si parla di cento mila di un senario di 6 numeri che occupano sei posizioni; si parla di un milione di un settenario di 7 numeri che occupano sette posizioni che sono accentati nella parte inferiore; si parla di dieci milioni di un ottonario di 8 numeri che occupano otto posizioni:dunque si ha come numero quello citato in precedenza otto milioni e settecento mila, che ha due accenti inferiori, uno dei quali è sotto 7 e l'altro sotto 4, e sopra a 654.000 e sopra a CCCXXI.
proponiamo ugualmente un'altro numero della figura 257604813, che per come è posto l'accento può essere composto da duecento cinquanta sette milioni, e seicento quattro mila e ottocento tredici.
Ugualmente è proposto un numero di tredici figure 1007543289081, di cui la quantità è conosciuta essere mille e sette miliardi, e cinquecento quaranta tre milioni, e duecento ottanta nove mila e in aggiunta 81.
Infatti possiamo insegnare un'altra regola facile e così potrete leggere velocissimamente un numero di numerose figure.

Fibonacci parla di regole e in questo termine, ampiamente usato anche nella nostra realtà matematica, si cela di fatto una tecnica. Normalmente, il concetto di "regola" applicato ad enti matematici si ricollega a modalità operative. In questo caso invece ci si riferisce a contesti di lettura. Viene quindi rimarcato il ruolo linguistico, prima che aritmetico, della nuova forma di numerazione. E viene quindi rimarcato come l'approccio linguistico sia traducibile tecnicamente, pur partendo da strutture non strettamente riconducibili a basi culturali condivise.
Riprendendo inoltre quanto detto in precedenza a proposito della potenzialità di scrittura, è da rimarcare come a fronte di numeri con anche 15 figure, l'esempio di numero maggiore che scrive in notazione latina sia CCCXXI [3.1.].

Per esempio: proponiamo un numero di 15 figure, 678 935 784 105 296, lasciate stare le prime tre figure, senza dubbio 296, sopra ad altre tre figure qualsiasi traccia una virgola a forma di arco come nell'esempio precedente; e per qualsiasi virgola dirai; e quelle tre figure che all'inizio lasciasti stare, leggile così come stanno, e così dirai seicento settanta otto mila miliardi, essendo le virgole quattro, e novecento trenta cinque miliardi, essendo le virgole sopra tre, e settecento ottanta quattro milioni, essendo due le linee sopra e cento e cinque mila, essendo una soltanto la virgola, e 296 per quelle tre figure che all'inizio lasciasti stare: a se per ultime rimangono una o due figure, metti quelle stesse sotto l’ultima virgola e leggerai tutte quelle (“.IIII.” separate) o tutte e cinque insieme, e così potrai leggere un numero e con qualsiasi quantità di figure.

La indicazione metalinguistica dei numeri che si vanno a rappresentare con le cifre è naturalmente indispensabile, come del resto avviene in tutti i contesti in cui si introduce un linguaggio oggetto. In questo caso il latino funge da metalinguaggio per il linguaggio oggetto proposto con le cifre.
Il diverso rapporto tra gli oggetti considerati si nota anche per l’uso che viene fatto del termine “quantità”. Tale termine (evidenziato nel testo precedente) viene è utilizzato con significati diversi: nel primo caso, indica il valore del numero rappresentato, per cui siamo nel contesto semantico del concetto di numero. In particolare, lo zero serve, anzi è indispensabile, per indicare una quantità. Nel secondo caso, le cifre (e quindi anche lo zero) sono esse stesse quantità, proponendo così un radicale e significativo cambio di paradigma: il simbolo diventa oggetto. Il riferimento più diretto è relativo a cosa sia un oggetto matematico e con questa frase Fibonacci sembra assegnare dignità di oggetto (matematico) a ciò che semanticamente rappresenta il nulla. [3.3.]

Dopo aver descritto le figure e dopo aver ben conosciuto con un esercizio frequente l' ordine di quelle secondo la materia scritta più sopra, è opportuno che quelli che vogliano abbracciare l' arte dell' abaco, affinché appaiano più perspicaci e ingegnosi, conoscano il calcolo fatto attraverso la forma delle mani e in secondo luogo l' uso che i maestri facevano dell' abaco nel tempo antico inventato in maniera molto sapiente. Questi sono i segni.

Abbiamo ritenuto questa frase particolarmente significativa: collegare i “segni” con gli oggetti (mani, abaco, ecc.) da una parte può servire per fornirne modalità più semplici per la memorizzazione, ma dall’altra è anche un modo per evidenziarne il successivo livello di astrazione. Questo potere assunto dalla cifra si ricollega in qualche modo al termine “cifra” utilizzato e a sua volta mediato dal nord Europa. [4.4.]

La curvatura del dito auricolare a sinistra della mano sopra la parte centrale del palmo nota l' uno. Una certa curvatura del medesimo dito con l' anulare in maniera simile sopra il centro del palmo forma il due, e curvando con questi anche il medio si forma il tre. La curvatura dell' anulare e del medio sopra il centro del palmo forma il quattro. La curvatura soltanto del medio forma il cinque. La curvatura dell' anulare forma il sei. La posizione dell' auricolare in alto sopra la palma forma il sette, sopra il qual luogo (palma) quando è posto l' auricolare e l' anulare si forma l' otto: la posizione delle medesime dita con il medio sopra il palmo della mano denota il nove. Quando viene fatto un cerchio dall' estremità dell' indice e del pollice sulla giuntura del pollice denota il dieci. Quando l' indice e il pollice sono stesi e si toccano denotano il venti. Quando dall' estremità dei medesimi si denota il trenta. Quando il pollice è posto sopra l' indice sulla parte esteriore dell' indice denota quaranta. La curvatura del pollice sopra l'inizio dell'indice denota il cinquanta. La curvatura dell'indice sopra il pollice curvato crea il sessanta. La curvatura dell'indice sopra l'estremità del pollice esteso forma settanta e così la curvatura dell'indice sopra (virgulam) del pollice esteso ottanta. Ugualmente la curvatura di tutto l'indice crea ottanta. Anche le centinaia e le migliaia si fanno sulla mano destra con lo stesso ordine, appunto il segno dell'uno nella mano destra crea il cento, ugualmente il segno del due crea il duecento, il segno del dieci crea il mille e il segno del novanta crea il novemila, come è dimostrato nella pagina seguente con il disegno delle mani. Si compongono così sulle mani, con questi segni, tutti i rimanenti numeri che vanno dal dieci al diecimila in questo modo: dal segno del venti e dal segno del tre si compone il ventitre; e dal segno tremila e dal segno del cinquanta si compone sulla mano destra il tremilacinquecento e così cerca di capire i rimanenti numeri.

A completamento di questa parte, ci sembra opportuno evidenziare come le cose riportate debbano essere calate nel contesto in cui sono scritte. Come all'inizio Fibonacci si preoccupa di richiamare i collegamenti con la geometria, così sembra che la connotazione semantica data ai "segni" possa essere vista come un modo per tranquillizzare i contemporanei: si propone cioè la sostituzione di un simbolo che coincide col valore che rappresenta (tipico della numerazione romana) con simboli che, seppure abbiano valori non definiti a priori hanno comunque una giustificazione antropologica. A questo si potrebbe aggiungere il probabile tentativo di rassicurare gli stessi maestri d'abaco, tendenzialmente restii ad introdurre la nuova tipologia di numerazione [abachisti].

INIZIA IL SECONDO CAPITOLO SULLA MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI
Dividiamo il secondo capitolo sulle moltiplicazioni dei numeri interi in otto parti per capire meglio le loro differenze e le loro proprietà. Di queste la prima parte sarà sulla moltiplicazione di due figure per due e di una figura per molte. La seconda parte sarà sulla moltiplicazione di tre figure per tre e di due figure per tre. La terza parte sulla moltiplicazione di quattro figure per quattro e anche di due o tre figure per quattro. La quarta parte sulla moltiplicazione di cinque figure per cinque.
La quinta parte sulla moltiplicazione di più di cinque figure, proprio come se venissero moltiplicate vicendevolmente.
La sesta parte è sulla moltiplicazione dei numeri di secondo grado per i numeri dello stesso grado, e questo accade per due figure per due e di una figura per molte, come se fossero moltiplicati nelle mani in modo opportuno.
La settima parte è sulla moltiplicazione di tre figure per altre tre, proprio come se fossero moltiplicati nelle mani in modo opportuno.
L'ottava è sulla moltiplicazione di tutti i numeri in altro modo.
INIZIA LA PRIMA PARTE SULLA MOLTIPLICAZIONE DI DUE FIGURE PER DUE
Si dice moltiplicare un numero per se stesso quando viene moltiplicato per il numero uguale (simile), come 12 per 12 o 26 per 26.
Si dice moltiplicare un numero per un altro numero quando i numeri da moltiplicare sono diversi tra loro, come 12 per 37 e 46 per 59: quindi come prima cosa insegniamo, come già detto, a moltiplicare un numero di secondo grado appunto da 10 a 100 per se stesso.
Ritenendo che tu voglia moltiplicare un numero di secondo grado per un altro numero dello stesso grado, sia che i numeri siano uguali sia che siano diversi, scrivi un numero sotto l'altro numero, così che il grado simile sia sotto il grado simile; se i numeri sono diversi sia il maggiore sotto il minore, e inizia la moltiplicazione dal primo grado dei numeri scritti sul foglio.
Dal momento che si moltiplichi una figura di primo grado del numero superiore dato in tabella per una figura del primo grado inferiore[3] e si scrivano le unità superiori al primo grado del numero prescritto, e si tenga per ogni decina un uno nella mano sinistra: poi si moltiplichi una figura di primo grado di un numero superiore per una figura di secondo grado, per l'ultima si valuti la figura di numero inferiore, e all'opposto: viene moltiplicata la figura di primo grado inferiore per l'ultima figura superiore, e viene aggiunto sulla mano con le precedenti decine, e di nuovo vengono scritte le unità sopra il secondo grado, e le decine vengono tenute nella mano. Nello stesso modo si moltiplica l'ultima figura di cifre superiore per l'ultima inferiore, e quindi escono dalla moltiplicazione con le decine conservate che erano state aggiunte prima, e le unità e le decine che prima erano al terzo grado sono poste al quarto, e si ha la moltiplicazione di qualsiasi numero da decine fino in centinaia. Per esempio: per risolvere la moltiplicazione di 12 per 12, si scrive due volte 12 su una tavola pulita sulla quale si possano cancellare facilmente i segni, viene deciso per

[3] Più che un commento, qui premeva evidenziare come si utilizzi la relazione d'ordine precedentemente introdotta, a sua volta controvariante rispetto alla lettura.

esempio in quale margine scrivere, il primo grado di numero inferiore sotto il primo grado di superiore, questa è una figura di due sotto una figura di due, e il secondo grado dell'inferiore sotto il secondo del superiore, è evidente la figura delle unità sotto la figura delle unità, e si moltiplica 2 per 2, che darà 4, e si riporta sopra per due volte come era nella prima descrizione. Per la seconda volta si moltiplica il 2 superiore, che è nel secondo grado del numero inferiore, che darà 2, e vengono tenuti nella mano, e si moltiplica di nuovo il 2 dell'inferiore per l'1 del superiore, che darà 2, e si aggiunge con i due conservati di sopra, che darà 4, e si pone spora l'unità e da ciascuna si ottiene lo stesso 4 di secondo grado, poi viene posto il primo dei due 4 che componevano il primo grado, come è spiegato nella seconda descrizione, e ancora si moltiplica l'1 del numero superiore per l'1 dell'inferiore, si otterrà 1, poiché l'1 si scrive nel terzo grado si intende dopo aver trascritto 44, come si mostra nella terza e ultima descrizione. E in tutto per moltiplicare il 12 in se stesso lo si eleva, s'intende 144.

