Parmigianino - Affreschi della Chiesa della Steccata - particolare

Università di Parma

Dipartimento di Matematica

Unità locale di ricerca in Didattica della Matematica

Responsabile Carlo Marchini

Queste pagine sono rivolte agli insegnanti. In esse si presentano alcune riflessioni sorte nell'ambito delle attività dell'Unità locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma su temi di analisi matematica. La delicatezza degli argomenti trattati e le difficoltà didattiche che si incontrano nell'insegnamento - apprendimento di concetti quali quelli di limite (di successioni e di funzioni) di continuità e discontinuità hanno richiamato la nostra attenzione di ricercatori. Quanto viene presentato in questo sito è frutto di approfondimenti teorici e di indagini sperimentali svolti in diversi anni. La parte sperimentale ha coinvolto alcune centinaia di studenti.
Il lettore, o meglio il navigatore, potrà trovare spunti per un approfondimento personale e suggerimenti per un'attività di ricerca-azione da condurre in classe.
Il materiale che viene qui presentato è stato redatto dai Proff. Achille Maffini e Angela Rizza con la supervisione del responsabile dell'Unità locale di ricerca, attingendo largamente a lavori pubblicati o in corso di pubblicazione di docenti e ricercatori partecipanti all'Unità locale di ricerca, oltre che alla letteratura specialistica sul tema.
Per ottenere la massima fruibilità da parte del lettore si è cercato di uniformare lo stile prediligendo un percorso a schede indipendenti inserite in presentazioni unitarie.
Esso si presenta suddiviso in tre parti che illustrano:

Parte 1-Nozioni preliminari a cura di Achille Maffini
In questa parte si trattano alcuni temi propedeutici agli argomenti successivi: il problema del definire in matematica e il concetto di funzione.
Parte 2-Il concetto e la didattica del limite a cura di Angela Rizza
In questa parte si presentano alcune attività propedeutiche e i più comuni approcci al concetto di limite, mettendone in evidenza le difficoltà e le problematiche evidenziate anche da ricerche didattiche internazionali.
Parte 3-Il tema della continuità e della discontinuità a cura di Achille Maffini
In questa parte si affronterà il problema della continuità puntuale di una funzione. In particolare, dopo un'analisi della definizione di continuità, sia per come viene proposta che per quanto riguarda la sua struttura specifica, si affronterà il problema della relazione non continuità-discontinuità.
Bibliografia

Per suggerimenti e richieste si prega di contattare il responsabile del progetto Carlo Marchini

PARTE 1- PREREQUSITI FONDAMENTALI

a cura di Achille Maffini

1.1. La definizione in matematica

1.1.1. Il ruolo del definire in ambito matematico.

Il problema del definire in matematica è un problema cruciale, vista la natura degli oggetti matematici. Non è improbabile trovare testi che definiscono in modo diverso un ente matematico. Questa diversità può diventare una vera risorsa didattica: vedere come certe scelte comportino un diverso percorso didattico di cui la coerenza ne è l'aspetto peculiare può essere un modo per avvicinare gli alunni all'idea di una matematica "propria".
In generale una definizione si presenta come implicazione, in cui l'antecedente è formato dalle proprietà che indicano l'ente da definire (posto come conseguente). Di fatto tale "implicazione" si usa come un se e solo se, dove l'implicazione in cui si scambiano antecedente e conseguente è implicita sul piano sintattico, mentre sul piano semantico è esplicitata dalla caratterizzazione dell'ente definito attraverso le condizioni poste. Questa precisazione può essere "letta" anche in altri termini: se con A indichiamo il concetto da definire e con B le proprietà che lo definiscono, la struttura delle definizioni è del tipo $B \rightarrow A$; ma risulta anche opportuno, nella prassi didattica, evidenziare come gli enti che non verificano le proprietà B non sono del tipo A, cioè che $\neg B \rightarrow \neg A$; in una logica classica la congiunzione delle due proposizioni porta appunto alla doppia implicazione nella definizione.
Ad esempio se definisco un parallelogramma come un quadrilatero con i lati opposti paralleli, sto dicendo che

se un quadrilatero ha i lati opposti paralleli **allora** è un parallelogramma.

Questo a priori non esclude che si possano chiamare parallelogrammi anche altri oggetti (ad esempio non esclude che i trapezi siano parallelogrammi, in quanto l'antecedente della proposizione sarebbe falso, rendendo vera la proposizione stessa e non escludendo, trattandosi di una definizione, che il conseguente sia vero). Per fare un esempio extramatematico: dire che un uccello è un animale che vola non è una buona definizione di uccello. Qui la cosa è semplice perché la nostra definizione si basa su un modello reale di uccello e vogliamo indicare con il termine "uccello" una ben definita (da altre proprietà caratterizzanti!) tipologia di animale.
Didatticamente si disegna, in questi casi, un trapezio per dire che quello non è un parallelogramma, cioè

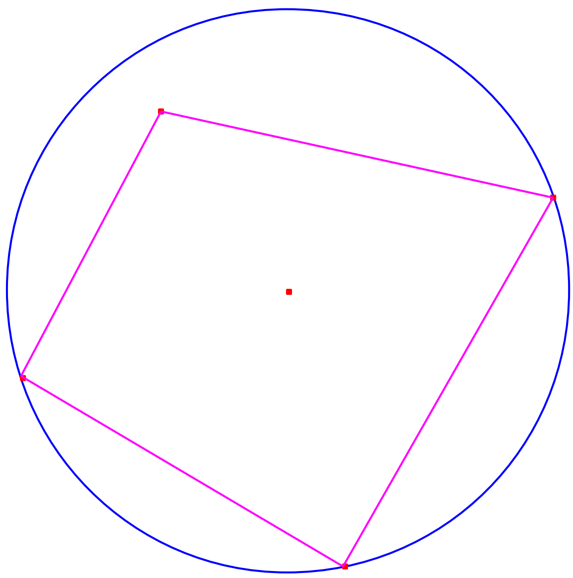
se un quadrilatero **non** ha i lati opposti paralleli **allora non** è un parallelogramma

In sostanza si vuole che i parallelogrammi siano tutti e soli i quadrilateri con i lati opposti paralleli.

Non è facile trovare definizioni poste nella forma "se e solo se"; più facile trovarle nella forma "Chiamiamo A (diciamo A) se B. Non è raro trovare definizioni in cui l'implicazione viene anche formalmente sottointesa con espressioni del tipo "Si dice….", "Chiamiamo….", "A (dove con A si indica l'ente da definire) è……". Esempi in tal senso si possono ritrovare nelle definizioni riportare in seguito.
A volte il "se e solo se" è sottointeso in altri termini, come ad esempio quello di luogo che compare generalmente nella definizione delle coniche.
In altri casi usare un'unica implicazione può creare non pochi problemi, di comprensione del concetto, soprattutto quando il termine utilizzato si presta a fraintendimenti linguistici.

Un esempio di definizione in tal senso è la seguente (da Palladino, Scotto, Frixione – Matematica, Vol 2C – Principato, 2000 – pag. 401)
Un poligono è ***inscritto in una circonferenza*** *se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza*

La forma della definizione è: *se tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza il poligono si dice inscritto*.
Ma se alcuni vertici non vi appartengono? Il termine inscritto fa pensare, etimologicamente, a "scritto dentro". Nulla esclude quindi che un alunno possa considerare come poligono inscritto il seguente, poligono che, rispetto alla circonferenza disegnata, non contraddice la definizione, mancando l'implicazione inversa:



Si invita il lettore a ricercare su libri di testo in suo possesso definizioni che coninvolgano la doppia implicazione.

Il ruolo della definizione, in quanto forma di caratterizzazione, determina indirettamente le proprietà dell'ente definito, proprietà che caratterizzano successivamente il percorso didattico che coinvolge l'ente stesso.
Per aspetti operativi sulla definizione, vedi Attività Definizione.

Ciò che dovrebbe emergere dall'attività è la consapevolezza che le diverse possibilità possono essere relative a scelte didattiche di cui dovrebbe trovarsi traccia nel percorso didattico successivo.
Di seguito vengono riportate alcune definizioni che fanno riferimento alle diverse scelte:

Funzione
Palladino, Scotto, Frixione – Matematica, Vol 1A – Principato, 2000 – pag. 137
Si dice funzione da un insieme A a un insieme B una legge che a ciascun elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B
Speranza, Dell'Acqua – Il linguaggio della Matematica, Vol. T – Zanichelli, 1981 - pag. 6
Una funzione definita in A e a valori in B è una relazione che associa a ogni $x \in A$ *un solo elemento di B oppure nulla.*

Per un'analisi della definizione di funzione vai a Definizione di funzione.

Monomio

Cremaschi – Matematica per problemi, Vol 1– Zanichelli, 2001 – pag. E9

Monomio è un'espressione algebrica formata dal prodotto di fattori numerici e letterali (questi ultimi con esponenti naturali)

Vené, Delfrate, Melej - Matematica 1 - Sansoni, 1995 - pag. 179

Monomio: formula in cui compaiono soltanto operazioni di moltiplicazione e/o divisione

(Nota: dalla definizione nei monomi i fattori numerici hanno esponenti interi relativi)

Trapezio

Dodero, Barboncini, Manfredi – Lineamenti di Matematica, Vol. 1– Ghisetti e Corvi, 1999 – pag 750

Si chiama trapezio un quadrilatero avente due lati opposti paralleli.

Scaglianti – Appunti di Geometria – CEDAM, 1989 – Pag. 74

Si chiama trapezio un quadrilatero con soli due lati paralleli.

Relativamente alla definizione di trapezio (forse didatticamente la più semplice) è il caso di osservare che nel primo caso l'insieme dei parallelogrammi è un sottoinsieme dell'insieme dei trapezi, nel secondo i due insiemi sono disgiunti. Questo aspetto ha evidenti ripercussioni sulle proprietà, soprattutto in relazione al caso del trapezio isoscele (potendo essere un parallelogramma, nel primo caso, con le evidenti difficoltà rispetto alla gestione della proprietà delle diagonali: alcuni problemi di geometria si basano pesantemente sul fatto che le diagonali di un trapezio isoscele non parallelogramma sono congruenti).

Le definizioni si pongono in generale come introduzione di un nuovo termine nel linguaggio per abbreviare alcune proprietà e, di fatto, per "forzarne" altre. Una definizione è "buona" quando permette un ricco sviluppo delle relazioni connesse all'ente definito. Un esempio in tal senso è la definizione di gruppo (si veda al proposito).

Ci sono però forme di definizioni che "costruiscono" l'ente definito a partire da enti noti e in modo ricorsivo o induttivo. Queste definizioni permettono di riconoscere e distinguere le varie categorie che si vogliono definire. Questo tipo di definizioni sono tipiche di ambiti anche extramatematici e caratterizzano gli ambiti appunto categorici.

Generalmente una definizione induttiva si realizza attraverso tre tipi di clausole: la base, che indica alcuni specifici enti che appartengono alla categoria dell'ente che si vuole definire; le condizioni di chiusura, con cui si afferma che se enti di un certo tipo appartengono alla categoria, anche altri ottenuti con specifiche operazioni (o regole) vi appartengono; la condizione di restrizione, che afferma che solo quelli ottenuti in questi modi vi appartengono (si suppone sempre che le "regole" siano applicate un numero finito di volte).

L'esempio tipico è dato dalla definizione di formula ben formata in logica o delle definizioni ricorsive come quella della potenza naturale di un numero reale.

Un altro esempio che si può citare è quello della definizione di poligono, definizione che, così come è solitamente presentata, induce non poche perplessità, soprattutto per quanto riguarda i poligoni concavi.

Un esempio di definizione di poligono data in modo ricorsivo passa attraverso la definizione di triangolo come intersezione di semipiani e successivamente il poligono come unione di triangoli staccati "opportunamente presi".

Vai all'attività: Definizione di poligono.

Analisi percorso della definizione di poligono.