Si chiarisca il percorso, perché sia più comprensibile, si moltiplichi 37 per 37. Si scriva 37 sotto 37, che consideriamo sopra al 12, e moltiplichiamo 7 per 7, farà 49: sia dunque messo il 9 sopra entrambi i 7 in modo che sia mostrato nel primo ordinamento [descriptio], e per quanto riguarda il 4 sulle decine che sono in 49, teniamo il 4 in mano, e moltiplichiamo il 7 del numero superiore per il 3 di quello inferiore e il 7 di quello inferiore per il 3 del superiore, e siano sommati insieme, farà 42, che aggiungendo il 4 superiore tenuto, farà 46:scriviamo le unità di 46, che sono 6 sopra entrambi i 3, perché1 vengano segnati nel secondo ordinamento. E per quanto riguarda le 4 decine che sono in 46, siano tenute in mano, e ancora si moltiplichi il 3 del numero superiore per il 3 del numero inferiore, farà 9; che, aggiungendo il 4 tenuto, fa 13: si metta il 3 di 13 nel terzo grado e lo 1 nel quarto, in modo che siano contenuti nel terzo e ultimo ordinamento.
Si capisce in questo modo se questa moltiplicazione è giusta. Si sommino le cifre che sono nel 37 di sopra, quindi il 3 con il 7, fa 10, di cui si sottrae 9, rimane 1, che teniamo. Nello steso modo sommiamo le cifre del 37 di sotto, e sottraiamo quindi 9, rimarrà ugualmente 1: moltiplichiamo quindi 1 che è rimasto del 37 superiore per lo 1 che è rimasto dell'inferiore, fa 1; si chiami razione [pensa] o porzione [portio], e sia riportato nella tavole sopra la stessa moltiplicazione, in modo che vengano tenuti nel terzo ordinamento: in seguito, si sommino le cifre che sono nella somma della moltiplicazione, e della somma ottenuta, si sottragga 9 quante volte si può; e se rimane 1 come è stato segnato per la razione [pensa], la moltiplicazione sarà giusta.

Ciò che emerge in questa parte è che non venga indicato cosa sia l'operazione (in questo caso la moltiplicazione) ma quale sia la metodologia per attuarla. Si procede quindi su un piano prettamente sintattico. È inoltre da notare come la regola del 9 venga proposta come condizione necessaria e sufficiente e non solo necessaria, come di fatto è. [2]

In pratica: se sommiamo le cifre che sono nella somma della moltiplicazione, quindi 1,3,6 e 9, e fa 19, di cui si estrae due volte 9, rimane 1, prediciamo che lo stesso deve rimanere per la razione [pensa]: così del suddetto 19 togli i 9 che sono nel primo grado degli stessi, rimane similmente 1.
E nota: sommate le cifre di 37 , quindi 3 e 7, dopo aver diviso 37 per 9, dalla cui divisione rimane 1, così è rimasto da 10 che è il risultato della somma tra 3 e 7, quando si estrae da tale somma 9: infatti il resto che rimane da qualsiasi numero diviso per 9, è la somma che è data dalla addizione di tutte le cifre che costituiscono lo stesso numero.
E da notare ancora, quando certi numeri sono divisi in parti, e si moltiplica ciascuna delle parti per un certo numero, quelle moltiplicazioni, sommate, danno un numero uguale alle moltiplicazione di tutto il numero diviso, per il numero per cui erano state moltiplicate tutte le parti di quello.

Dunque, la somma delle moltiplicazioni di 36 per 37, e di 1 per 37, è uguale alla moltiplicazione di 37 per 37.

È interessante notare come si propongano e sottolineino alcune proprietà delle operazioni, ma questo avvenga su un paino dialogico e non dimostrativo. La tradizione geometrica che aveva fatto del metodo ipotetico-deduttivo la sua forza sembra non avere riscontro in ambito numerico. L'analogia corre veloce anche a ciò che succede ai nostri giorni, in cui mentre la dimostrazione fa parte del bagaglio geometrico degli studenti, molto più raramente sono proposte e fatte dimostrazioni di carattere aritmetico. [4.2.]

Ma dalla moltiplicazione di 36 per 37, viene il numero che è dato da una certa quantità di 9, come 36 è data da un certo numero di 9. Il numero che è il prodotto di 36 per 37, se fosse diviso per 9, rimarrà indivisibile secondo quello. Similmente, la moltiplicazione di 1 per 37 è uguale alla somma delle moltiplicazioni di 1 per 36 e 1 per 1. Ma dalla moltiplicazione di 1 per 36 viene un numero che è diviso esattamente da 9: perciò il prodotto della moltiplicazione di 1 per 1, che è 1, rimane indivisibile per 9. Dunque del prodotto di 37 per 37 diviso per 9 rimane 1, che si ha dalla somma di tutte le cifre che sono nella somma di 37 per 37, che troviamo sopra: dalla suddetta cifra non considerare il 9, e rimane quindi 136, di cui togli 3 e 6 che sommati fanno 9, rimarrà 1, similmente indivisibile come 1369 per 9.

Ancora una volta ci preme sottolineare l'uso del termine quantità riferito agli oggetti "cifre". Il termine è ancora molto presente nella pratica matematica, seppure utilizzato spesso in modo improprio. In questo contesto però è significativo il riconoscimento dello statuto di "oggetti" a simboli linguistici.
Per quanto riguarda la traduzione abbiamo ritenuto di poterci fermare a questo punto, in quanto a nostro avviso sono già emersi gli aspetti per noi peculiari.

2. I problemi dal TRATTATO d'ABACO

Il Trattato in questione è un manoscritto (Manoscritto Parmense 78 della Biblioteca Palatina di Parma) del XV secolo.
Come molti libri d'abaco medioevali (e questo vale anche per il testo di Fibonacci) i problemi proposti sono di diversa tipologia (molti legati soprattutto a scambi commerciali, denari, sconti, ecc., visto che le botteghe dei maestri d'abaco erano frequentate solitamente da futuri mercanti), problemi che a loro volta sono funzionali all'introduzione di particolari tecniche risolutive.
Malgrado quindi la natura semantica di tali problemi, ciò che emerge è soprattutto il loro essere "problemi tipo", in cui proprio le modalità di risoluzione scavalcano, come vedremo in alcuni casi, proprio il significato degli oggetti coinvolti. Per questo non mancano anche problemi di carattere più marcatamente speculativo o di carattere geometrico, visti come lascito delle scuole ecclesiastiche e legati più agli studi universitari. Ma l'impressione generale è che le varie situazioni (pratiche, aritmetiche o geometriche che siano) non siano altro che "vestiti" messi addosso a particolari strutture. Strutture che poi ritroviamo molto simili nelle tipologie di problemi proposte anche oggi, soprattutto al biennio.
In considerazione di questo lavoro, il nostro intento non è tanto quello di fare analisi dettagliate e commentate di tale testo (per il quale si rimanda alla edizione curata riportata in bibliografia), quanto proporre alcuni problemi da noi selezionati con l'intento di mostrare come vengano trattati (e spesso subordinati) gli aspetti semantici a quelli sintattici o come i problemi nascondano dietro l'apparente richiesta altre questioni più strettamente speculative, come ad esempio la gestione di un sistema numerico posizionale o il ruolo assunto dallo zero in un ipotetica soluzione.
Quindi i (pochi) problemi proposti sono stati selezionati in base a questi criteri.
Verranno proposti (con carattere Arial) con il loro numero di catalogazione e saranno seguiti da un

breve commento (in corsivo).

Consideriamo la ragione[4] 24v 4:
Fame questa rasone. Uno vuole sapere quelo chi alcuno gitasse cum 3 dadi . Fa cossì: redopia lo primo dade, zoè lo puncto de lo primo dade, zunze 5 e fa 5 via tanto. E zunze lo puncto de lo secondo date e zonze 10 e fa 10 via tanto. E zunze lo punto de lo tercio date e poy te fa dire la summa e leva via de la dicta summa 350 e tante centinaia como te restane, tanti puncti gitò l'uno date e tante desine como te restane, tanti puncti gitò cum lo secondo date. E tanti numeri como te restane, tanti puncti gitò cum lo tercio date. Ed è facta.
Più che un problema, quello proposto è una metodologia per "indovinare" dei numeri riconducibile ad altri giochi in cui una serie di operazioni permette a chi gestisce il gioco di ricondurre il risultato ad una forma a lui nota e quindi facilmente interpretabile. In questo caso, ciò che ci interessa è che il solutore utilizza il sistema di numerazione posizionale per arrivare alla soluzione. Indicati con x, y e z le uscite dei tre dadi, il calcolo richiesto porta all'espressione $((2x+5)\cdot 5+(y+10))\cdot 10 + z$ *che semplificata porta a* $100x+10y+z+350$*. Sottraendo quindi 350 si ottiene un numero in cui il numero delle centinai, delle decine e delle unità rappresentano le uscite dei tre dadi.*

Ragione 105 2
Fame questa rasone. Sono 2 homini che hano dinari e ne hanno tanti l'uno quanto l'altro e dici l'uno a l'altro: se tu potesse havere tanti dinari quanto seria a moltiplicare incontra i ¾ de li toy, tu ne haveresse contanti como mi. E domando quanti dinari aveva zaschuno de quisti 2 hominj.
Ora fa' cossì: poni che 'l numero sia 1 cosa. Multiplica 1 cosa via ¾ de cosa e fa ¾ de censo, sì che ¾ de censo è inguale a 9 volte tanto como tosse. Aduncha serà 9 cose. Pertanto ¾ de censo sono inguale a 9 cose. Aduncha debiemo partire le cose per li censi. Aduncha, parti 9 per ¾, chi vene 12 12 e tanti dinari haveva zaschuno. Per che multilicando li ¾ de l'uno incontra li denari de l'altro, fanno 9 volte tanto. E nota.
In questo problema ci interessa sottolineare alcuni aspetti. Intanto i termini: in generale le grandezze sono chiamate con "cose", laddove i quadrati delle grandezze con "censo". Questi due termini sono indipendenti dalla grandezza considerata e si riferiscono sostanzialmente, come diremmo oggi, al grado con cui compare l'incognita: nelle "cose" l'incognita è a primo grado, nei "censi" a secondo. In pratica i primi sono i termini lineari, i secondi i termini quadratici.
Questo permette una sostanziale "confusione" rispetto alla omogeneità dei due termini che si vanno ad eguagliare. L'equazione risolvente è infatti del tipo $\frac{3}{4}x^2=9x$ *e se si considera x come la somma comune (come è anche proposto dai commentatori che hanno curato il testo) l'uguaglianza non è corretta sul piano dimensionale.*
Si parla quindi di denaro e di somme di denaro, ma la struttura del problema e la tecnica risolutiva sembra andare oltre l'aspetto contingente, col quale, anzi, risulterebbe in conflitto.
Inoltre è da sottolineare come per ricavare la soluzione si divida per x, evitando in questo modo (ed in effetti non vi si fa alcun riferimento) la soluzione nulla. Non è l'unico contesto in cui questo succede, a testimonianza, a nostro avviso, della difficoltà presente anche in questo testo nell'accettazione non tanto dello zero come cifra, quanto come numero. La soluzione nulla, seppure banale, non sarebbe da trascurare, a meno che il problema non sia legato, come pensiamo, al riconoscere a tale numero un significato rispetto ad una specifica situazione pratico-problematica. È come se implicitamente gli autori ci dicessero che non ha senso considerare un problema su somme di denaro in assenza dello stesso. Come è noto, il significato di una somma nulla è ben chiaro a chi si è trovato a non avere soldi su un conto, per cui il problema potrebbe essere posto anche in questi termini. In accordo con quanto visto in precedenza, pensiamo così che il problema

[4] "Ragione" è il termine usato nel manoscritto per indicare i problemi.

possa essere più culturale che tecnico.

Consideriamo la ragione 104v2:
Fame questa rasone. Li son 4 homini chi hano da partire certi dinarj e non so quanti. Ma certa cosa si è chi li 3 hominj senza lo primo debene havere ll20. E li altri 3 senza el secundo debene havere ll22. E li 3 senza lo tercio debene havere ll24. e li 3 senza lo quarto debene havere ll 27. E domando chi dinari debene havere zaschuno de quisti 4 hominj e quanti dinari haveveno da partire.
Il problema si riconduce alla tradizione mercantile ed è risolto dal maestro d'abaco tramite un procedimento equivalente alla somma a membro a membro delle tre equazioni di un sistema. Dette x,y,z,w le quantità di denaro da spartire fra i quattro uomini, si può osservare come il procedimento seguito dal maestro d'abaco equivalga, tradotto in termini moderni, all'applicazione del metodo di risoluzione al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} y + z + w &= 20 \\ x + z + w &= 22 \\ x + y + w &= 24 \\ x + y + z &= 27 \end{aligned}$$

$$3x + 3y + 3z + 3w = 93$$
$$x + y + z + w = 31$$

Quindi la somma di denaro da dividere ammonta a 31 lire e ad ogni uomo spettano le seguenti somme:

$$\begin{aligned} x &= 31 - 20 = 11 \\ y &= 31 - 22 = 9 \\ z &= 31 - 24 = 7 \\ w &= 31 - 27 = 4 \end{aligned}$$

Ciò che interessa in questo problema e soprattutto nel suo metodo risolutivo, è come, lungi da una formalizzazione algebrica, venga utilizzato in termini tecnici il metalinguaggio. Si tratta quindi di una tecnica risolutiva riconducibile a forme di principi di equivalenza.

Nel manoscritto vi sono diversi problemi molto simili ad altri già presenti nel [LA]. Questo sembra rafforzare l'idea di categorie di problemi, visti come problemi tipo, come oggi può essere un sudoku. A titolo di esempio riportiamo la

Ragione 33v2 (variante del problema del leopardo, del lupo e dell'orso che divorano una preda del [LA]):
Nota che una nava ha 2 vele e vole andare al porto e cum una la va in tre hore e cum l'altra in 4 ore. E domando, ponendo tute doe queste velle a una hora, in quanto tempo andarà questa nave al porto, facende cadauna sua forza per vento. Questa si è la regola. Dì che 1/3 e ¼ se retrova in 12 e dì che lo ¼ e ¼ de 12 si è 7. Aduncha, parti 12 per 7; vene 1 e 5/7 e in una hora e 5/7 de hora andarà la predicta nave al porto. E nota per tute le simile rasone.
Più che un problema si tratta di un indovinello, come ce ne sono altri nel manoscritto riconducibili a [LA]. Questo fa pensare ad una tradizione speculativa. Abbiamo riportato questo problema per mostrare una sorta di continuità con la tradizione ecclesiastica o universitaria.

Terminiamo questa rassegna con un problema di tipo geometrico:
Ragione 17v 2
A fare de uno quadro uno tondo. Regula a la dicta rason. Poniamo che lo quadro sia braza 6 per quadro. Di' Cossì: 6 via 6 fa 36. Moltiplica 36 per 12 e 4/7, che fa 452 e 4/7. Atrova la radisa de 452 3 4/7, chi è 21 ¼ e tanto serà el tondo del dicto quadrato e nota la figura.

Ma nota che ‘l non se po’ dare drito in brocca che ‘l non li sia, a la simile rasone, alcuna pocha differentia. E chi più li dise a pressa è tenuto meliore maistro.

Il problema consiste nella determinazione del raggio di un cerchio equivalente ad un quadrato assegnato. La formulazione ci sembra interessante per due motivi sostanziali: a partire da un problema relativo ad un quadrato generico, si passa ad una particolarizzazione numerica: si fornisce un così esempio, non un metodo generale. La seconda considerazione si riferisce all’approssimazione proposta: il maestro d’abaco sa che la soluzione non è corretta, ma anzi sfida a trovare una approssimazione migliore, qualificando chi la troverà.

3. Il problema dei sistemi di numerazione

3.1. Aspetti semiotici: lo zero come metasegno

In algebra la variabile è un simbolo che serve per indicare la presenza di un qualunque numero; quindi essa è un segno il cui significato sta in altri segni che però sono assenti nella scrittura. In relazione a questi numeri la variabile è un metasegno, perchè indica la presenza virtuale di un qualunque segno. Come una variabile algebrica, lo zero è un metasegno perchè funziona dualmente: infatti ha un ruolo interno, come numero fra i numeri, ma anche uno esterno, come metasegno che dà l'avvio all'azione di chi conta[5]. Proprio questo suo ruolo di “inizio”, ma senza alcun legame con la procedura del conteggio, lascia aperta tuttora la disputa, anche tra i matematici, sulla sua presenza nell’insieme dei numeri naturali. È come se lo zero imponesse ai numeri un’altra natura, diversa dalla connotazione specifica del conteggio[6]. La connessione semiotica fra lo zero e la variabile emerge allora come una connessione di completamento simbolico: variando su tutti i numeri che un soggetto può ottenere contando, la variabile esegue un'operazione di chiusura alla proliferazione di numeri che vengono in essere con lo zero.
Questo aspetto è evidente nel testo di Fibonacci quando propone la modalità di costruzione morfologica delle stringhe che denotano i numeri. Il ruolo dello zero è diverso da quello delle altre cifre: può infatti essere una chiusura “a destra”, ma non “a sinistra”; e tale diversità incide significativamente nella descrizione del processo costruttivo
Lo zero, con la sua introduzione, rompe il codice in uso fino ad allora diventando l'origine di uno nuovo, creando un modo totalmente diverso di produrre segni; la novità di questo modo consiste nella nascita di un soggetto semiotico capace di significare l'assenza. Il concetto di niente è una fonte ricca e immediata di pensieri paradossali: infatti il segno di niente fa riferimento a un referente che non c'è, dà la condizione d'esistenza a qualcosa che non ha questa condizione.
A livello iconico, un modo di rappresentare lo zero potrebbe essere quello usato dagli antichi babilonesi, che semplicemente per simboleggiare il nulla lasciavano un vuoto fra le due cifre adiacenti; questo metodo però ha il difetto che lo spazio vuoto va a fondersi con la superficie di scrittura, cosicchè se io scrivessi 1   1 invece di 1001, quel segno sarebbe ambiguo e potrebbe significare anche 101 o 10001. Quindi significare l'assenza con l'assenza non è un'opzione valida. Ma che sorta di marca è adatta a simboleggiare il nulla?
Invece di copiare l'assenza con uno spazio vuoto, si potrebbe dipingere un'assenza tramite un simbolo che contenga, al suo interno, questo spazio vuoto, come nel nostro caso. Oppure usare simboli che non avessero alcun apparente legame con il niente, ma che indicassero una mancanza di valore: ad esempio i tardi babilonesi simboleggiavano ciò con un doppio cuneo, mentre i Maya usavano un simbolo simile ad una conchiglia (si veda il paragrafo 4.5.).