Riprendiamo quanto proposto nella scheda per vedere come arrivare alla definizione richiesta.

1) Analisi delle definizioni presenti sui libri di testo, mettendone in evidenza i vincoli connessi ai termini usati.
2) Condizioni topologiche relative all'idea intuitiva di poligono (ad esempio, non ci devono essere "buchi").
3) Riconoscimento dei triangoli come poligoni facilmente definibili come intersezione di semipiani.
4) Individuare i poligoni come unione di poligoni. Per fare questo è necessario però dare delle condizioni sull'unione di poligoni. Tale condizione, esprimibile dopo che il termine poligono è stato introdotto, si configura come una abbreviazione di condizioni poste e può essere inserita all'interno di seguente schema ricorsivo, dopo il punto a):
    a) ogni triangolo è un poligono

DEFINIZIONE.

i. Due poligoni si dicono semi-staccati se e solo se hanno in comune un numero finito di punti o un numero finito di segmenti.

ii. (da *Speranza, Rossi dall'Acqua-Il linguaggio della matematica vol.2, pag. 57 - Zanichelli, 1988*)

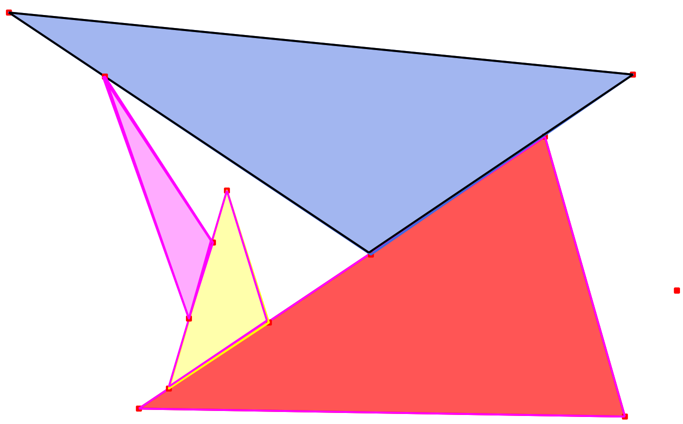
Due poligoni si dicono staccati se e solo se sono semi-staccati o la loro intersezione è vuota.

Continuiamo con la definizione di poligono:

b) se due figure sono poligoni semi-staccati, allora la loro unione è un poligono;:
c) nient'altro è un poligono

Al termine, ogni poligono può essere visto come unione di triangoli staccati.

5) Mettere in evidenza i limiti topologici di tale definizione; ad esempio la figura seguente (in cui dove la parte bianca non fa parte del "poligono") non dovrebbe essere riconosciuta come poligono.



6) Ricercare condizioni topologiche da aggiungere al punto b) precedente in modo che non compaiano figure come questa. Tale condizione potrebbe essere ad esempio (condizione di connessione per archi della superficie complementare):
E' possibile congiungere due punti non appartenenti al poligono con una spezzata che non intersechi il poligono.

La definizione precedente diventerebbe allora:

a) ogni triangolo è un poligono

b) se due figure sono poligoni semi-staccati e se comunque si prendano due punti non appartenenti alla loro unione esiste una spezzata che li congiunge che non interseca la loro unione, allora la loro unione è un poligono;:
c) nient'altro è un poligono

Le definizioni ricorsive, come del resto tutte le definizioni, devono essere in grado di permettere il riconoscimento dell'ente definito attraverso la sua scomposizione negli elementi costitutivi. Ad esempio lo schema di definizione precedente di poligono è quello che permette di riconoscere un poligono dal fatto si poterlo decomporre in un certo numero di triangoli.

Per approfondimenti si veda
Dapueto C.:1992, La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica - Atti del II Internucleo della Scuola Secondaria Superiore, Genova 1992

1.1.1.1. Attività: Definizione

Ambito concettuale: Il definire in matematica
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) destabilizzare l'idea che gli enti matematici siano univocamente definiti;
2) indurre l'idea di scelta didattica alla base di alcune definizioni matematiche;
3) abituare ad analizzare in modo critico la definizione proposta da un libro di testo.
Modalità di presentazione: descritte nella scheda.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

Cerca su vari libri di testo la definizione dei seguenti termini matematici, con particolare riferimento agli aspetti evidenziati per ciascuno di essi:

Termine: funzione
Aspetti da evidenziare in particolare: proprietà richieste (ovunque definita e funzionale oppure solo funzionale).

Termine: monomio
Aspetti da evidenziare in particolare: tipologia degli esponenti (naturali o interi) per le lettere che compaiono nel monomio.

Termine: trapezio
Aspetti da evidenziare in particolare: coppie di lati paralleli richieste.

In base alle definizioni trovate, cerca di individuare le proprietà dell'ente definito deducibili dalla definizione e quali sono, secondo te, le motivazioni che hanno spinto l'autore del testo a proporre tale definizione.

1.1.1.2. Attività: Definizione di poligono

Ambito concettuale: Il definire in matematica
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) porre il problema di una definizione di una figura geometrica;
2) indurre l'idea di scelta didattica alla base di alcune definizioni matematiche;
3) abituare ad analizzare in modo critico la definizione proposta da un libro di testo;
4) cercare di costruire in modo critico una definizione, a partire dalle caratteristiche richieste per l'ente definito.

Modalità di presentazione: descritte nella scheda.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

1) Analisi delle definizioni di poligono presenti sui libri di testo, mettendone in evidenza i vincoli connessi ai termini usati.
2) Discussione sulle condizioni topologiche relative all'idea intuitiva di poligono (ad esempio, non ci devono essere "buchi").
3) Riconoscimento dei triangoli come poligoni facilmente definibili come intersezione di semipiani.
4) Individuazione dei poligoni (visti in modo intuitivo) come unione di triangoli
5) Discussione sulla possibilità di utilizzare tale caratteristica per definire un poligono a partire dai triangoli.
6) Individuazione delle "regole da seguire per l'unione, con la proposta della definizione di poligoni staccati.
7) Analisi con esempi e controsempi di ciò che funzione e non funziona
8) Esigenza di vincoli topologici alla definizione
9) Ridefinizione conclusiva.

1.2.1. Definizione di funzione

La definizione più proposta, a livello di libri di testo, è quella di relazione funzionale e ovunque definita. Più raro: relazione funzionale.
Spesso anziché citare le proprietà si parla di relazione che "ad ogni elemento del primo insieme associa uno ed un solo elemento del secondo insieme" oppure "ad ogni elemento del primo insieme associa al più un elemento del secondo insieme". Queste dizioni probabilmente sono usate per aiutare gli alunni, ma a volte corrono il rischio di impedire di riconoscere proprietà comuni di alcune relazioni, perdendo così di vista il loro ruolo unificante.
La terminologia usata relativamente al concetto di funzione, oltre che per quanto riguarda la definizione, non è univoca. In particolare, parlando di relazione, devono essere specificati gli insiemi del prodotto cartesiano oltre che il grafo della funzione.
Ciò che in genere non comporta unicità a livello di nome è proprio sul come chiamare gli insiemi che compongono il prodotto cartesiano: i termini Dominio e Codominio, infatti, non sono univocamente accettati o utilizzati.

Situazioni possibili (in corsivo è riportato un libro di testo che fa riferimento a queste posizioni):

a) Dominio è il primo insieme del prodotto cartesiano per le relazioni in genere
Gallo - La Matematica, Vol. 1 - SEI, 1991
b) Dominio è l'insieme degli elementi del primo insieme di un prodotto cartesiano su cui è definita una relazione che hanno un corrispondente nell'altro insieme
Cremaschi – Matematica per problemi, Vol 1– Zanichelli, 2001
c) Dominio è il primo insieme del prodotto cartesiano solo nel caso di funzioni definite come relazioni funzionali e ovunque definite
Paola, Romeni – Manuale di Algebra Geometria Informatica Vol. 1 – Archimede, 1997
d) Codominio è il secondo insieme del prodotto cartesiano per le relazioni in genere
Gallo - La Matematica, Vol. 1 - SEI, 1991
e) Codominio è il secondo insieme del prodotto cartesiano solo per funzioni
Paola, Romeni – Manuale di Algebra Geometria Informatica Vol. 1 – Archimede, 1997
f) Codominio è l'insieme delle immagini di una funzione.
Dodero, Barboncini, Manfredi – Lineamenti di Matematica, Vol. 1– Ghisetti e Corvi, 1999
g) Codominio è l'insieme delle immagini di una relazione in genere.
Cremaschi – Matematica per problemi, Vol 1– Zanichelli, 2001

Dietro queste diverse modalità di presentazione si celano diversi modi di pensare "i mondi" coinvolti nel concetto di relazione e di funzione e non solo distinzioni terminologiche. Ciò che interessava mostrare, comunque, sono le molteplicità delle combinazioni utilizzate.
Più interessante è la differenza tra la definizione di funzione "larga" (relazione funzionale) e quella "stretta" (relazione funzionale e ovunque definita).
Queste definizioni soddisfano due esigenze diverse ciascuna delle quali ha una specifica valenza didattica. E' da osservare che in entrambi i casi è richiesta l'unicità dell'immagine: questo significa avere la garanzia che, una volta trovata l'immagine di un elemento non devo cercarne altre.
Questo fa acquisire alla funzione, rispetto alle altre relazioni, una forte valenza informativa.
La proprietà che risulta "più o meno" richiesta è invece l'esistenza.
Un percorso didattico che porta a far sentire l'esigenza dell'esistenza è quello relativo agli ampliamenti numerici che si configurano come rispondenti all'esigenza di far risultare le operazioni come relazioni in cui il risultato è sempre garantito.
L'esigenza dell'esistenza e dell'unicità è rintracciabile anche in altri contesti, non necessariamente numerici: in geometria, ad esempio, è una funzione la relazione che ad ogni poligono fa corrispondere il suo perimetro (inteso come spezzata) o la propria area.

Diverso il caso delle funzioni viste ad esempio in analisi: è raro che queste, per come sono date, risultino funzioni, nel senso di relazioni ovunque definite e funzionali. Rispetto anche alla terminologia usata ("trova il dominio della funzione…..", legata soprattutto al problema della concezione della funzione) ciò che è richiesto in modo peculiare è che la relazione sia funzionale, come se la ovunque definitezza non fosse essenziale, ma si adeguasse.
La cosa, del resto, non è molto diversa da quanto avviene per le condizioni di invertibilità di una funzione, in cui la proprietà più vincolante è la iniettiva, mentre la suriettiva (corrispondente della ovunque definitezza) si può anch'essa "adeguare".
Tale aspetto è evidenziabile anche da parte degli studenti, come si evince in (Maffini3-2000)
Le diverse definizioni diventano una sorta di indice delle peculiarità di una disciplina che colui che definisce pone nell'oggetto definito.
I casi riportati mettono in evidenza le diverse esigenze che, ad esempio, hanno gli analisti rispetto al concetto di funzione rispetto ai geometri o agli algebristi. Per i primi ciò che interessa è soprattutto che le funzioni siano "gestibili" soprattutto analiticamente, richiedendo spesso proprietà "forti" alla funzione, come la continuità o la derivabilità, a discapito della possibilità di "addomesticarne" il dominio. Tutto questo, in genere, è visto come fortemente finalizzato alla rappresentazione del grafico di una funzione, favorendo in questo modo l'idea più volte espressa di una identificazione fra i due concetti.

Nel caso invece di geometri e algebristi l'esistenza dell'immagine per ciascun ente è importante tanto quanto l'unicità. In questi ambiti cade quindi la distinzione tra funzione e grafico, essendo la funzione identificata con quello che un'analista chiamerebbe grafico di una funzione.
Il lettore è invitato a trovare altri ambiti matematici in cui le due diverse definizioni di funzione risultano più opportune.

Vai all'attività: Individuazione e rappresentazione di funzioni

Per approfondimenti vedi:
[Maffini3-2000] A.Maffini - **Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria** - Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3* (2000), pag. 91-122
[Maffini2000] A. Maffini - **Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore** - Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000, pag. 90-104

1.2.1.1. Attività: Individuazione e rappresentazione di funzioni

(NB. Un'attività analoga è presenta anche nell'attività 3.1.3.1. Continuità e grafici di funzioni pur con finalità diverse)

Ambito concettuale: Riconoscimento di funzioni e loro rappresentazione

Livello: scuola superiore

Obiettivi:

1) porre il problema del ruolo giocato dagli insiemi coinvolti nella individuazione di una funzione;
2) porre il problema del ruolo giocato dagli insiemi coinvolti nella rappresentazione di una funzione;

Modalità di presentazione: proposta come attività di gruppo, indirizzata a classi seconde o del triennio della scuola media superiore.

Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

Considera le seguenti relazioni:

Dominio: **N**	Codominio: **N**	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: **N**	Codominio: **Q**	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: **Q**	Codominio: **Q**	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: **Q**	Codominio: **R**	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: **R**	Codominio: **Q**	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: **R**	Codominio: **R**	Proposizione: y=2x/3+5

Quali delle relazioni precedenti sono funzioni?

Di quali, tra le relazioni precedenti è possibile rappresentare il grafico?

Motiva la risposta data.

1.2.2. Definizione e concezione funzione

Nell'analisi della definizione di funzione si è messo in evidenza come tale definizione possa presentarsi concettualmente in due modi distinti denotanti entrambi diverse esigenze e priorità rispetto al concetto. Tali modi di presentarsi sono anche "figli" delle diverse concezioni che in modo più o meno esplicito si ha del concetto di funzione.
La definizione di funzione largamente condivisa è quella insiemistico-strutturale proposta da Bourbaki (relazione, intesa come terna formata da due insiemi A e B e da un sottoinsieme di AxB, con determinate proprietà); quello che invece distingue ancora le concezioni della funzione si riferisce principalmente al modo con cui vengono formate le coppie del grafo (inteso come l'insieme delle coppie individuate da ciascun elemento e dalla relativa immagine) della funzione.
Accanto quindi ad una concezione fortemente strutturale, si ritrova, sia a livello di testi che a livello di prassi didattica, una concezione radicata nella storia del concetto e che trova nella formulazione di Eulero e di Dirichelet i sui rappresentanti più significativi. Tale concezione è riconoscibile nelle definizioni dalla presenza di termini quali "legge", proprietà, criterio o simili, intesi tutti come legame tra variabili. E' inteso che il concetto di variabile fa riferimento ad un insieme di variabilità per cui questo legame di fatto risulta essere tra elementi di due insiemi. E' interessante a tale proposito fare alcune osservazione sui termini utilizzati:

a) molti libri di testo parlano di legge, riallacciandosi alla presentazione di Dirichelet del concetto di funzione. Questo aspetto ha forti connotazioni legate alla fisica, ambito in cui il concetto, visto come relazione fra grandezze, ha preso piede (si veda ad esempio [Y] e (Marchini 2002)). L'ambito matematico ritrova, in questa terminologia, un'idea storica di matematica come disciplina legata alla realtà fisica. Un temine matematicamente più opportuno potrebbe essere quello di proposizione, di chiara connotazione logica.
b) Il fatto che si parli, anche nella concezione euleriana, di variabili, dovrebbe enfatizzare il ruolo svolto dagli insiemi numerici (o da insieme di enti o grandezze in genere) relativamente al concetto, ruolo che spesso viene omesso o dimenticato.

E' interessante osservare come questa connotazione legata al "legame" tra variabili sia in generale molto più presente al triennio che al biennio, quando cioè il piano cartesiano assume un ruolo predominante rispetto al resto, favorendo altresì quell'identificazione delle proprietà della funzione con quelle del suo grafico suo grafico, di cui il programma di analisi del quinto anno delle superiori ne è il più chiaro esempio.
Le problematiche connesse a questi due aspetti fanno esplicito riferimento al rapporto sintassi-semantica relativo al concetto di funzione.

I vari concetti di funzione si possono vedere messi in opera anche in altri aspetti coinvolgenti la prassi didattica. Come evidenziato in (Maffini2000), i diversi modi di indicare (quando esiste) la proposizione che individua una funzione fanno riferimento a rappresentazioni, interne ed esterne, e ad aspetti diversi, come differenti sono le informazioni implicite che si pensa di ricavare dalle funzioni stesse.
Vediamo brevemente le scritture più comunemente usare:

a) f(x)=…..
b) y=……
c) x ————— >…… (più raro)

Possiamo riferire la terza forma ad una visione chiaramente dinamica del concetto di funzione, mentre la prima fa pensare alla funzione come 'macchinetta' che, dato un valore di x, ne fornisce il risultato. Questa forma, utilizzata soprattutto nei problemi in cui si cercano legami o variazioni tra grandezze, non esprime esplicitamente una seconda variabile e quindi fa allontanare in un certo senso dall'idea di funzione come insieme di coppie ordinate, idea invece pesantemente presente in (b) in cui si passa ad una visione statica: la funzione è data in atto (il suo grafico ne è la migliore espressione), laddove in (c) e in (a) è data in potenza.

Inoltre questo non fa altro che identificare la funzione con la "legge" che la determina, con tutti i rischi ad esso connessi.

Per approfondimenti vedi:
[Y] Youschkevitch, A.P.: 1981, 'Le concept de function jusq'au milieu du XIX siècle', Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.) *Fragments d'histoire des mathematiques*, Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 7 - 68.
[Marchini02] C. Marchini - Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione - SFIDA 18, 3 maggio 2002
[Maffini3-2000] A.Maffini - Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria **-** Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3* (2000), pag. 91-122
[Maffini2000] A. Maffini - Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore **-** Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000, pag. 90-104

1.2.3. Rapporto sintassi-semantica relativo al concetto di funzione

La formulazione classica di una richiesta di un esercizio di analisi coinvolgente il concetto di funzione si presenta nella forma

"Data la funzione *y=f(x)* trovane il dominio."

Non è superfluo osservare che la stragrande maggioranza dei libri che pongono la questione in questi termini danno come definizione del concetto quello di relazione ovunque definita e funzionale. Questo porta una contraddizione in termini, se è vero che il dominio, per poter parlare di funzione, dovrebbe essere dato a priori. In questa formulazione la funzione risulta confusa con la proposizione che la definisce. E' quindi evidente il legame con la concezione euleriana della funzione, ma ciò che viene in diversi casi dimenticato è che comunque gli ambiti "di partenza" e "di arrivo" devono essere dati. Capita così di trovare situazioni in cui si confonde la concezione euleriana con l'aspetto sintattico della proposizione, ritenendo in questo modo che il codominio (o 'insieme di arrivo) venga costruito con i valori della funzione , dimenticando così che "ciò che è possibile fare" sulla variabile indipendente dipende anche dall'ambito numerico (il codominio) in cui ciò avviene. Questo aspetto evidenzia inoltre come spesso nella prassi didattica si dia per scontato, anche implicitamente, che l'ambito numerico di riferimento sia sempre **R.**

Seppure la definizione di funzione (nell'accezione strutturale) sia ormai un dato consolidato, la concezione euleriana (che non si contrappone agli aspetti semantici della funzione, ma ne vincola l'applicabilità in relazione a modalità costruttive di determinazione delle immagini) rimane ancora forte e, per come detto, a volte forviante.

Nel caso dell'analisi, come detto, la maggior parte delle relazioni coinvolte sono relazioni funzionali da **R** ad **R** ed una delle consegne è quella di trovarne non il dominio (che potrebbe essere R, se si accetta l'idea di considerare come dominio di una relazione il primo insieme del prodotto cartesiano), ma l'insieme di definizione, cioè l'insieme degli elementi del primo insieme del prodotto cartesiano aventi (almeno) un corrispondente. Una possibile formulazione per un esercizio di analisi coinvolgente il concetto di funzione che sia coerente con la definizione di funzione come relazione ovunque definita e funzionale potrebbe essere la seguente:

(1) "Data la relazione da **R** in **R** definita dalla proposizione *y=f(x)* trovane l'insieme di definizione **D**. Studia la funzione (rappresenta il grafico della funzione) da (di dominio) **D** ad (e codominio) **R** definita dalla proposizione *y=f(x)* ecc."

La formulazione è alquanto pesante e forse vale la pena semplificarla, non prima però di aver chiarito che certe espressioni sono legate ad abusi di linguaggio (o forme sincopate) di aspetti più complessi.

Nel seguito del presente lavoro, per funzione intenderemo una relazione funzionale e ovunque definita. Con Dominio di una funzione intenderemo il primo insieme del prodotto cartesiano e con Codominio il secondo insieme del prodotto cartesiano. Inoltre, per snellire il discorso, utilizzeremo a volte per richiamare una funzione l'espressione consueta ("Data la funzione *y=f(x)*....."), invitando sempre il lettore ad avere presente che tale espressione viene utilizzata come forma sincopata della (1).

Altri aspetti peculiari relativi al rapporto tra sintassi e semantica si riferiscono non solo all'ambiente in cui sono prese le immagini degli elementi del dominio, ma anche l'ambiente in cui gli eventuali calcoli (se si pensa a funzioni definiti da proposizioni analitiche) vengono svolti. A tale proposito si veda Marchini, 1998.

Per approfondimenti vedi:

Grugnetti L.,Marchini C., Maffini A.:1999, Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique , Louvain, pag. 421-444
Marchini C.: 1998, 'Analisi "logica" della funzione', Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (Eds) Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis 1997-1998, p. 137-157
A.Maffini: 2000, Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria - Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3* (2000), pag. 91-122
A. Maffini: 2000 Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore - Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000, pag. 90-105

1.2.4. Il grafico di una funzione: aspetti qualitativi legati alla rappresentazione e alla lettura.

Il programma di matematica a livello liceale ha nell'analisi e nei suoi concetti-chiave il suo argomento conclusivo e più significativo. Tra questi concetti-chiave un ruolo centrale è giocato dal concetto di funzione così come viene proposto in questo ambito, al punto da diventare IL concetto di funzione che più si radicalizza negli studenti, con tutti gli aspetti precedentemente evidenziati.
A supporto di quanto detto, c'è da osservare il fatto che spesso i problemi relativi allo studio di funzione sono introdotti da richieste del tipo
"Rappresenta il grafico della curva di equazione $y=f(x)$…",
richiesta in cui è facile trovare il termine equazione (più raro trovarlo in richieste che richiamano il concetto di funzione).
Il grafico quindi assume la connotazione di fotografia della funzione, idonea a metterne in evidenza, soprattutto dal punto di vista qualitativo, gli aspetti peculiari.
Però questo tipo di approccio presenta alcuni rischi:
- che la funzione venga identificata colla sua rappresentazione visuale,

ed anche quelli evidenziati da Furinghetti e Somalia:
- mediante il grafico si tende a nascondere la necessità di una concreta padronanza dei numeri reali
- «nella formazione di un concetto possiamo distinguere due livelli di comprensione: uno in cui si delinea in maniera informale il concetto e uno in cui il concetto si formalizza con linguaggio specifico. Il grafico, sembra agire soltanto nella prima fase senza legami con la seconda, cioè quando si passa alla formalizzazione.» (Furinghetti e Somalia pag. 72).

La lettura del grafico di una funzione è uno degli obiettivi significativi e più forti della didattica della matematica. L'uso poi di software didattici specifici e delle calcolatrici grafiche ha reso questo tipo di attività particolarmente adatta per la costruzione di concetti mentali duraturi.
Questo poi senza tener conto dell'uso dei grafici per la risoluzione di equazioni o disequazioni.
Lo stesso studio di funzione, ritenuto un ottimo obiettivo didattico per la proposta di strumenti e concetti potenti quali quello di limite, derivata, integrale, si configura come la possibilità di fornire mediante il disegno una rappresentazione qualitativamente e, per quanto possibile, quantitativamente significativa del grafico di una funzione per poter facilitare la lettura di informazioni fornite dalla funzione stessa.
Il rapporto tra rappresentazione grafica e rappresentazione analitica è sempre da tenere stretto e presente, soprattutto nell'ottica delle informazioni ricavabili dall'uno e dall'altro come pure gli obiettivi perseguibili con l'uno o con l'altro. Occorre però fare attenzione a situazioni in cui si "forza" un passaggio dal grafico alla proposizione analitica, sottintendendo spesso non pochi aspetti impliciti.