3.2. Aspetti filosofici

Tra gli infiniti numeri della nostra numerazione, sicuramente quello che ci provoca più difficoltà è

[5] Come indicato nel paragrafo 4.3., per gli indiani incognite e zero venivano indicati con lo stesso segno.
[6] Vedi paragrafo 4.5. per quanto riguarda l’atteggiamento dei maya.

lo zero: a volte "ostile" per le sue proprietà-funzioni matematiche, ma anche perché rimanda al concetto del nulla che per la nostra mente è ancora un concetto misterioso, inquietante ed a volte difficile da trattare, anche perché è privo di forma e di dimensione.
Le connessioni tra il "niente" e lo zero devono essere ricercate nelle tradizioni culturali classiche, orientali, ebraiche e cristiane, che cercarono di dare, o di rifiutare un significato al niente, influenzando così le reazioni dei vari popoli all'introduzione dello zero.
La prima rappresentazione simbolica dello zero nella storia umana si ha nel sistema di numerazione posizionale babilonese come soluzione del problema del posto vuoto (vedi 4.1.). Tuttavia, come vedremo, quel simbolo dello spazio vuoto aveva solo una connotazione morfologica, non possedeva cioè altre sfumature di significato, ovvero non veniva posto come risultato di una differenza

$$n-n$$

Indipendentemente dalla cultura babilonese, anche il popolo dei Maya introdusse nel suo sistema un simbolo per lo zero (vedi 4.5.). Essi iniziarono ad utilizzarlo sia in posizione intermedia, sia in posizione finale in una sequenza di simboli per aumentarne il valore.
Il declino di queste civiltà causò la perdita di questi concetti e ne impedì lo sviluppo.
Il terzo "inventore" dello zero fu il popolo indiano (vedi 4.3.).
Nel VI secolo d.C. comparve tra gli astronomi la necessità di un sistema di numerazione chiaro e logico, capace di esprimere facilmente anche i numeri molto grandi, per questo nacque la notazione posizionale a base 10, che indusse anche l'uso dell'abaco.
Inizialmente lo zero venne rappresentato come un punto per poi evolversi nel conosciuto simbolo 0.
Come per i Maya ed i Babilonesi questo indicava uno spazio vuoto, ma la grande innovazione fu che ben presto diventò una cifra che definiva il risultato di operazione come:

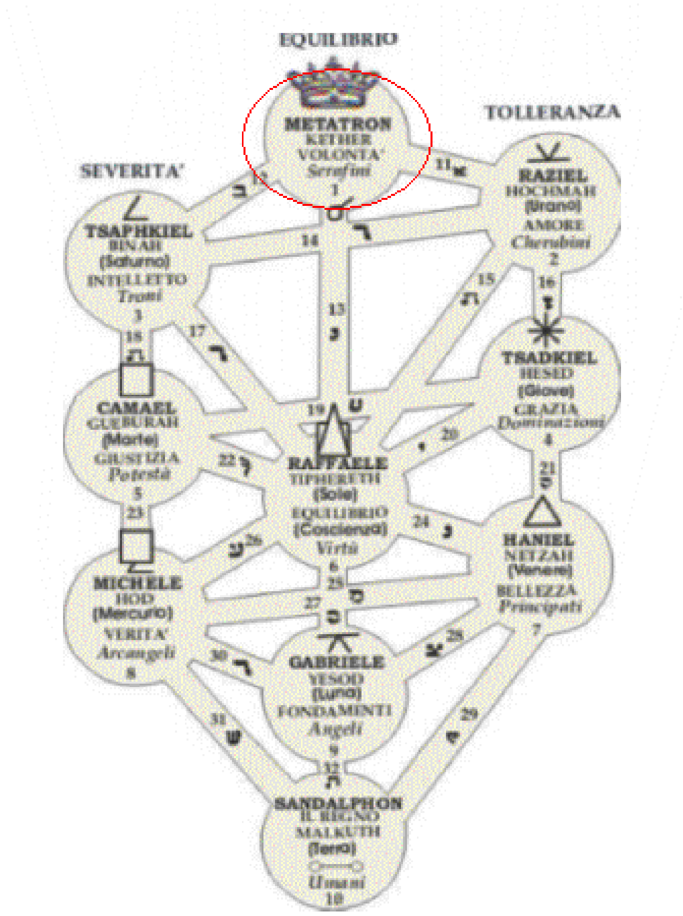
$$n-n=0$$
$$n*0=0$$
$$n+0=n$$
$$n-0=n$$

Il passaggio significativo, che in [LA] è evidenziato mediante la descrizione di procedure, è quello dai numeri naturali come oggetti "del contare", all'insieme dei numeri naturali strutturato con operazioni. È il ruolo dell'operazione che rende necessaria una rappresentazione efficace la quale a sua volta permetta di passare per il calcolo dall'uso di strumenti "fisici" come l'abaco[7] a strumenti concettuali come la rappresentazione simbolica.
Nel 628 d.C. l'astronomo indiano Brahmagupta definì l'infinito come il numero che si ottiene dividendo per zero qualsiasi altro numero (vedi 4.3.). Questo comportò il sorprendente fatto che lo zero, in India, assunse il significato di molteplici concetti, iniziando ad avvicinarsi ad una sfera di significati filosofici. Riprenderemo questo aspetto nel paragrafo 4.3., ma intanto vale la pena sottolineare come lo zero diventi numero e per essere tale deve avere una connotazione semantica che gli permetta di dare un significato ai risultati ad esso collegati. Così lo zero rappresentava alternativamente il più piccolo ente geometrico, l'intero universo a partire dal quale tutte le cose possono essere create, l'atmosfera, l'etere, l'immensità dello spazio, un punto, la volta del cielo, ma anche un buco, il vuoto, l'irrilevanza ed il non essere. Lo zero era il nulla da cui poteva derivare ogni cosa, in quanto da infiniti punti nasce una retta che può generare piani, i quali, con il loro moto, possono generare l'intero spazio tridimensionale.
Il sistema di numerazione indiano rappresenta probabilmente l'innovazione intellettuale di maggior successo che venne adottata in modo universale. Quando i cinesi vennero a contatto con l'India nel VIII sec. adottarono il simbolo dello 0. Questo sistema fu adottato anche nella cultura ebraica e giunse in Europa tramite la cultura araba, passando principalmente dalla Spagna (vedi richiami in 1.2.)

Ma perché gli antichi greci, pur essendo i creatori della logica e della geometria che sono alla base

[7] A sua volta condizionato, come tutti gli artefatti, dai vincoli specifici della sua limitatezza.

di tutta la matematica moderna, non introdussero mai il simbolo dello zero?
La tradizione greca fu radicalmente contrapposta a quella dell'estremo oriente: mentre in India lo zero poté essere introdotto senza forzare nessuna posizione filosofica, in Grecia questo non fu possibile. Già con la filosofia di Pitagora e la rappresentazione grafica dei numeri, la cultura greca rifiutò di considerare il non Essere come qualcosa, come una parte del pensiero logico. Per poi giungere alla filosofia di Parmenide secondo cui lo spazio vuoto non può esistere in quanto si può pensare solo qualcosa che è, e ciò che non è non può neppure essere pensato. Il concetto di zero si scontrava con uno dei principali assunti della filosofia occidentale, una posizione che affondava radici nella numerologia pitagorica e la cui importanza derivava dai paradossi di Zenone. In accordo con essi, la matematica Euclidea fu concepita come composta da elementi statici, negando un qualsiasi ruolo al moto anche in termini di definizioni; infatti la circonferenza è formata da infiniti punti equidistanti da un punto, non dal cammino di un unico punto in movimento che rimanga sempre equidistante da un altro punto. La loro concezione era strettamente legata agli oggetti fisici: infatti vedevano il numero x come un segmento di lunghezza x, x^2 come l'area di un quadrato di lato x, x^3 come il volume di un cubo di lato x, e difficilmente riuscivano ad immaginare x^4 o x^5 non riuscendo ad assegnare a queste "scritture" un significato geometrico. Come si è evidenziato anche nella traduzione del [LA] riportata nel paragrafo 1.2., la premura nel dichiarare collegamenti di tipo geometrico è indice di questo raffronto a sua volta legato all'esigenza di fornire significati culturalmente condivisi agli oggetti proposti in ambito aritmetico. Entro questa visione visuo-spaziale, per i greci sarebbe stato difficile accettare entità come i numeri negativi o l'astrazione algebrica, opposta alla costruzione geometrica, o lo zero come segno che indica l'assenza. In breve, la reazione greca al vuoto, al niente, era una reazione di diniego psicologico.
La tradizione cristiana, erede sia di quella ebraica che di quella greca, unisce in essa un insolubile contrasto: per i Greci le divinità furono solo gli architetti del cosmo, perché "lavorarono" su qualcosa che comunque esisteva già, mentre nell'Antico Testamento Dio creò il mondo dal nulla.



Nella cultura ebraica bisogna innanzitutto separare due campi all'interno del discorso teologico, quello metafisico e quello morale, ovvero bisogna distinguere le dottrine esoteriche del misticismo giudaico dal razionalismo filosofico degli studi rabbinici, concentrati sull'interpretazione della Parola di Dio. Dalla mentalità rabbinica emerge poco o niente riguardo il niente, perchè differisce poco dal pensiero cristiano; infatti sembra non essersi mossa al di fuori dei dibattiti fra neoplatonismo e aristotelismo e ai dubbi concernenti gli attributi di Dio.
L'essere e il "niente" vennero ad essere significati nella speculazione mistica della Cabala, la tradizione scritta e orale del pensiero mistico esoterico ebraico, anche se per più di mille anni i cabalisti avevano evitato il niente a favore della credenza di una presenza ininterrotta e piena di Dio. Ma con la Cabala di Mosè de Leon alla fine del XIII secolo questa credenza cambiò. Fra le molte cose di cui questa opera tratta ci interessa lo schema teofisico dell'assenza e presenza di Dio. Infatti cerca di spiegare come l'assoluto Dio sia connesso al mondo relativo, il

mondo della natura e dei sensi. Dio viene definito come l'assenza di ogni presenza diversa da quella originatasi dal niente, e ciò viene simboleggiato dalla *kether*, la suprema corona nell'Albero della vita, il diagramma della creazione, che rivela la dinamica di Dio come originante. E' forse il *kether* uno zero teosofico? Esso è una "corona ", che indica qualcosa al limite fisico dell'estensione spaziale, o una "corona cava" o "punto fondamentale"e, con le sue dirette connessioni ideografiche con lo zero attraverso cerchi ed anelli, cerca la minima presenza grafica di un punto. Inoltre esso ha le stesse funzioni semiotiche dello zero, poiché nell'Albero della vita ha una posizione iniziante unica, distinta da quella degli altri nodi, essendo l'origine creativa dell'intero sistema. Al principio del pensiero cabalistico, i vari nodi dell'Albero apparivano semplicemente come numeri, forse derivati dalla numerologia pitagorica, e lo zero naturalmente non era fra questi numeri. Gli ebrei spagnoli del XIII secolo, col loro ruolo di mediatori fra la cultura araba e quella cristiana, non poterono rimanere insensibili alla novità semiotica portata dallo zero, che allora cominciava a diffondersi anche in Europa. Infatti il *kether*, segno dell'assenza degli altri nodi, è semioticamente simile allo zero. Questo simbolo diventerà l'icona di un Dio che creò Se stesso e il mondo da un niente assoluto.

La Chiesa, erede di queste due culture, fu costretta ad accettare il nulla come entità poiché la Terra era stata creata da Dio manipolando il niente; comunque esso rimase un qualcosa di irreale. Sant'Agostino invece identificò il niente col Diavolo, dando così una connotazione malefica a ciò che Aristotele aveva negato con tanta veemenza. Il niente era lo stato ultimo di degrado, qualcosa da cui era stata tolta tutta la pienezza che Dio vi aveva inculcato. Ciò spiega anche la grande avversità della Chiesa nei confronti del sistema decimale: questa avversità fece sì che dal decimo al tredicesimo secolo questo sistema rimanesse relegato nelle nazioni arabe. Ma di fronte al crescente interesse per il nulla e il simbolo usato per rappresentarlo, la Chiesa dichiarò che la trattazione del niente avrebbe portato a conseguenze blasfeme e ateistiche; tuttavia questa fascinazione per il nulla si salvò dall'etichettatura di blasfemia finché rimase confinata nel mondo dei numeri.

Alla base di questa accettazione vi sono indubbiamente ragioni storiche: il processo di progressiva laicizzazione della cultura trova il suo paradigma nella concezione etica e culturale del mercante. L'introduzione degli strumenti di calcolo si giustifica sul piano dell'etica mercantile, ritenuta pertanto legittima in un ambito separato da quello della riflessione teologica.

Si tratta quindi di capire quali posizioni filosofiche potessero far nascere perplessità nell'accettazione dello zero, ma anche quali potessero averlo favorito. Si parla di un'accettazione che evidentemente non si limita a quella dell'utilizzo meccanico, che può esistere al di là di una consapevolezza giustificata. O meglio, seguendo anche [LA], si tratta di capire a quali livelli sia avvenuta.

Come abbiamo detto, c'è una accettazione su basi pratiche e funzionali; ma oltre a queste si possono collegare anche condizioni di carattere filosofico.

La filosofia greca aveva certamente riconosciuto la perfezione con la finitezza, ma aveva trattato il tema del nulla non semplicemente come non essere (Parmenide), ma come alterità. Platone aveva, come è noto cercato di conciliare essere e divenire, e compiendo una specie di parricidio nei confronti di Parmenide, ammette l'essere del non Essere: questo coincide con la negazione dell'Essere determinato e il riferimento a un altro genere dell'Essere.

Nello stesso senso la materia è caratterizzata da Agostino. Il vescovo di Ippona caratterizza anche il male come segno dell'assenza di bene, dunque come qualcosa privo di sostanzialità.

Già Scoto Eriugena, esponente di spicco della Rinascenza carolingia, aveva identificato Dio con il nulla, perché Dio è superessentia (al di sopra della sostanza): poiché è assoluta trascendenza, egli non è afferrabile, è ineffabile e pertanto indicibile . Egli risente dell'influenza neoplatonica ed elabora una teologia detta negativa, che viene frequentemente ripresa nel Medioevo: come niente o "nulla del nulla", "quintessenza del nulla" viene indicato Dio nel Zohar uno dei libri della Cabala. Dio viene definito come un "nulla superessente" da Maestro Eckhart, esponente della mistica tedesca che insegnò in varie università europee nei primi decenni del Trecento e fu accusato di eresia proprio per questa teoria.

Se la reazione al sistema metrico decimale è ostile, ciò non ci stupisce, se si considera il generale clima di rifiuto che coinvolse le traduzioni dei testi aristotelici e dei suoi commentatori arabi e ebrei. Queste opere, e in particolare la fisica aristotelica, provocano in un primo momento un irrigidirsi della Chiesa sulle sue posizioni tradizionali e un ritorno ad Agostino. D'altro canto, un conto sono gli argomenti ideologici, un altro sono quelli culturali: la fisica aristotelica, il cui insegnamento era proibito, presentava dei principi e dei concetti così fecondi per la spiegazione dei fenomeni naturali, che appare impossibile frenarne la diffusione. Osserviamo inoltre che, anche se era proibito insegnare ciò che era ritenuto blasfemo, non lo era il combatterlo, e per combatterlo, bisognava conoscerlo e farlo conoscere. Non c'è da meravigliarsi perciò che maestri tanto severi nel combattere il nuovo orientamento culturale, come Guglielmo d'Auvergne per esempio, abbiamo conosciuto bene l'aristotelismo e abbiamo contribuito alla diffusione dei testi arabi.
Se si guarda invece allo zero come oggetto matematico (vedi paragrafo 3.3.), diventa chiaro il peso che può avere avuto, nel periodo della scolastica, la disputa sugli "universali", che ha caratterizzato in modo pregnante e costante la speculazione di quel periodo.
In filosofia per "universali" si intendono quei concetti generali che possono venir riferiti a più individui o cose. Interrogarsi sul problema degli universali significa interrogarsi sul potere della ragione pura e sulla validità degli strumenti intellettuali di cui essa si serve per parlare del mondo.
La discussione si svolgeva tra le due parti estreme: il realismo e il nominalismo. La prima affermava un'esistenza a priori dei concetti, che poi si manifestano nel mondo reale, la seconda afferma che gli universali siano solo nomi senza corrispondenza effettiva nel reale, fatto di individui.
Queste due posizioni si conciliano nel pensiero di Tommaso d'Aquino. Nella sua speculazione, gli universali esistono a priori solo in Dio, mentre si configurano nella realtà come forme o strutture degli individui; da qui vengono colte dall'intelletto umano e diventano concetti astratti.
L'universale quindi non esiste nelle cose ma soltanto nell'intelletto ed è un segno mentale che raccoglie in una stessa classe una serie di individui che hanno tra loro caratteristiche affini. Il valore e la portata di questa posizione sono notevoli: in questo modo il nominalismo, rifiutando la non sostanzialità delle forme e assimilando i concetti generali a simboli astratti di realtà puramente individuali, introduce il divario tra logica e realtà.
Considerando la forza dell' "ipse dixit" nella società medievale, diventa comprensibile come una tale posizione abbia costituito grande motivo di perplessità per l'accettazione dello zero: la domanda diventava infatti: sotto quale forma o struttura può lo zero venire percepito dall'intelletto?
Infine, sempre nel pensiero di Tommaso d'Aquino viene sintetizzata un'altra concezione che può aver contribuito ai dubbi sull'accettazione di cui si è parlato; egli ammetteva infatti la dottrina platonico-agostiniana della non sostanzialità del male. Ricollegandosi in questo modo fortemente alla patristica, Tommaso sviluppa la concezione del male come mancanza di bene, come mancanza di Essere. Si dà quindi una connotazione morale al non Essere, una connotazione fortemente negativa. Il male si trova in tutti i gradi inferiori di essere che appaiono deficienti e quindi cattivi rispetto ai gradi superiori.
L'accettazione dello zero, quindi, portava con sé anche un problema di carattere morale.

Le difficoltà evidenziate dagli abachisti nell'accettazione dello zero riflettono questo humus culturale: per loro, il fatto che una fila dell'abaco fosse vuota, semplificava solo le cose perché c'erano meno numeri da scrivere, mentre coi numeri arabi alla fila vuota corrispondeva lo 0, cioè la manifestazione dell'assenza di una potenza del dieci. Questo doppio significato del concetto di "mancanza" creava confusione agli abachisti, ma è importante sottolineare come questa confusione fosse legata ad un conflitto, ad una sovrapposizione di significati: se una fila d'abaco era vuota, questo comportava l'assenza di numeri da scrivere, indice a sua volta di assenza di cose (il nulla era manifestazione visuale della mancanza), mentre la presenza dello zero evidenziava l'assenza di una potenza di 10 e quindi di un numero, spostando in questo modo il relativo livello di astrazione. In pratica, si trattava di "mettere qualcosa" per evidenziare non l'assenza di oggetti, ma l'assenza di "qualcosa" che indicasse gli oggetti. Era normale che questa sovrapposizione di piani creasse

difficoltà, poiché spostava la modalità di manifestare l'assente indicata dallo zero.
L'opposizione degli abachisti potrebbe essere vista, ad una prima lettura, su un piano pratico, ma al profondo è invece il segno di difficoltà concettuali, relative al significato degli strumenti usati (come l'abaco) o dei simboli coinvolti (come la cifra 0).

3.3. Aspetti epistemologici: lo zero come oggetto matematico.

L'uso dello zero porta con sé alcune difficoltà che derivano dall'interpretazione fisica che se ne dà in un sistema che veda interpretati anche altri numeri naturali.
In una concezione dei numeri naturali non consapevole, questi termini matematici erano visti come oggetti fisici e reali a tutti gli effetti; si pensi per esempio alla concezione pitagorica: i numeri come punti, in una visione fisico-geometrica di tali termini. E tale concezione è sicuramente intuitiva, giustificabile, ma, nel sistema culturale che dalla speculazione filosofica greca prende le mosse, ha determinato da una parte, appunto, la tarda acquisizione dell'uso dello zero, e dall'altra, forse, la difficoltà di una, almeno inizialmente, completa sua accettazione culturale. Ovviamente, questo è un discorso che si lega profondissimamente con il problema della rappresentazione, sebbene non ne sia imprescindibile; sostanzialmente, infatti, l'uso dello zero è stato introdotto per permettere il sistema posizionale.
In precedenza, già la rappresentazione ci "mostrava" numeri-oggetto: perciò X era 10, C era 100, M era 1000. Con questo sistema, la possibilità di rappresentare ogni numero naturale comporterebbe la necessità di un numero infinito di simboli, perché infiniti sono tali numeri. Ma il numero limitato di simboli non è l'unico vantaggio apportato da una scrittura posizionale, che invece si dimostra utilissima nei calcoli; fatto che appare evidente anche pensando alla possibilità di confronto tra numeri. La rappresentazione posizionale è, se vogliamo, una rappresentazione quasi descrittiva del numero stesso; pensiamo al numero la cui rappresentazione è 123; tale scrittura, che è univoca, corrisponde al numero che è costituito da 1 "cento", 2 "dieci" e 3 "uno"; diventa se non altro meno intuitivo vedere in tali scritture degli oggetti reali, come invece poteva essere per i simboli X, M, C; tuttavia, tale concezione di numero-oggetto ha evidentemente continuato a sussistere, indubbiamente per la tradizione culturale su cui la scrittura posizionale si inseriva.
Anche dopo questo discorso, può essere legittimo chiedersi perché la concezione numerica precedente non avesse partorito un simbolo-oggetto che corrispondesse al numero-oggetto dello zero; la risposta a tale domanda è probabilmente il punto cruciale della questione, che ha determinato anche tutte le successive perplessità nell'accettazione culturale del concetto. Se il numero è davvero oggetto fisico (facciamo ancora riferimento, ad esempio, alla visione pitagorica), come è possibile che esista un numero che sia "mancanza"? Nell'incapacità di distinguere tra linguaggio e semantica, ammettere l'esistenza dello zero, sarebbe stato ammettere l'esistenza della "mancanza", di un non punto, di un non Essere. E qui, come visto in precedenza, la fortissima tradizione filosofica greca, a partire da Parmenide, fino ad Aristotele, ha costituito un grandissimo ostacolo culturale ad un cambio di paradigma.
Si noti che nella scrittura posizionale lo zero non assume, in funzione di una semplice facilitazione di calcolo, dignità di ente, di oggetto (e questo ha permesso forse il suo iniziale diffondersi[8]); in ogni caso, in tali circostanze, assume quasi sempre interpretazione di "mancanza relativa". Nella scrittura 102, ad esempio, lo zero indica che il numero è costituito da una mancanza di "dieci", sebbene sia costituito anche da un "cento" e due "uno". A questo proposito può essere interessante notare che anche al giorno d'oggi non è raro notare un atteggiamento di non considerazione dello zero quando questo diventa "mancanza totale"; si prenda in considerazione per esempio l'algoritmo della divisione come viene insegnato alle elementari; capita che, nella parte della sottrazione, in caso di resto nullo, invece di riportare uno zero venga naturale di lasciare uno spazio vuoto, o, al limite, tracciare una sbarretta oppure nella moltiplicazione, in cui le successive moltiplicazioni sono distanziate da sbarrette e non da zeri; per non parlare delle assenze sul registro, in cui è più facile che un insegnante metta una sbarretta in caso di mancanze di assenze, al posto dello zero. Questo è