Il rischio che didatticamente si potrebbe correre è che l'alunno radicalizzi le sue immagini mentali o, peggio, che l'insegnante ritenga che queste immagini mentali siano ormai parte di un implicito contratto didattico. Potrebbe cioè configurarsi il rischio che l'alunno perda di vista i limiti che il grafico ha.
A titolo di esempio riportiamo alcuni esercizi, rimandando all'analisi dell'attività proposta altre considerazioni di questo genere:

Esercizio 1. Dal grafico all'equazione

In tale esercizio la richiesta delle equazioni delle curve fa implicito riferimento ad modello noto, legato agli argomenti trattati in quel periodo (è una verifica proposta in una terza liceo scientifico).
Nello stesso anno è stata proposta la verifica sottostante:

Esercizio 2. Applicazione di una trasformazione ad una curva

In esso, la richiesta dell'applicazione della traslazione alla curva era legata al vedere se l'alunno aveva competenza nel gestire le traslazioni da un punto di vista grafico.

Questi esempi vogliono far riflettere su come non sia improbabile che ci siano aspetti legati ad una presunta attesa che lo studente pensa l'insegnante abbia (o che l'insegnante esplicita) e che risulta fortemente condizionata dal contesto didattico e contenutistico in cui ci si sta muovendo.

Vai all'attività: Lettura di Grafici

L'idea che ogni funzione abbia un grafico rappresentabile (che comporta spesso anche incresciosi viceversa come ad esempio l'idea che ogni curva del piano cartesiano sia il grafico di una funzione; vedi Maffini 2000), è probabilmente una ulteriore conseguenza del prevalere dell'aspetto analitico del concetto di funzione (chi si preoccuperebbe della rappresentazione della funzione poligoni-perimetri o di quella dell'addizione in N?). Questo è anche però legato a problemi di intensionalità (cioè del tipo di espressione utilizzata per la descrizione analitica) ed estensionalità (l'insieme delle coppie ordinate) relativi al concetto di funzione.
La definizione insiemistica di funzione, infatti, si presta alle stesse modalità di presentazione dell'insieme delle coppie nelle due modalità "canoniche": quelle cosiddette per elencazione e per caratteristica. L'elencazione fa riferimento agli aspetti estensionali, mentre la caratteristica a quelli intensionali della funzione. Se quindi gli aspetti intensionali richiamano una idea di "proprietà" (la "legge") con cui vengono costruite le coppie, l'elencazione, esplicitando gli elementi (e facendo quindi riferimento ad un ambito semantico), permette una maggiore riconoscibilità per quanto riguarda caratteristiche come l'appartenenza, questioni d'ordine o d'uguaglianza. Chiaramente questa opportunità è possibile solo per un numero finito (e sufficientemente piccolo di elementi.....), ma è l'unica in caso di mancanza di una proprietà che caratterizzi la formazione delle coppie. Nel caso di una connotazione intensionale di una funzione, però, le informazioni sono di difficile lettura per cui il grafico assume, per certi aspetti, il mediatore atto a fornire una forma estensionale della funzione. Questo significa chiaramente mettersi nella condizioni in cui il grafico sia rappresentabile, con la conseguente connotazione privilegiata di R o, analogamente, di funzioni che dal punto di vista grafico si comportino bene.
Per problemi connessi a questi aspetti si veda anche Maffini 3-2000.
Per esemplificare varie attività che possono essere svolte partendo dalla rappresentazione grafica, rimandiamo agli esercizi seguenti.
Esercizio 3. Informazioni su una funzione dedotte graficamente
Esercizio 4. Relazioni tra funzioni rappresentate analiticamente e i rispettivi grafici (da Andreini & altri)
Inutile dire che ciò che è riportato nei due esercizi precedenti è solo una parte del grafico della funzione.

In attività di questo tipo si danno spesso per implicite alcune informazioni di unicità (un grafico può esserlo di una sola funzione, si pensi, in **R**, a $y = x + 1$ e $y = (x^3 + 3x + 4)/(x^2 - x + 4)$) e di esaustività delle informazioni (ciò che si vede basta e, forse, avanza).
Non è difficile trovare grafici la cui parte rappresentata può essere la rappresentazione di più funzioni.
In casi come questi risulta ancor auspicabile un fornire in modo esauriente tutte le informazioni disponibili e necessarie.

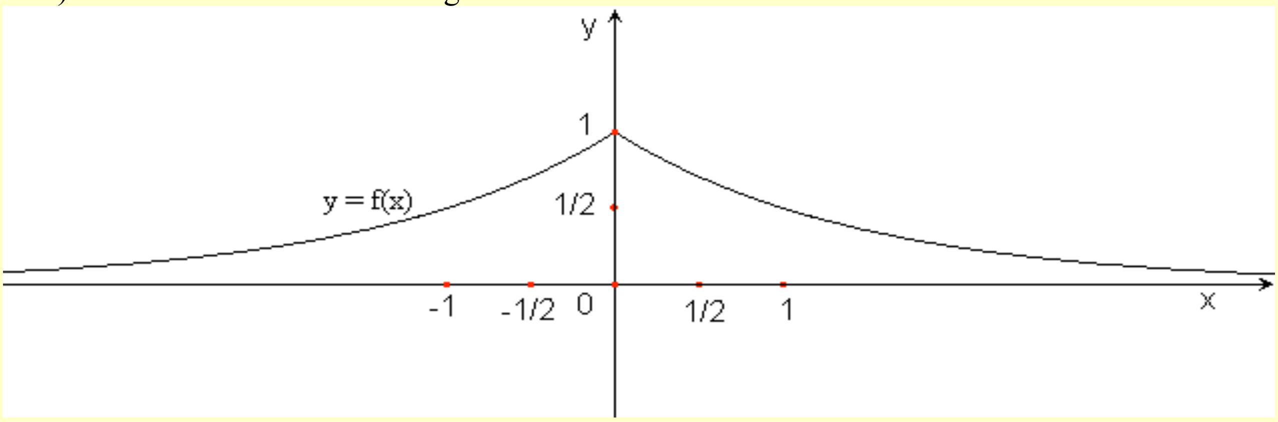
Per approfondimenti vedi:
A.Maffini :3-2000, Un’indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria - Rivista di Matematica dell’Università di Parma (6) 3* (2000)

A. Maffini: 2000, Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore - Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000
F. Furinghetti, A. Somaglia: 1994, Uno studio longitudinale sulle funzioni, B. Piochi (Ed.) Funzioni, limiti, derivate, IRRSAE Toscana, Firenze, 1994
Andreini M., Manara R., Prestipino F.: 1999, Matematica controluce, Vol 3-I; McGrawHill-pag.E94

1.2.4.1. Attività: Lettura di grafici

Ambito concettuale: Grafico di funzioni
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) destabilizzare l'idea della univocità di lettura di un grafico;
2) rapporto grafico con l'infinito;
3) abituare ad analizzare in modo critico il testo di una richiesta.
Modalità di presentazione: descritte nella scheda.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

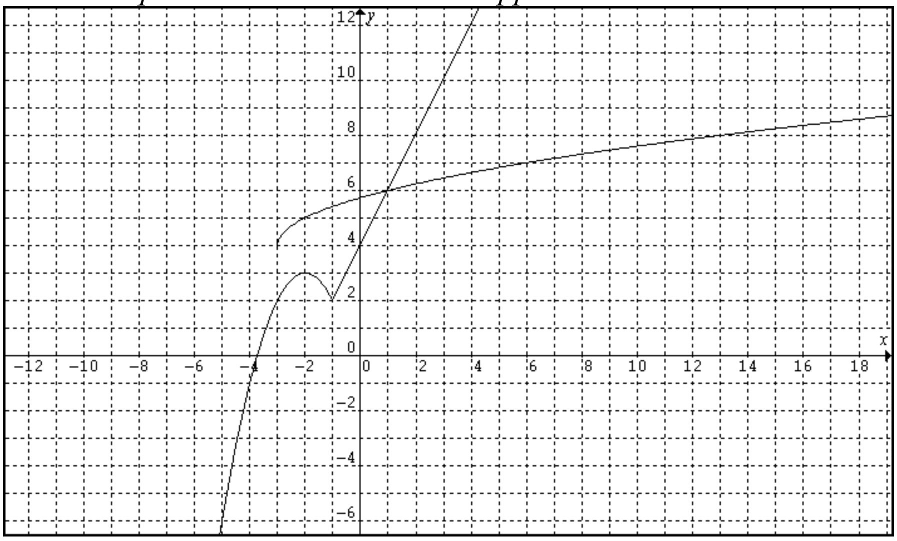
1) Dall'osservazione del grafico della funzione f riportato sotto determina:
   a) Dominio e codominio [qui codominio è inteso come insieme delle immagini] della funzione f.
   b) L'immagine di 0 e di 1.
   c) L'insieme delle controimmagini di 1/2.



Ti sembra che le richieste precedenti abbiano un'unica risposta?
Viceversa, ritieni che le informazioni che ti sono date siano esaurienti?

Esercizio 1 (proposto in una verifica di una terza liceo scientifico a indirizzo PNI)

Trova le equazioni delle curve sotto rappresentate



Sia y=f(x) la funzione il cui grafico passa per il punto (0,4) e y=g(x) la funzione il cui grafico passa per (-3,4)
Utilizza il grafico per risolvere f(x)<g(x).
Rappresenta il grafico della funzione y=|f(x)|

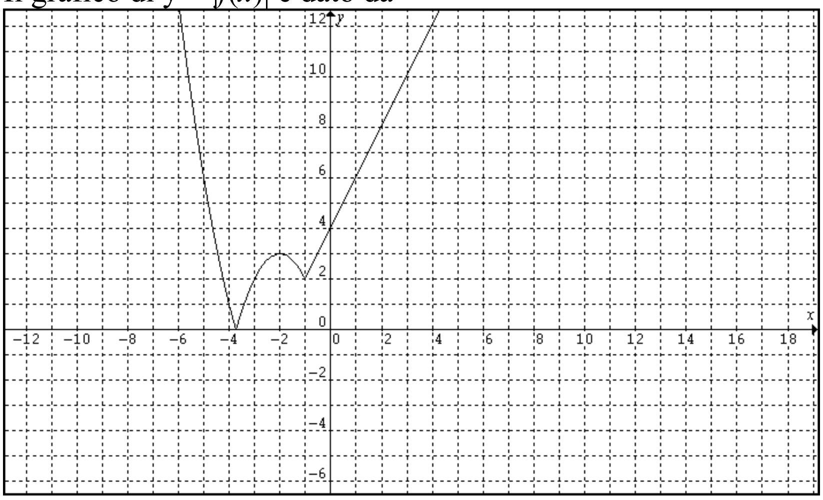
Risoluzione

$$f(x) = \begin{cases} 3-(x+2)^2 & x < -1 \\ 2x+4 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$g(x) = 4 + \sqrt{x+3}$$

Dal grafico, $f(x) < g(x)$ per $-3 \leq x < 1$

Il grafico di $y = |f(x)|$ è dato da



Le maggiori difficoltà evidenziate:

1) riconoscimento delle condizioni necessarie per la determinazione delle equazioni delle curve, riferentesi comunque a modelli noti.

2) Difficoltà nel vedere la funzione il grafico della funzione f come quello di un'unica funzione. Rispetto a questo tipo di difficoltà vale la pena sottolineare come anche la derivabilità e non solo la condizione di continuità sia un forte vincolo alla percezione del concetto di funzione.