[8] Per la distinzione dello zero dalle altre cifre si veda il cap. 4.

probabilmente dovuto all'eredità che ci è stata lasciata da secoli di stratificazioni culturali. Un retaggio che probabilmente emergerebbe negli studenti più giovani anche dalle risposte che verrebbero fornite alla domanda "cos'è lo zero?".
Solo alla luce di un lungo percorso storico che ha portato alla totale separazione di linguaggio e semantica, lo zero è diventato un oggetto matematico; un termine di un linguaggio che è legato agli altri termini da determinate relazioni e che, in un modello reale, viene interpretato e quindi "funziona" come una mancanza di oggetti.
Resta da capire il motivo per cui, sin dal mondo greco, la società occidentale ha continuato a sviluppare una riluttanza ad accettare il concetto di mancanza (si pensi, per analogia, anche all'horror vacui); una riluttanza che invece non ha caratterizzato per esempio le culture orientali, da cui appunto proviene l'uso dello zero; certo, la questione non è facile. Innanzi tutto, è verosimile che al concetto di mancanza venisse associato quello del "non Essere" parmenideo, su cui di conseguenza, si può spostare il discorso. Probabilmente si può vedere nel rifiuto dell'accettazione del "non Essere" il rifiuto di qualcosa che non può essere verificato, su cui l'uomo non può esercitare il suo dominio. E in un clima, come quello greco, di piena fiducia nelle possibilità dell'uomo sulla realtà, sulla natura, questo rifiuto diventa comprensibile. Questa lettura, infine, giustificherebbe anche il motivo per cui civiltà con un senso di maggiore precarietà rispetto alla loro condizione, (come le popolazioni del sud america; si veda il paragrafo 4.5.) utilizzassero lo zero. Di uno zero, certo, che rimaneva lontano dall'essere oggetto matematico.

4. La multiculturalità: culture a confronto

Cos'è la matematica? È un linguaggio universale? È una costruzione dell'uomo? È un fenomeno socio-culturale?
Non è questo il contesto per fornire delle risposte, ma ci premeva evidenziare alcuni aspetti che sono emersi dal nostro percorso in una prospettiva più ampia.
A partire dall'introduzione del sistema di numerazione posizionale, la nostra attenzione non poteva non spostarsi sullo zero, visto soprattutto come concetto. Se [LA] può essere considerato un ponte culturale, ci è sembrato interessante accennare a come mai altre culture hanno sviluppato ciò che invece in occidente ha trovato difficoltà ad affermarsi.
Se la matematica utilizza un linguaggio universale, il nostro lavoro ci ha fatto prendere coscienza di come possa essere radicalmente diversa la modalità con cui vengono accettati e esplicitati i suoi concetti. È come se sulle culture fosse tirata una rete e che ciascuna ne interpretasse in modi diversi i diversi nodi; ma la metafora della rete favorisce anche la percezione che la matematica possa diventare un fertile terreno di confronto fra culture. La diversa declinazione dei concetti evidenzia in modo lampante le diverse epistemologie; ed è su queste che avviene il confronto sulla conoscenza.
Nella parte seguente non vogliamo ripercorrere la storia della matematica nei vari contesti (cosa del resto reperibile in più testi), quanto limitarci a evidenziare, seppure sommariamente, gli aspetti riconducibili allo zero. È un semplice esempio, ma è anche la speranza che possa essere fonte di riflessioni successive.

4.1. La civiltà babilonese

Ci sembra doveroso aprire questa rassegna con i babilonesi. Com'è noto, la numerazione babilonese è in base 60 (da cui derivano le attuali misure degli angoli, oltre che le frazioni delle ore in minuti e dei minuti in secondi) ed è caratterizzata da un sistema posizionale.
Nella cultura babilonese lo zero non compare come simbolo per indicare una quantità nulla, quanto viene introdotto per ovviare ad un difetto di chiarezza. Nelle tavole più antiche infatti lo zero è indicato con uno spazio, notazione che induceva a errori: un numero la cui cifra centrale è 0 poteva essere letto come due numeri separati.

La cosa per noi significativa della numerazione babilonese è che mette bene in evidenza la differenza tra significati (diversi) e forma. Un simbolo che rappresenti lo zero ha una valenza sul piano della chiarezza di rappresentazione (più che su quello della rappresentazione, come succede per le cifre arabe) ed il suo significato si limita a quello di mancanza di potenze di 60, così come nella numerazione decimale è mancanza di potenze di 10. manca invece il significato numerico, cioè come indicatore ad esempio di una cardinalità.

Come visto, in [LA] si privilegia l'aspetto formale e morfologico, legato a sua volta alla presenza di potenze di 10, evidenziando altresì la difficoltà nella introduzione del suo ruolo numerico.

La numerazione babilonese scopre la potenza della notazione posizionale, ma induce, anche nelle culture successive, una difficoltà nell'accettazione del nulla sostanziale.

[1 ; 0 ; 45]

$$(= 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 45 = 3645)$$

4.2. La civiltà greca.

La matematica come disciplina organizzata, indipendente e ragionata non esisteva prima del periodo classico greco dal 600 al 300 a.C.

Come è noto, la matematica greca, che ha visto nella geometria il suo massimo splendore, fonda le sue radici nella tradizione egizia e babilonese, pur andando molto oltre sul piano dei sistemi ipotetici- deduttivi. La letteratura in proposito è ricca e qualificata.

Ci limiteremo ad evidenziare come, nonostante le sue numerose scoperte, la matematica greca sia messa in crisi da numerose domande senza risposta, come la comparsa degli irrazionali e la gestione dell'infinito. La loro attenzione per la speculazione e la precisione deduttiva è vista, secondo (Menninger, 1969) non solo come pregio, ma anche come potenziale limite: se i Greci fossero stati meno preoccupati dalla logica e dalla precisione, avrebbero potuto casualmente operare e accettare i numeri irrazionali, come avevano fatto i Babilonesi e come faranno le civiltà successive ai Greci. Questa è chiaramente una visione utilitaristica della matematica, ma come abbiamo visto ha le sue buone ragioni per essere proposta.

Come evidenziato anche nel paragrafo 3.2. la filosofia greca, a partire da Parmenide e Zenone[9] ha posto seri ostacoli all'affermazione dello zero come concetto.

In particolare, con Zenone diventa molto stretto il legame tra lo zero, manifestazione formale dell'infinitamente piccolo, e l'infinito. Il legame tra i due concetti e l'avversione manifestata dalla cultura greca nei confronti dell'infinito in atto, ha portato probabilmente ad allontanare questi due concetti estremi dalla filosofia occidentale.

Questa avversione ricalca probabilmente il pensiero di Aristotele, che è stato determinante per tutto lo sviluppo filosofico successivo, e che ha lasciato una fortissima tradizione culturale fino ai giorni nostri. Nel libro "Fisica" Aristotele tratta il tema dell'infinito affermandone l'esistenza solo in termini di potenza[10]. L'infinito, a differenza del finito, non esiste di per sé, ma si configura come la possibilità di aumentare una grandezza indefinitamente. Questa concezione nega quindi un infinito in atto e di conseguenza rende molto difficile la possibilità di concepire lo zero come oggetto: esso si configurerebbe infatti a sua volta come infinitesimo in atto e diventa quindi comprensibile l'avversione nei suoi confronti in un contesto culturale caratterizzato in modo pregnante dal pensiero aristotelico.

Alcuni segnali di manifestazione macroscopica di questa distanza si riscontrano anche nei secoli successivi all'opera di Fibonacci e non è difficile trovarne echi anche nella cultura contemporanea. A parte le manifestazioni "quotidiane" legate alla difficoltà nella gestione dello zero, (e ricordate in

---

[9] Con i suoi paradossi, rafforza l'idea della la non esistenza del vuoto, affermando ad esempio che uno spazio finito era composto da infinite unità che impediscono quindi il crearsi del vuoto.

[10] *In verità capita che l'infinito sia proprio il contrario di quel che si dice. Difatti, l'infinito non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma ciò al di fuori di cui c'è sempre qualche cosa.* (Fisica, III, 6, 207°)

altre parti di questo lavoro) che si configurano tecnicamente come ostacoli epistemologici, cioè ostacoli (secondo la definizione di (Brousseau, 1983)) intrinsecamente legati all'oggetto di conoscenza, citiamo a titolo di esempio la posizione dello scrittore argentino J. L. Borges in (Borges, 1984).
Ciò che però ci interessa maggiormente è un interrogativo la cui risposta è ancora oggi parzialmente in sospeso: come i Greci abbiano preso contatto con la cifra "0". La spiegazione più diffusa è che la cifra derivi dalla lettera greca omicron, prima lettera della parola niente scritta in greco. Una seconda ipotesi sostiene che gli antichi Greci avrebbero potuto derivare lo zero dal fatto che la natura ci offre esempi in abbondanza di vuoti circolari, da una bocca aperta al disco oscuro della luna nuova. La domanda che sorge è: "Perché lo zero è quasi assente negli scritti greci di argomento non astronomico?". La sua singolare assenza negli scritti può significare o che i Greci abbiano voluto stendere un velo su questo numero che non enumera o che le sette matematiche fossero custodi di tradizioni occulte riguardanti lo zero.