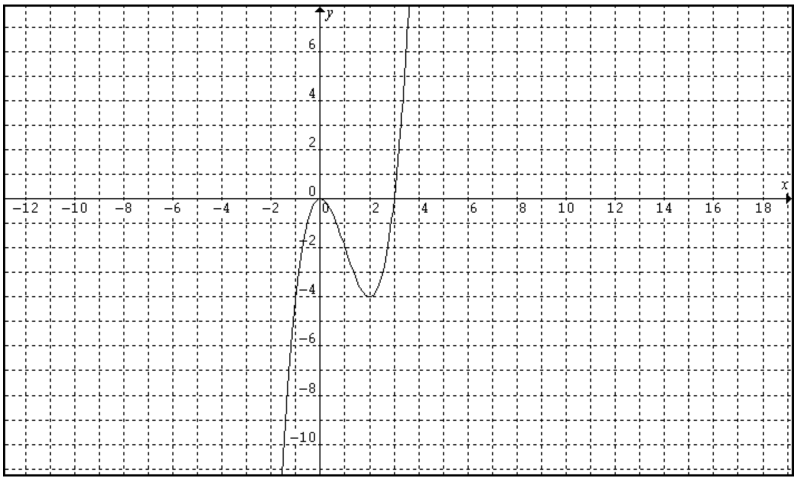
3) Nella risoluzione grafica della disequazione, diversi studenti non hanno messo -3 come estremo sinistro dell'intervallo delle soluzioni.

Esercizio 2. (Proposto in una verifica di una classe terza di un liceo scientifico di indirizzo PNI)

I punti P(2-2t,t-3) e P'(2t-3,5-t) si corrispondono in una traslazione τ di vettore $\vec{v}$ *=<2a+5,1-3a>.*

a) Determina i parametri t e a, le equazioni della traslazione τ e le coordinate di P e P'.

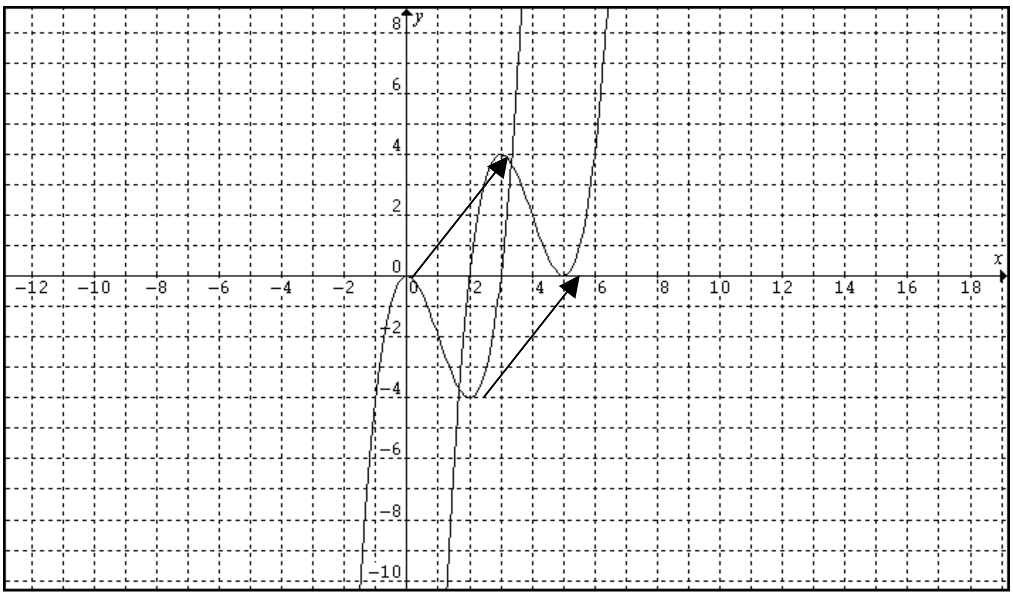
b) Applica la traslazione ottenuta alla curva sotto rappresentata e disegna approssimativamente il grafico della curva corrispondente, motivando il procedimento seguito:



NB. Le cubiche non erano state ancora introdotte.

Soluzioni:

a=-1, t=2, $\vec{v}$ *=<3,4>; grafico traslato:*



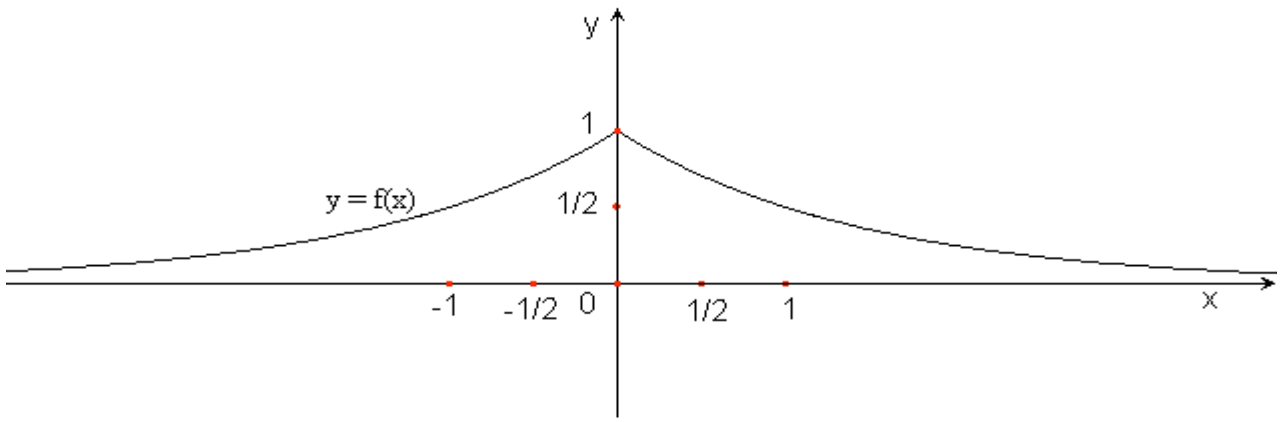
Maggiore difficoltà palesata dagli studenti:

Alcuni studenti, anziché procedere graficamente nella traslazione della curva, ne hanno cercato l'equazione vedendola come se fosse formata da due rami di parabola per poi applicare l'equazione della traslazione alle equazioni delle parabole così ottenute.

Esercizio 3.

1) *Dall'osservazione del grafico della funzione f riportato sotto determina:*

a) *Dominio e codominio* [qui codominio è inteso come insieme delle immagini] *della funzione f.*
b) *L'immagine di 0 e di 1.*
c) *L'insieme delle controimmagini di 1/2.*



Commento: nella richiesta precedente, comune a diverse tipologie di esercizi, si parla del grafico della funzione *f* e non di una sua parte. Questo potrebbe indurre l'alunno a ritenere, legittimamente, che il grafico della funzione è solo ciò che si vede. Quindi potrebbe essere portato a rispondere che il dominio è un intervallo chiuso e limitato (ad esempio [-5;5]) e che il codominio è, ad esempio, [1/8; 1], contro le aspettative dell'insegnante che probabilmente si aspetta **R** e]0;1]. Non è superfluo osservare che in quest'ultimo caso è richiesto che l'alunno riconosca nell'asse delle ascisse un asintoto orizzontale, con conseguenti sconfinamenti nel concetto di infinito e di limite.

Quanti alunni, nel caso la richiesta fosse fatta da un insegnante diverso da proprio (e quindi non condizionati dalle ritenute aspettative dell'insegnante) risponderebbero in un modo o nell'altro?

Un altro aspetto legato a richieste "al finito" con la pretesa dell'assolutezza sono da vedere nella ricerca delle controimmagini di ½: se infatti il dominio fosse **R** nessuno può garantire sulla base del solo disegno mostrato che la curva non possa avere altri punti che hanno ½ come ordinata, a meno di non ritenere "benigna" la natura.

Esercizio 4.

(da Andreini, Manara, Prestipino: Matematica controluce, Vol 3-I; McGrawHill 1999-pag.E94)

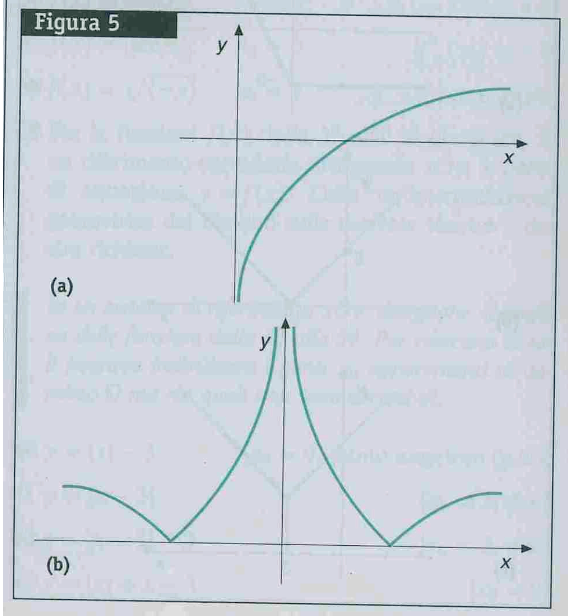
56 $y = \ln|x+1|$ [derivabile $\forall x \in \mathrm{D} \equiv \{x \neq -1\}$]

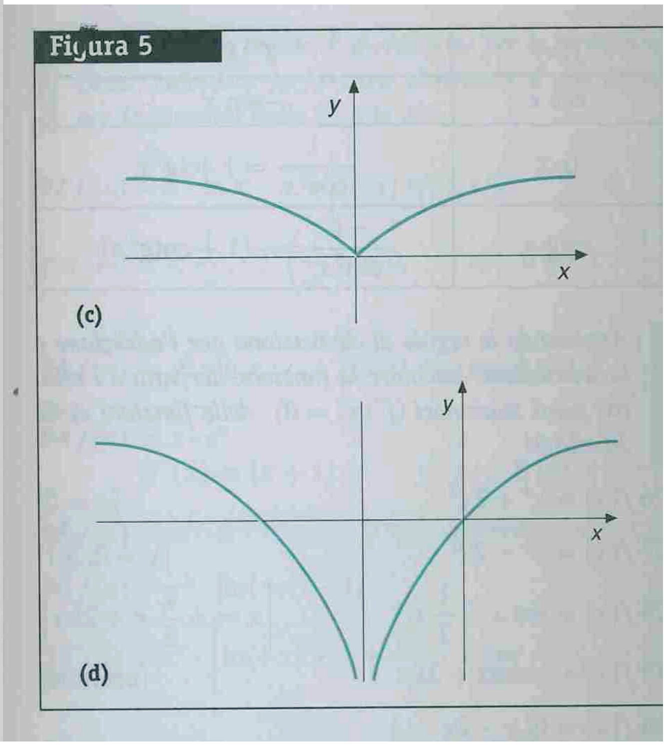
57 $y = \ln(|x|+1)$ [$x_0 = 0$, p. a.]

58 $y = |\ln|x||$ [$x_0 = \pm 1$, p.a.]

59 $y = \ln\sqrt{x}$ [derivabile $\forall x \in \mathrm{D} \equiv \{x > 0\}$]

64 Nella figura 5 sono riportati i grafici delle funzioni dalla 56 alla 59 del precedente gruppo di esercizi: associare grafico a funzione.





L'esercizio a cui si vuole fare riferimento è il n° 64. Da osservare, marginalmente, il modo con cui vengono scritti i domini negli esercizi 56 e 59.

Inutile dire che ciò che è riportato nei due esercizi precedenti è solo una parte del grafico della funzione.

PARTE 2 - IL CONCETTO E LA DIDATTICA DEL LIMITE

a cura di Angela Rizza

2.1. *Necessità di un approccio precoce*

Molti studi evidenziano l'importanza di far precedere l'introduzione formale di concetti matematici complessi come quello di *limite* da attività che consentano all'allievo di esplicitare e mettere in discussione le proprie idee, ancora informali ed intuitive, che derivano dall'esperienza concreta e che coinvolgono aspetti inerenti al concetto stesso. Il fatto che, ad esempio, il termine "*limite*" sia utilizzato correntemente nella lingua italiana fa sì che l'allievo che incontra per la prima volta questo concetto matematico, ne possieda già una immagine mentale, (ad esempio quella di una barriera che non si può oltrepassare) che può entrare in conflitto con le nuove nozioni che via via vengono apprese. (per un approfondimento su questi aspetti si veda Grugnetti, Rizza et al., 1999 e Andriani et al., 1999)

Molte sono le attività che possono favorire un approccio graduale al concetto di limite, in particolare:

- – sostenere lo sviluppo delle intuizioni più favorevoli, presenti fin dai primi anni di scuola,
- – correggere le immagini parzialmente errate che possono ostacolare l'apprendimento.

Ne proponiamo alcune elaborate all'interno del gruppo *zeroallazero*, che è inserito nell'Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica, operante presso il Dipartimento di Matematica di Parma e riunisce docenti di tutti i livelli scolastici. Attualmente i membri del gruppo sono: Maria Felicia Andriani, Silvia Castagnoli, Carlo Colombini, Silvia Dallanoce, Rossana Falcade, Alberto Ferrari, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, Achille Maffini, Carlo Marchini, Fiorenza Molinari, Francesca Pezzi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

Per ogni attività che presentiamo indichiamo l'ambito concettuale di riferimento, gli obiettivi, le modalità di presentazione e, nel caso vi sia stata una sperimentazione nelle classi, qualche osservazione sui risultati ottenuti. Chiediamo la collaborazione di tutti quelli che utilizzeranno questo materiale per estendere ed approfondire tale analisi a posteriori.

Bibliografia

Andriani, M.F, Dallanoce, S., Grugnetti, L., Molinari, F., Rizza, A.: 1999, 'Autour du concept de limite' in F. Jaquet (ed.) *Proceedings of CIEAEM 50,* Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335

Grugnetti, L., Rizza, A., Bedulli, M., Foglia, S., Gregori, S.: 1999, 'Le concept de limite: Quel rapport avec la langue naturelle?' in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50 , Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318

2.1.1. Attività del bersaglio

Si tratta di un gioco, basato sul concetto di approssimazione: l'insegnante disegna un punto su un foglio formato A4 e gli allievi devono, sul loro foglio, disegnare a loro volta un punto che, una volta sovrapposti i fogli, coincida con quello dell'insegnante.

L'attività ha lo scopo di introdurre il tema dell'approssimazione: il punto dell'insegnante rappresenta un valore esatto ma difficilmente raggiungibile, i punti degli allievi costituiscono varie approssimazioni di tale valore. L'attività induce a riflettere sull'esistenza di una pluralità di valori approssimati e sulla necessità di stabilire un criterio che permetta di confrontarli e di valutare la qualità dell'approssimazione. (per maggiori dettagli vedi Falcade, Rizza, 2003)

Bibliografia

Falcade, R., Rizza, A.: 2003, 'Approccio intuitivo al concetto di limite', L'Educazione Matematica, Anno XXIV, serie VII, Vol.1, n.2, 15-37

2.1.1.1. Il bersaglio

Ambito concettuale: approssimazione come progressivo avvicinamento ad un punto
Livello: scuola elementare (secondo ciclo), media e superiore
Obiettivi:

1) destabilizzare la certezza di poter sempre determinare esattamente il risultato di un problema;
2) mettere in discussione la potenza esclusiva e assoluta delle formule nella risoluzione di problemi;
3) spostare l'attenzione dalla ricerca di un risultato esatto a quella di un risultato accettabile, in base alla qualità dell'approssimazione operata.

Modalità di presentazione: descritte nella scheda

IL GIOCO DEL BERSAGLIO

- Agli allievi viene consegnato un foglio A4, sul quale segnano il loro numero d'ordine nell'elenco alfabetico.

- L'insegnante, alla presenza degli studenti, segna sul proprio foglio un punto in una posizione a suo piacimento ed afferma (eventualmente prospettando un premio) che vince questo gioco chi, tra loro, saprà rappresentare sul proprio foglio un punto in una posizione identica a quello dell'insegnante.

- Gli allievi eseguono il loro "compito" e il docente su un foglio di carta velina (o forando il foglio in corrispondenza) rappresenta la nuvola di punti, numerandoli per poter riconoscere la posizione relativa a ciascuno dei ragazzi.

- Nessuno (si spera) vince.

- L'insegnante dopo aver annunciato il risultato "negativo" , evidenzia gli aspetti positivi e in qualche caso ineluttabili della difficoltà di ritrovare un risultato assolutamente preciso.

- Invita a questo punto gli studenti a decidere una distanza al di sotto della quale considerare accettabili i punti. Questa scelta avviene "al buio" senza che gli allievi vedano quanto è caduto lontano il loro punto. Se non è facile trovare un valore unico si possono prendere diverse distanze e classificare i punti in gruppi a seconda della loro vicinanza dal bersaglio, così da avere una specie di graduatoria che nel disegno troverà la sua rappresentazione in differenti circonferenze concentriche (come nei veri bersagli)

- L'insegnante mostra chiaramente a ciascun allievo dove ha collocato il punto rispetto al bersaglio.

- Utilizzando questa informazione gli studenti sono invitati a fare un secondo e poi un terzo tentativo; si avvicineranno maggiormente al bersaglio e questo porterà (su eventuale invito dell'insegnante) a restringere ulteriormente il "livello di accettabilità", quindi la misura del raggio della 1° circonferenza .

- Discussione finale, che si conclude con la richiesta di rispondere per iscritto (a casa) ad una domanda del tipo: "Alla luce dell'attività svolta, perché si può accettare un risultato non esatto? Quando?"

Osservazioni a posteriori

L’attività è stata proposta in 7 classi, dalla III media alla IV superiore. Gli obiettivi si possono considerare raggiunti; tuttavia, il contesto di gioco e l’assenza di effettive misure, hanno qualificato l’attività agli occhi degli studenti come “non-matematica”. È pertanto necessario che questa attività sia proposta insieme ad altre di contenuto più esplicitamente matematico (ad esempio quelle relative alla misura) e che attraverso una discussione si arrivi ad individuare analogie fra i vari casi.

2.1.2. Attività collegate alla misura

I problemi legati alla misura (di lunghezze, di aree, di volumi) sono presenti nei programmi in tutti i livelli scolastici. Solitamente però, con qualche eccezione nella scuola elementare, essi si riducono al calcolo di perimetri, di aree o di volumi di figure particolari (poligoni, cerchio, poliedri, solidi di rotazione) attraverso formule specifiche. Questa impostazione alimenta negli allievi la convinzione che "*ogni problema matematico si risolva con una formula o un algoritmo particolare*" e che non sia del tutto lecito, in matematica, utilizzare metodi di approssimazione. Tale convinzione appare fortemente limitativa e può costituire un ostacolo per l'apprendimento del concetto di limite e di tutta l'analisi infinitesimale, che sostanzialmente si fonda proprio sull'idea di "avvicinamento" piuttosto che di "raggiungimento" di un obiettivo.

Le attività che seguono riguardano lunghezze di curve e aree di figure non regolari e pongono pertanto il problema di utilizzare manipolazioni e metodi empirici al posto di rassicuranti formule e regole. Le tecniche utilizzate forniscono necessariamente risultati approssimati, che diventano sempre migliori solo immaginando un "raffinamento" del metodo di misura scelto.

Pur con alcuni limiti, derivanti dal fatto che il piano "fisico" su cui si richiede di operare in queste attività tende a confondersi con quello "matematico" su cui si richiederà poi di costruire i concetti dell'analisi1[1], riteniamo che le attività proposte possano contribuire a mettere in crisi certe rigidità derivanti da un insegnamento troppo basato su formule e calcoli e favorire l'acquisizione di una mentalità più flessibile e aperta che legittimi anche in matematica il ricorso a metodi di approssimazione.

Per maggiori dettagli circa le prime due attività si veda Alberti et al., 2000, per la terza Falcade, Rizza, 2001, per la quarta Falcade, Rizza, 2003.

2.1.2.1. Il portale

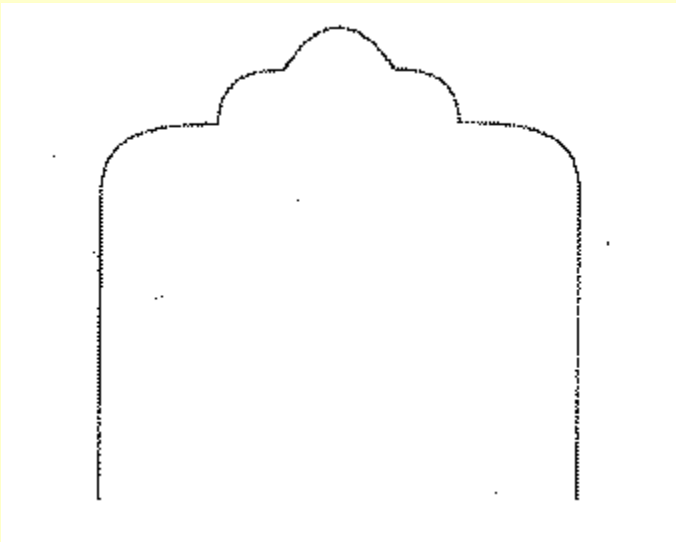
Ambito concettuale: misura della lunghezza di una curva
Livello: scuola elementare (secondo ciclo), media e superiore
Obiettivi:

1) attivare la ricerca di strategie che non si possono basare sull'applicazione di formule;
2) destabilizzare la certezza di poter sempre determinare esattamente il risultato di un problema;
3) assumere la consapevolezza che il risultato ottenuto operativamente è necessariamente approssimato;
4) capire che è possibile scegliere fra più metodi di approssimazione o applicare uno stesso metodo con successivi raffinamenti, rendendosi conto di ottenere risultati con diversi gradi di precisione.

Modalità di presentazione: l'attività può essere proposta individualmente o a piccoli gruppi; gli allievi devono disporre di strumenti da disegno (carta, matita, riga o squadra).

Una sfida

E' necessario misurare il contorno di questo portale



Hai a disposizione solo un righello e devi misurare nel modo più preciso possibile.

Come pensi di fare?

Spiega il procedimento che hai scelto.

Osservazioni a posteriori

L'attività è stata proposta ad un campione di circa 300 allievi di tutti gli ordini scolastici; i risultati confermano l'esistenza di convinzioni molto forti, che tendono a "radicalizzarsi" col passare degli anni: in diversi protocolli, soprattutto di allievi della scuola superiore, emerge il ricorso "a tutti i costi" a formule o a teoremi noti; quasi totalmente manca la consapevolezza dell'approssimazione compiuta e a maggior ragione l'idea dell'esistenza di vari gradi di precisione.

Inoltre sono emerse considerazioni sulla formulazione della scheda:

- la particolare forma del portale ha indotto diversi allievi a riconoscere archi di circonferenza e ad applicare le relative formule, vanificando di fatto l'obiettivo 1;

- la strategia, molto seguita soprattutto da allievi della scuola elementare, di disporre un filo lungo il contorno del portale e successivamente misurarlo, non ha favorito il raggiungimento degli obiettivi 2 e 3: con questo metodo, più che con altri, gli allievi non sembrano consapevoli di aver ottenuto un valore approssimato. C'è sempre infatti, da parte degli allievi, molta fiducia nella possibilità di misurare "esattamente" la lunghezza di un segmento.

2.1.2.2. La macchia
Ambito concettuale: misura dell’area di una figura a contorno curvilineo mediante quadrettature
Livello: scuola elementare (secondo ciclo), media e superiore
Obiettivi:

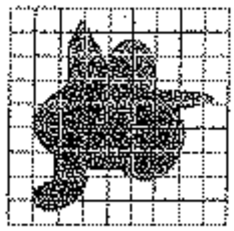
1) legittimare il ricorso a strategie non basate sull’applicazione di formule (in questo caso la quadrettatura);
2) assumere la consapevolezza che la misura di aree mediante quadrettature è necessariamente approssimata;
3) rendersi conto che le due quadrettature forniscono risultati approssimati con un diverso grado di precisione;
4) intuire che, attraverso quadrettature sempre più fini, si può -almeno teoricamente- avvicinarsi sempre di più al valore esatto della misura dell’area.