4.3. La civiltà indiana

Un esempio di proficua interazione e integrazione in ambito matematico, è l'incontro tra la cultura greca e quella indiana. La matematica si sviluppò solo a partire dall'800 a.C. nonostante la civiltà indiana fosse sorta già nel 2000 a.C. A partire dal 300 a.C. comparvero anche i primi numeri che però variarono continuamente da un secolo all'altro. Si può però notare che i numeri indiani prevedevano già un singolo simbolo per ogni numero da 1 a 9 come per esempio nella scrittura Brahmi, mentre lo zero ancora non era presente. Solo dopo il 600 d.C., però, in sistema in base 10 divenne di uso corrente e non occasionale, anche in considerazione delle influenze derivanti da Alessandria d'Egitto, dalla Babilonia e forse anche dalla Cina.
Per quanto riguarda lo zero nella cultura indiana sappiamo con certezza che era presente, mentre non conosciamo se sia arrivato dalla civiltà greca (in particolare alessandrina, dove era utilizzato come una vera e propria cifra per indicare la mancanza di numeri) o da quella babilonese.
Indubbiamente la sua scoperta e accettazione è stata aiutata dalla presenza del concetto di nulla nella filosofia Indu. Nell'induismo infatti il raggiungimento del Nirvana consiste nell'ottenere la salvezza fondendosi per l'eternità col nulla.
Gli indiani rappresentavano lo zero con un punto ed è da notare come fosse lo stesso simbolo utilizzato per indicare un'incognita. L'ambiguità notazionale diventava così ambiguità di connotazione: idea dell'assenza di ogni numero o numero per l'idea di assenza? La domanda nasconde la doppia natura, linguistica e metalinguistica, relativa allo zero. Nel primo caso, si parla di simbolo a cui viene attribuito un significato riguardante i numeri; nel secondo, lo zero diventa oggetto matematico che esprime un significato relativo alle cose. In pratica, nel primo caso la sua nozione sarebbe rimasta distante dai numeri, nel secondo si sarebbe aggiunta a loro su un piano di parità; in questa dicotomia si evidenzia la difficoltà del passaggio, comunque avvenuto in India, dallo zero come cifra allo zero come numero ed manifesta nei diversi modi con cui veniva chiamato (*Pujyam* ,che significa anche "divino", *Shunyam* e *Bindu*).
L'affermazione dello zero come numero deve passare attraverso la descrizione delle sue proprietà formali, cosa che viene proposta da Brahmagupta nel trattato *Brahma-sputa-siddhanta* (628 d.C.), che tradotto significa "*l'apertura dell'universo*", in cui descrive il significato del numero zero, oltre a introdurre i numeri negativi e fornire il metodo per risolvere alcuni tipi di equazioni. Sul piano più strettamente concettuale, fornisce le proprietà sintattiche relative alle operazioni aritmetiche.
Terminiamo questa parte segnalando come circa 500 anni dopo un altro matematico indiano, Bhaskara, ha continuato gli studi di Brahmagupta, estendendo le proprietà coinvolgenti lo zero ad altre operazioni (come ad esempio $0^2=0$ e $\sqrt{0}=0$). Bhaskara ha anche cercato di ridefinire il comportamento dello zero nella divisione; ad esempio afferma che: "*Una quantità divisa per 0 diventa una frazione il cui denominatore è 0. Questa frazione rappresenta una quantità infinita. In questa quantità non vi è alterazione nel caso che altre quantità vengano immesse o estratte; così come non vi è cambiamento nell'infinito e immutabile Dio quando i mondi vengono creati o*

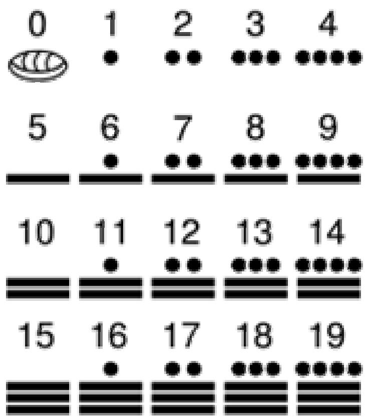
distrutti. In altre parole, Bhaskara afferma che $n\div 0=\infty$.
Al di là delle incongruenze operazionali legate alla divisione per 0, siamo in presenza di una sorta di legittimazione dell'infinito attuale, cosa impensabile per la cultura greca e per buona parte della cultura occidentale almeno fino al XIX secolo. Seppure quindi sia manifesto come l'occidente abbia accolto nel medioevo buona parte degli aspetti tecnici legati alla numerazione indiana, le prerogative peculiari dell'epistemologia specifica impediscono di sviluppare "derive" in forma attuale dell'infinito e dell'infinitesimo.

4.4. La civiltà araba

Dopo la fine dell'Impero Romano d'Occidente, la cui cultura scientifica fu sempre modestissima, e la conseguente definitiva divisione tra Oriente e Occidente, iniziò una fase di straordinario sviluppo della cultura e della scienza da parte degli arabi, che ha il suo fulgore nei secoli IX, X, XI e XII, dopo i quali seguì la loro decadenza e il "testimone" ripassò all'Occidente. Questo sviluppo fu tale da poter parlare di *due rinascimenti* – quello arabo e quello europeo-occidentale. Il rinascimento arabo precedette quello cristiano e favorì la conquista non solo politica, ma anche della civiltà, della scienza e della filosofia greca, sentendosi così a tutti gli effetti il continuatore del mondo ellenico.
Questo atteggiamento seguì ad una fase di ricezione passiva da parte dell'Islam delle scienze greche e indiane, preoccupandosi soltanto della traduzione in arabo dei testi di cultura (utilizzando spesso il siriano come anello di collegamento).
Lo scienziato arabo era innanzi tutto uomo di cultura e quindi al contempo filosofo, matematico, astronomo, fisico, medico, storico, geografo e poeta.
Gli Arabi studiarono, reinterpretarono e rielaborarono la cultura greca e indiana sotto innumerevoli aspetti. Sotto il profilo scientifico furono influenzati soprattutto dalle opere greche di Euclide, Tolomeo, Galeno, Archimede, Apollonio, Erone e Diofanto; assimilarono dagli indiani il sistema numerico di notazione posizionale decimale.
La cultura araba ha permesso all'occidente di venire a contato con altre culture (come quella indiana) e soprattutto con altre forme di numerazione.
Per quanto riguarda lo zero, fu desunto dalla civiltà Indu, con cui i musulmani erano in contatto grazie alla vastissima zona di influenza che gli stessi Arabi avevano conquistato, che si estendeva dalla Spagna fino all'India. Le conoscenze matematiche a riguardo sono esposte in particolar modo dal matematico Al-Khwarizmi.
Nella cultura araba il concetto di zero assunse il significato di vuoto, non essere ma anche di universo ed immensità dello spazio. Se le radici culturali sono riconducibili all'idea di "alteralità" presente nella cultura greca ed evidenziata nel paragrafo 3.2., è altresì evidente come il concetto di zero così inteso non trovò ostacoli in questo contesto, come invece accadde nel mondo greco.
In questo modo l'Europa medievale entrò in contatto con le conoscenze matematiche che, grazie all'opera di grandi uomini come Gerberto d'Aurillac e Fibonacci, diventarono la colonna portante del sapere in Occidente.
Un interessante indicatore degli scambi culturali è dato dalle parole con cui vengono indicati i vari concetti. Per quanto riguarda lo zero, quando gli arabi si appropriarono della numerazione indiana tradussero il termine *sunya* con il termine arabo *sifr* che significa appunto "vuoto", "nulla". Quando la numerazione araba fu introdotta in Italia, il termine arabo *sifr* fu latinizzato in *zephirum,* (si veda [LA]), e successivamente italianizzato in *zero*.
In Germania, invece, Giordano Nemorario trasformò *sifr* nel termine *cifra* e questa traduzione è più legata ad una assonanza fonetica che semantica. Anche nel nord Europa la reazione popolare verso la nuova numerazione non fu favorevole e fu guardata con sospetto, come si può intuire dal fatto che con il termine cifra si indicava un "segno segreto", significato ancora rintracciabile nella parola *decifrare*.

4.5. La civiltà Maya

Fino ad ora si è parlato di contesti culturali legati al mondo europeo e quindi in contatto più o meno diretto tra loro. Seguendo però la metafora della rete, ci sembra interessante anche accennare ad una realtà culturale molto lontana e priva di contatti con le culture di cui abbiamo parlato.
La cultura Maya fiorì all' incirca tra il 300 a.C. e il 900 d.C. nella penisola dello Yucatan, e ovviamente non subì alcuna influenza da parte di tradizioni sviluppatesi al di là dell'oceano.
Ciò che emerge è la fertilità nell'invenzione di simboli e, per quanto ci riguarda, è una preziosa testimonianza di un'origine indipendente del concetto di zero e dei segni corrispondenti.
Volendo utilizzare un paradigma di lettura, potremmo dire che la loro base culturale sia costituita dal tempo che diventa sostanzialmente l'oggetto dei loro calcoli.
I Maya registravano infatti scrupolosamente le date degli eventi importanti in base al loro giorno zero, in quello che gli archeologi hanno chiamato Lungo Conteggio. Se per esprimere un lasso di tempo non era necessario ricorrere all'ultima unità, i giorni, i Maya avevano cura di indicare la loro assenza con un apposito simbolo di zero: per loro non era in gioco soltanto la precisione, ma anche un impulso di natura formalistica e rituale, testimoniata dalla presenza di ben tre calendari, ciascuno con valenze diverse[11].
Ciò che interessa più propriamente il nostro discorso è che sia nel calendario solare, relativo alla gestione delle stagioni (*tun*), che di quello civile (*Haab*), il primo giorno di ogni mese fosse indicato con lo 0 e non con 1. Questa scelta aveva ben specifiche motivazioni: nel calendario *Haab*, ad esempio, era nel giorno zero che il dio del mese precedente deponeva il suo “fardello”, e il dio del nuovo mese era in attesa di raccoglierlo. Si trattava quindi di un giorno “di passaggio, si può inoltre notare come rispetto alla tradizione occidentale, venga modificato il rapporto numero naturale-conteggio.
I Maya avevano anche un terzo calendario, il *Tzolkin*, a cui davano molta importanza in quanto riferito all'anno sacro. La sua analisi però è poco significativa per i nostri scopi.
Poiché il sistema di numerazione era legato al calendario solare, il sistema di numerazione Maya non ha basi uniformi. Per contare i giorni veniva usata una base 20 chiamata *K'in*, quindi i mesi dei maya duravano 20 giorni. La base con cui si contavano i mesi si chiama *Winal.* Dato che sarebbe stato impossibile quantificare gli anni contando anche i mesi in base 20, visto che un anno “pieno” sarebbe durato 400 giorni, la seconda base (*Winal*) vale 18. In questo modo, contando progressivamente i mesi, aumenta l'anno dopo approssimativamente 18 mesi (360 giorni). Tutte le altre basi valgono 20. Quindi 1 *tun* vale 18 *winal* (mesi), 1 *K'atun* vale 20 *tun*, un *B'ak'tun* vale 400 *tun*, e così via.
I maya avevano altre quattro basi, chiamate *Piktun*, *Kalabtun*, *K'inchiltun*, e *Alautun*, tutte di valore 20.
L'aspetto più significativo è che i 7 cicli non permettono di rappresentare numeri fino all'infinito, come avviene con la nostra base decimale (che, come detto nel commento al lavoro di Fibonacci, evidenzia l'infinita possibilità della rappresentazione), ma possono comunque raggiungere un valore molto alto, esattamente 460.800.000.000. Siamo quindi in presenza di una forma di infinto “naturale”, un infinito cioè legato ad un finito talmente grande da essere sufficiente per il suo utilizzo. Tale infinito è molto vicino al nostro “infinito fisico” e informatico (ad esempio con un computer a 32 bit si possono rappresentare numeri fino a circa 4 miliardi) e che è stato studiato solo recentemente in ambito matematico.