Modalità di presentazione: l’attività può essere proposta individualmente o a piccoli gruppi; gli allievi devono disporre di strumenti da disegno (carta, matita, riga o squadra).

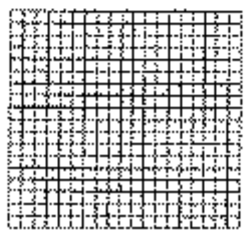
Che bella figura!

Mario e Giovanna devono trovare l'area di questa figura:

Mario propone di misurare la superficie con carta a quadretti di questo tipo:



Giovanna con carta a quadretti di questo tipo:



E tu che cosa faresti? Hai altre proposte?
Quanto misura secondo te la superficie della figura? Spiega come l'hai trovata.

Osservazioni a posteriori

L’attività è stata proposta ad un campione di circa 300 allievi di tutti gli ordini scolastici; anche in questo caso, come nella scheda del portale, si osserva il ricorso a formule o il tentativo di ricondursi a figure note, soprattutto in allievi della scuola media e superiore: in alcuni casi il suggerimento della quadrettature viene ignorato e si procede ad una decomposizione della figura in poligoni a cui si applicano le formule dell’area. Manca quasi totalmente la consapevolezza dell’approssimazione compiuta e l’idea che i vari metodi consentono un diverso grado di precisione.

2.1.2.3. Il segmento parabolico

Ambito concettuale: misura dell'area di una figura a contorno curvilineo mediante ricoprimento
Livello: scuola media e superiore
Obiettivi:

1) legittimare il ricorso a strategie non basate sull'applicazione di formule (in questo caso il ricoprimento mediante strisce di carta);
2) assumere la consapevolezza che la misura di aree mediante ricoprimento è necessariamente approssimata;
3) rendersi conto che le varie strisce forniscono risultati approssimati con un diverso grado di precisione;
4) intuire che, attraverso strisce sempre più strette, si può -almeno teoricamente- avvicinarsi sempre di più al valore esatto della misura dell'area.

Modalità di presentazione: l'attività è pensata per piccoli gruppi di lavoro; gli allievi devono disporre di strumenti da disegno (carta, matita, riga o squadra), di forbici, colla, calcolatrice. A ciascun gruppo vengono forniti un cartoncino formato A4 dove è rappresentato un segmento parabolico e numerose strisce di carta di differente larghezza (da 0,5cm a 4cm) ottenute ritagliando verticalmente fogli di carta A4.

Lavorando in gruppo ed utilizzando tutto il materiale a vostra disposizione rispondete alle seguenti domande:

1. Quale metodo adottereste per calcolare l'area della regione di piano?
2. Il vostro metodo fornisce una misura esatta o un'approssimazione?
3. Il risultato ottenuto con il vostro metodo è migliorabile? Se sì,come?

Osservazioni a posteriori

L'attività è stata proposta in una sola classe terza superiore; mancano pertanto gli elementi per una effettiva analisi a posteriori. L'attività ha comunque favorito la proposta di diversi ricoprimenti (con triangoli, rettangoli o trapezi) che sono stati confrontati e valutati in base alla possibilità o meno di poter essere iterati e quindi fornire approssimazioni sempre migliori. Interessante è risultato il confronto fra l'attività proposta in classe e una attività simile effettuata in laboratorio con il supporto di Cabri-géomètre.

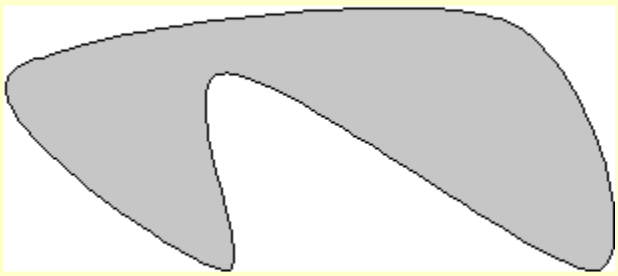
2.1.2.4. Il laghetto

Ambito concettuale: misura dell'area di una figura a contorno curvilineo
Livello: scuola elementare (secondo ciclo), media e superiore
Obiettivi:

1) collegare l'esistenza della misura dell'area alla forma della figura più che all'esistenza di formule per calcolarla;
2) attivare la ricerca di strategie di misura che non si possono basare sull'applicazione di formule;
3) destabilizzare la certezza di poter sempre determinare esattamente il risultato di un problema;
4) assumere la consapevolezza che il risultato ottenuto è necessariamente approssimato;
5) capire che è possibile scegliere fra più metodi di approssimazione o applicare uno stesso metodo con successivi raffinamenti, rendendosi conto di ottenere risultati con diversi gradi di precisione;
6) intuire che, per esempio attraverso quadrettature sempre più fini, si può -almeno teoricamente- avvicinarsi sempre di più al valore esatto della misura dell'area.

Modalità di presentazione: l'attività può essere proposta individualmente o in piccoli gruppi; gli allievi devono disporre di strumenti da disegno (carta a quadretti o millimetrata, matita, riga o squadra).

Immagina di vedere dall'alto un laghetto di montagna e di disegnarlo ottenendo la figura seguente.



L'area della figura grigia si può misurare? Se sì, come? Se no, perché?

Osservazioni a posteriori

L'attività è stata proposta in 15 classi dalla quinta elementare alla quarta superiore; gli obiettivi si possono considerare in parte raggiunti. La mancanza di formule (obiettivi 1 e 2) viene più volte citata, sia per motivare l'affermazione che "l'area non si può misurare", sia per giustificare di non saperla misurare pur riconoscendone l'esistenza ("non conosco le formule necessarie"). Pochi allievi ammettono esplicitamente che il metodo seguito produce un risultato approssimato (obiettivi 3 e 4) e anche quelli che lo fanno, sembrano attribuire all'approssimazione una connotazione negativa, testimoniata dall'utilizzo del termine "approssimativo", al posto di "approssimato". L'idea dinamica di iterazione e di avvicinamento sempre migliore (obiettivi 5 e 6) è presente in pochissime risposte.

2.1.3. Attività con le progressioni geometriche

Le progressioni geometriche consentono molte applicazioni in matematica, anche a livello elementare: esse possono dunque costituire una delle prime occasioni di approccio a processi infiniti convergenti o divergenti e contribuire alla formazione di una prima idea di limite.
Un primo semplice esempio lo si incontra alle scuole medie nella considerazione dei cosiddetti numeri decimali illimitati periodici, che si ottengono nella divisione tra due numeri naturali quando il divisore contiene fattori primi diversi da 2 e 5, che non sono presenti nel dividendo. Si consideri la divisione tra 57 e 55, il cui risultato si può scrivere come 1,03636363636…, con periodo 36. Utilizzando il linguaggio delle progressioni geometriche, la parte decimale di tale numero si può considerare come somma di una progressione geometrica di primo termine 0,036 e ragione 1/100, i cui termini successivi al primo sono dati da 0,00036, 0,0000036, 0,000000036, ecc. Tale somma si ottiene usando la formula classica per una progressione geometrica di ragione minore di 1, quindi convergente, data da $S=a_0/(1-q)$, $S=0,036/(1-1/100)=36/990$. Per ottenere il numero completo bisogna addizionare a questa frazione la parte a sinistra della virgola (mantissa del numero 1,03636363636…) ed alla fine si ottiene 1+36/990=(990+36)/990=1026/990=(1036-10)/990. Si giustifica così la consueta regola della costruzione della frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico, come frazione avente al numeratore il numero che si ottiene considerando le cifre della parte intera, dell'antiperiodo e del periodo meno il numero composto dalle cifre che precedono il periodo, e al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.
Rispetto al problema della misura, l'argomento delle progressioni geometriche risulta più semplice ed immediato perché opera nel discreto e coinvolge prevalentemente un infinito di tipo potenziale. È inoltre possibile supportare l'approccio aritmetico con la visualizzazione: infatti, applicando più volte ad una figura iniziale un'omotetia di rapporto fissato (per esempio mediante Cabri), si ottengono grandezze (lunghezze, perimetri, aree) in progressione geometrica.

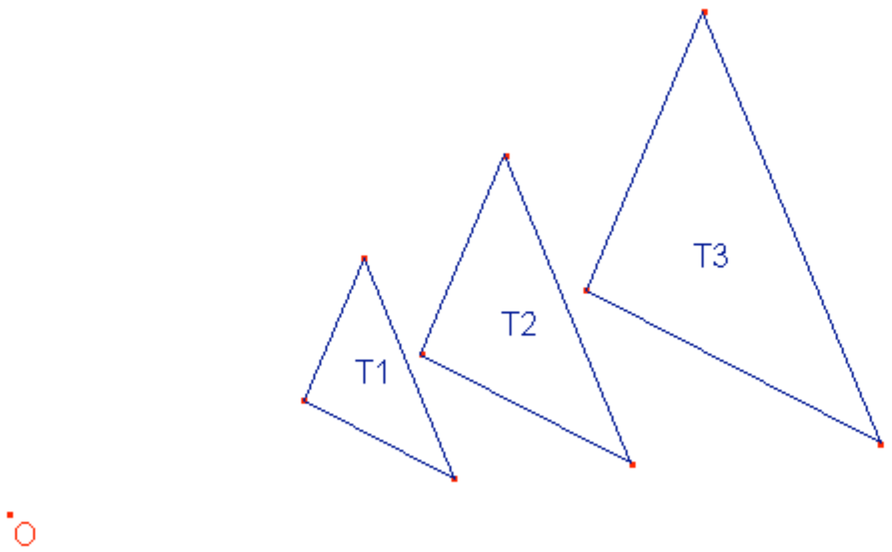


Figura ottenuta con Cabri applicando al triangolo T1, e successivamente al triangoli T2, un'omotetia di rapporto 1,4 e centro O.

Questo tipo di visualizzazione dinamica offre la possibilità di costruire successioni passo a passo e di esplorarne il comportamento “in entrambi i sensi”, eventualmente invertendo il rapporto di omotetia.

Basandoci su questa possibilità, proponiamo alcune attività finalizzate alla formazione di una prima idea intuitiva di *convergenza* e *divergenza*, proponibili anche molto prima di aver introdotto formalmente il concetto di limite.

Per maggiori dettagli si veda Grugnetti, Rizza et al., 2002.
Triangoli e quadrati: vai all’attività
La spirale: vai all’attività
La scala: vai all’attività

Bibliografia

Grugnetti, L., Rizza, A., Dallanoce, S, Foglia, S., Gregori, S., Marchini, C., Molinari, F., Piccoli, A., Vannucci, V.: 2002, ‘Piccole intuizioni crescono: alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo’, in Malara N.A., Marchini, C., Navarra, G., Tortora, R. (eds.) *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell’obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna, 127-138

2.1.3.1. Triangoli e quadrati

Ambito concettuale: progressioni geometriche
Livello: scuola media e superiore
Obiettivi:

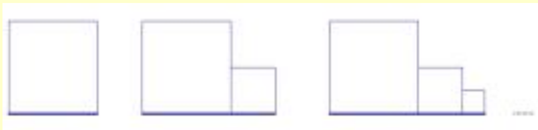
1) favorire, mediante la visualizzazione di grandezze in progressione geometrica, la formazione di un'idea di *processo infinito*;
2) comprendere intuitivamente la differenza fra un processo *convergente* e uno *divergente*;
3) favorire, tramite l'immaginazione di una conclusione di tali processi, la formazione di un'idea di *limite*.