Se il tempo era il termine principale della filosofia Maya, non è strano pensare come la loro paura più profonda fosse che il Tempo potesse fermarsi; così misero in moto una serie di cicli temporali, fuori fase l'uno rispetto all'altro, affinché il Tempo non si potesse fermare.

[11] Per una suddivisione dei calendari Maya si veda (Kaplan, 1999)

La presenza dello zero come numero venne identificato in una divinità, sovrano delle nove divinità dell'oltretomba. Il concetto matematico esprime quindi una negatività e una paura; ma in ogni caso ha una connotazione ben precisa. Se i Maya avessero trovato un uomo capace di prendere su di sé la persona di Zero, e lo si fosse messo a morte, la morte stessa sarebbe stata cancellata.
Lo zero come numero assume però anche un'altra connotazione. Nella figura proposta, sono riportati i simboli per indicare le varie cifre. In questo schema, si nota una struttura di base 5 simile a quella babilonese. Ciò che però interessa è l'iconografia dello zero: data l'importanza attribuita al tempo, le date erano trasportate da dei e, come visto, alcune date erano contrassegnate con lo zero. La mancanza induce un senso di timore; e così, per non offendere tali dèi, si fece trasportare loro un oggetto che non valesse niente, a forma di conchiglia vuota.
Sorprendentemente, c'è da una parte un significato semantico forte legato allo zero come valore e, dall'altro, una rappresentazione che ricorda molto il nostro tondo vuoto.
Per concludere, la cultura Maya è uno degli esempi più significativi di come un popolo possa creare e sviluppare il proprio pensiero a partire da una profonda paura per la Fine, intesa come fine del tempo, di un ciclo o di qualsiasi altra cosa e come questo pensiero abbracci anche il campo della matematica. Le loro scelte, sia per quanto riguarda il ruolo della numerazione nella gestione del tempo che la materializzazione di paure, non sono neutre, ed anche la matematica si piega a tali scelte rinunciando a forme di rappresentazioni magari più comode, ma culturalmente meno rilevanti.

4.6. La civiltà romana

Analizzando la notazione dei numeri, notazione che contrariamente a quelle viste in precedenza è additiva e non posizionale, ci si rende conto di come mai la cultura romana non abbia prodotto risultati significativi dal punto di vista matematico. La rappresentazione romana può essere vista come un chiaro esempio di come l'efficacia della notazione sia propedeutica alla facilità o funga da ostacolo alla gestione tecnica e concettuale degli oggetti rappresentati. L'esempio delle operazioni, con le complicazioni derivate dall'uso dell'abaco, è il più significativo, ma non è il solo.
Il sistema non richiede l'uso dello zero e se questo può avere un vantaggio concettuale, questo vantaggio è largamente inficiato dalle complicazioni tecniche, come è stato anche precedentemente segnalato, oltre che dalla sua limitatezza espressiva.
I numeri romani si prestano (abbastanza) bene per rappresentare numeri piccoli (per rappresentare un milione servirebbero mille M, cioè mille simboli; con il sistema decimale ne bastano 7).
Se quindi la numerazione romana poteva essere funzionale per contare soldati o prigionieri, poco si presta a favorire lo sviluppo del pensiero astratto: anche in questo caso, il linguaggio con cui si rappresenta un concetto non è neutro rispetto alla possibilità di studiarlo.
La prima comparizione storica delle cifre indiane sul territorio europeo risale al Codice Vigilano (976), una raccolta di documenti storici e di testi antichi redatto da tre monaci del monastero di Albelda (la città fulcro dell'attività scientifica del regno di Pamplona). Nel testo però manca lo zero e probabilmente la non conoscenza relativa a questa mancanza si riferisce sai alla cifra che al numero zero.
Per avere anche la conoscenza dello 0 bisognerà attendere appunto il [LA] circa 150 anni più tardi.

5. Conclusioni

Chiosando l'ultimo capitolo, si potrebbe sottolineare come le varie civiltà abbiano tessuto e modificato la rete matematica che è stata gettata loro addosso, inserendola in credenze, paure, esigenze (filosofiche o pratiche che fossero). Ci si riconosce nella forma, ma la sostanza può essere profondamente diversa.
A partire dal testo di Fibonacci abbiamo cercato di capire quali condizioni avessero impedito la comparsa in occidente della numerazione posizionale e quali invece l'abbia favorito in altri contesti. In questa analisi, il ruolo dello zero è risultato decisivo e su questo aspetto abbiamo centrato la nostra attenzione. In particolare, ciò che ci eravamo posti come obiettivo era cercare di capire quali condizioni avessero favorito l'affermazione proprio nel medioevo di un sistema di numerazione

posizionale.
Lungi dall'aver trovato una risposta, il percorso che abbiamo seguito ci ha comunque permesso di evidenziare alcuni aspetti che a noi sono sembrati significativi.
Se la matematica è un linguaggio sovraculturale (come ci è sembrato evidente anche dalla comparsa di certi concetti in culture come quella Maya non legate a quella occidentale e come del resto il testo (Kline, 1972) ipotizza) ciò che fa parte della storia dell'uomo e della sua cultura è il diverso impianto epistemologico.
A questo si aggiunge il problema specifico del linguaggio: abbiamo cercato di leggere la matematica del [LA] più sul piano linguistico che su quello tecnico perché ci è sembrato che la sua importanza più profonda stia proprio nell'introduzione di un linguaggio specifico ed efficace per l'aritmetica.
Le conclusioni a cui ci è sembrato di poter giungere, riconducono a molte delle questioni sollevate dalla filosofia greca e ai condizionamenti o alle facilitazioni che essa ha indotto nello sviluppo della matematica e della scienza in occidente. In questa prospettiva, abbiamo visto come comune la radice culturale che ha portato alla gestione dello zero come quantità e successivamente dell'infinito. L'importanza quindi dell'opera di Fibonacci, sembra essere stata soprattutto quella di aver introdotto un oggetto matematico prima che questo diventasse concetto culturalmente condiviso. Normalmente, infatti, succede il contrario, ma l'analisi dell'opera di Fibonacci effettuata sul piano più strettamente linguistico ci ha mostrato come privilegi l'aspetto morfologico e sintattico a scapito di quello semantico: così, sembra dirci, non è tanto importante cosa sia un numero, quanto come lo si possa rappresentare e come si possa efficacemente operare con tale rappresentazione. In sostanza, secondo questa prospettiva, l'introduzione delle condizioni linguistiche, favorite a loro volta dalla riconosciuta efficacia sul piano operativo[12], hanno permesso l'acquisizione da parte del mondo occidentale del concetto sottointeso allo "zero". Per l'infinito, ricordiamo, occorrerà molto più tempo, forse proprio in assenza di tale connotazione o anche, molto più probabilmente, alla difficoltà nel collegare l'aspetto concettuale con l'aspetto pratico richiesto dalla nuova classe mercantile. In ultima istanza, ciò che si voleva sottolineare è come tra l'introduzione di un concetto e la sua completa acquisizione ed accettazione ci siano sostanziali differenze, sia temporali che culturali, legate soprattutto alla distanza tra il mondo accademico e il mondo dell'utilizzo. Visto secondo questa prospettiva, il problema dello zero sembra ricondursi alla dicotomia quanto mai attuale tra una matematica "teorica" e una "utile", dicotomia che è emersa anche in altri contesti storico-culturali, come si è precedentemente evidenziato.
L'ultima questione che ci premeva ribadire è come le questioni matematiche possano permettere lo scambio e il confronto fra culture. Come lo stesso Fibonacci sottolinea, le cose che propone, seppur mediate da culture di altri popoli gli permettono di rimanendo fedele ad una tradizione occidentale; il richiamo alla geometria è la manifestazione più eclatante.
La matematica diventa quindi strumento per veicolare non solo conoscenza, ma soprattutto approcci culturali diversi, come sottolineato in precedenza in più frangenti. Sul terreno neutro della matematica sembra quindi possibile uno scambio difficile su altri piani. Questo, al di là delle questioni tecniche, è forse un insegnamento che la lettura critica della storia dello zero ci può dare, in una realtà come quella attuale, in cui è indispensabile un continuo confronto culturale, purtroppo troppo spesso limitato alla lettura superficiale dei simboli del linguaggio.

[12] La numerazione posizionale diventa così un chiaro esempio di come un linguaggio opportuno renda più efficace la gestione di un concetto.

6. Bibliografia

AA.VV.: 2001, *Trattato d'Abaco (XV secolo)*, a cura di Gregori S. e Grugnetti L., Università degli Studi di Parma.
Abbagnano N., Foriero G.: 1999, *Protagonisti e testi della filosofia*. Paravia, Torino.
Aristotele: 1973, *Opere. Fisica, Del Cielo*, Laterza, Torino
Barrow J. D.: 2001, Da zero a infinito, Mondadori, Milano
Borges J.: 1984, *Metempsicosi della tartaruga*, in Tutte le Opere, Meridiani Mondadori, Milano
Boyer C. B. : 1998, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano
Brousseau G.: 1983, *Les obstacles épisémologiques et les problèmes en mathématiques*, RDM, 4 (2)
Dantzig T. : 1965, *Il numero, linguaggio della scienza*, La Nuova Italia, Firenze
Kaplan R. : 1999, Zero. Storia di una cifra, Rizzoli, Milano
Kline M.: 1976, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli Editore, Milano
Lolli G.: 1985, *La matematica: i linguaggi e gli oggetti*, in Scienza e Filosofia (a cura di C. Mangione), Garzanti, Milano
Menninger K.: 1969, *Number Words and Number Symbols*, The M.I.T. Press - Massachussetts Institute of Technology
Pisano L., detto Fibonacci: 1857, *Liber Abbaci*, (a cura di Baldassarre Buoncompagni),Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Roma
Rotman B.: 1988, Semiotica dello zero, Spirali, Milano

Fonti da internet
Allegri D: *Storia dei numeri*, http://www.fralenuvol.com/albero/sapere/scienza/numeri.php
Odifreddi P.G.: 1992, *J.L. Borges-Scandali della ragione*, reperibile all'indirizzo http://www.vialattea.net/odifreddi/borges1.htm
O'Connor J. J. , Robertson E. F.: *A History of Zero*
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html
Odifreddi P.: *Sorpresa, la matematica non è una nostra invenzione*, La Repubblica
http://www.swif.uniba.it/lei/rassegna/000721.htm
Quaranta P.: *L'India e la scoperta dello zero*
http://www.aula28.org/cultura/L%E2%80%99India%20e%20la%20scoperta%20dello%20zero.htm