Modalità di presentazione: l'attività può essere proposta individualmente o in piccoli gruppi. Successivamente all'attività in classe, si può svolgere un'attività analoga in laboratorio con Cabri, disegnando le figure tramite successive omotetie e manipolandole dinamicamente. Tale costruzione consente anche di variare il rapporto k di omotetia e di osservare la convergenza per tutti i valori di k compresi fra 0 e 1.

Osserva la sequenza. Pensa di continuarla finché la tua immaginazione te lo consente.

1.A Cosa succede di volta in volta al perimetro delle figure?

1.B Com'è il perimetro dell'"ultima" figura che riesci a immaginare?



Osserva la sequenza. Pensa di continuarla finché la tua immaginazione te lo consente.

2.A Cosa succede di volta in volta alla lunghezza della base (segmento più spesso)?

2.B Com'è la lunghezza della base dell'"ultima" figura che riesci a immaginare?

Osservazioni a posteriori

L'attività è stata proposta in 11 classi dalla prima alla terza media per un totale di 236 alunni. Le risposte hanno evidenziato un discreto controllo del processo, ma più nel senso di confrontare una figura con la successiva che non di considerare contemporaneamente "tutte" le figure (obiettivo 1). Diverse risposte esprimono, ovviamente non in termini rigorosi, una differenza fra le due situazioni, anche se non sempre viene correttamente individuata la quantità variabile (obiettivo 2). L'idea di una figura-limite (obiettivo 3) viene espressa con parafrasi e quasi sempre in senso potenziale (es. molto grande, sempre più grande, non molto lunga…).

2.1.3.2. La spirale

Attività riportata in diversi testi, ad esempio in (Calame, Jaquet, 1993) e in (Maraschini, Palma, 1996).

Ambito concettuale: progressioni geometriche

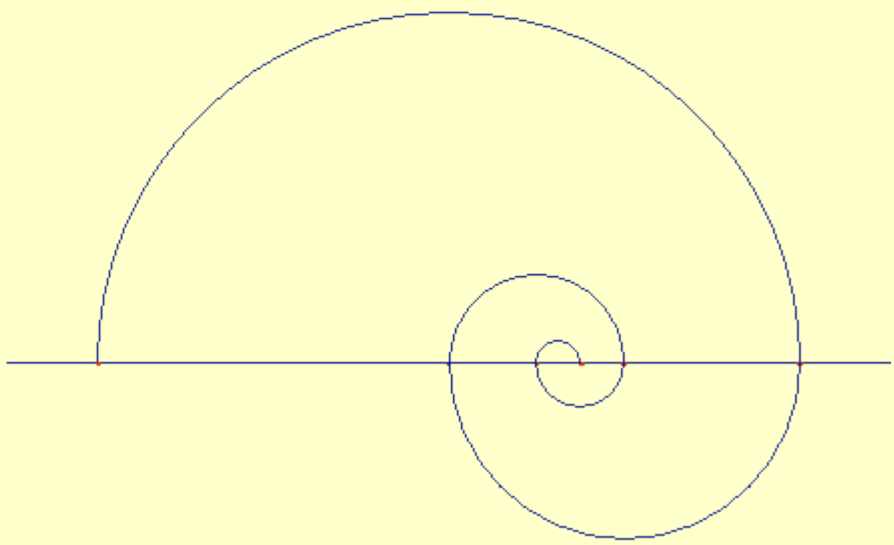
Livello: scuola media e superiore

Obiettivi:

1) favorire, mediante la visualizzazione di grandezze in progressione geometrica, la formazione di un'idea di *processo infinito*;
2) comprendere intuitivamente l'idea di processo *convergente* e favorire, tramite l'immaginazione di una conclusione di tale processo, la formazione di un'idea di *limite*;
3) cercare strategie per calcolare il *valore* di tale limite, esaminando opportune somme infinite; provocare quindi un conflitto fra una somma di infiniti addendi e il valore finito del limite intuito dal disegno.

Modalità di presentazione: l'attività può essere proposta individualmente o in piccoli gruppi. Successivamente all'attività in classe, si può svolgere un'attività analoga in laboratorio con Cabri, disegnando le figure tramite successive bisezioni di segmenti e manipolandole (ad esempio ingrandendo la figura iniziale per poter continuare a costruire semicirconferenze).

Aggiungendo ad una semicirconferenza di raggio 1, una semicirconferenza di raggio ½, poi un'altra di raggio ¼, e così via si ottiene la seguente spirale:



1. 1. Quale sarà la lunghezza della spirale?
2. 2. Quale sarà la distanza fra il punto di partenza e quello di arrivo?

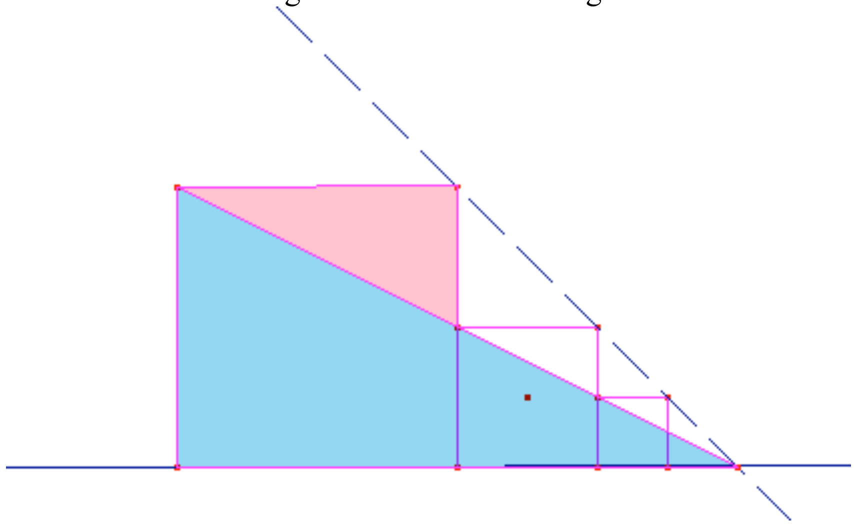
Soluzione

La lunghezza della spirale si ottiene da una somma di infiniti termini in progressione geometrica (serie geometrica) $\pi + \pi/2 + \pi/4 + \pi/8 + \ldots$, di ragione 1/2 tale serie risulta convergente al limite $a_1/(1-q)$ per ogni valore della ragione q compreso fra 0 e 1: la lunghezza della spirale è quindi $2.\pi$

Per ottenere invece la distanza fra il punto iniziale e quello finale, si può fissare un sistema di ascisse di origine il punto iniziale: in tale sistema l'ascissa del punto finale è data da: $2-1 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + \ldots$ Tale somma infinita può essere riscritta nella forma $1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots$

associando i termini a due a due: essa è ancora una una serie geometrica convergente, la cui somma è 4/3.

Per giustificare la formula $a_1/(1-q)$ della somma di una serie geometrica convergente, ci si può servire di costruzioni geometriche come la seguente:



Se il lato del quadrato iniziale è a, la base della figura è $S=a+a/2+a/4+$... Dalla similitudine dei due triangoli e dalla proporzione S:a=a:$a/2$, si ottiene $S=2a$.

Bibliografia

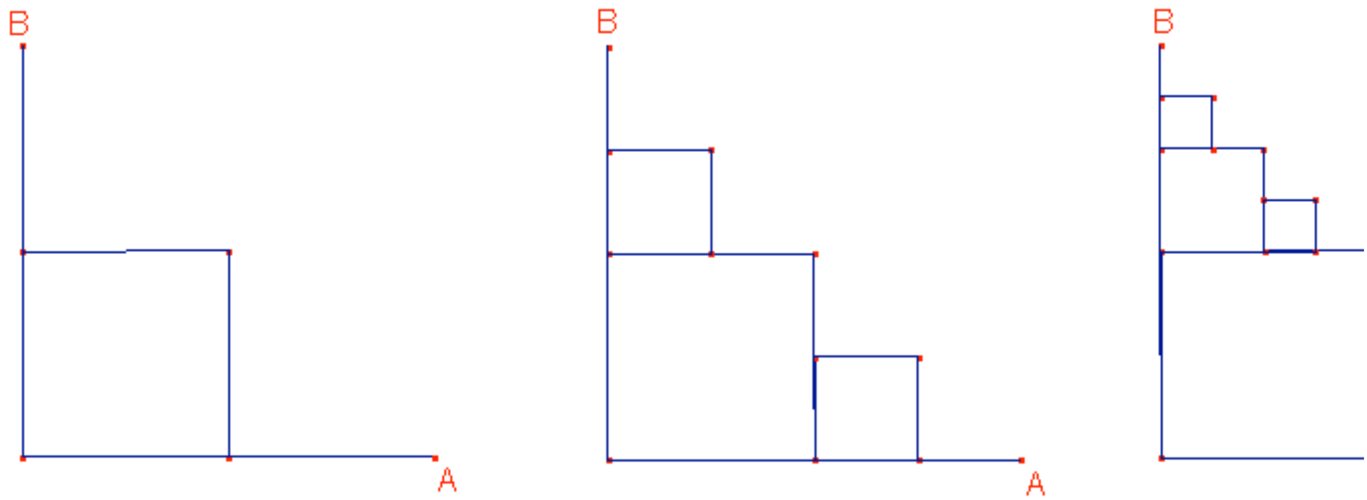
Calame J.A., Jaquet F.: 1993, Mathématique 7-8-9, Méthodologie et Commentaires, Office du matériel scolaire, Neuchâthel

Maraschini W., Palma M.: 1996, ForMat CPL, Paravia.

2.1.3.3. La scala
Attività attribuita a A. Orton; adattamento da (Cornu, 1991).
Ambito concettuale: progressioni geometriche
Livello: scuola media e superiore
Obiettivi:
1) favorire, mediante la visualizzazione di grandezze in progressione geometrica, la formazione di un'idea di *processo infinito*;
2) comprendere intuitivamente la differenza fra un processo *decrescente* e un processo *costante* e favorire, tramite l'immaginazione di una conclusione di tali processi, la formazione di un'idea di *limite*;
3) congetturare, in base alla situazione geometrica, il *valore* dei limiti delle sue successioni;
4) provocare, nel caso della lunghezza della scala, un conflitto a causa della diversità fra il valore del limite dedotto dal disegno e il valore costante dei termini della successione e di conseguenza far emergere la necessità di passare da una *congettura* sul valore del limite ad una *verifica* che il valore ipotizzato sia corretto.

Modalità di presentazione: l'attività può essere proposta individualmente o a piccoli gruppi. Successivamente all'attività in classe, si può svolgere un'attività analoga in laboratorio con Cabri, disegnando le figure tramite successive bisezioni di segmenti e manipolandole (ad esempio ingrandendo la figura iniziale per poter continuare a costruire quadratini).

Aggiungendo ad un quadrato di lato 1, due quadrati di lato ½, poi quattro quadrati di lato ¼, si ottengono le



Immaginando di continuare la sequenza

1. 1. quale sarà l'area della figura "finale"?
2. 2. quale sarà la lunghezza della scala "finale", considerata dal punto A al punto B?

Bibliografia

Cornu B.: 1991, 'Limits', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, 153-166.

2.1.4. Attività relative ai numeri irrazionali

Nella pratica scolastica si insiste molto di più nel fornire strumenti che permettano di operare con i numeri razionali, piuttosto che con quelli irrazionali. Il fatto di privilegiare tale operatività può essere giustificato da tutta una serie di valide ragioni, tra cui la facilità di calcolo (e dunque il poter disporre di più tempo per gli approfondimenti teorici) e l'utilizzo delle calcolatrici o del computer. La scarsa abitudine a trattare i numeri irrazionali si manifesta in modo evidente nel disorientamento degli allievi di fronte a richieste non ordinarie, come quella di risolvere un'equazione di secondo grado il cui discriminante non sia un quadrato perfetto o di scomporre polinomi irriducibili in Q, ad esempio $2x^2-3y^2$. Questi problemi possono essere in parte aggirati "nascondendo" i numeri irrazionali dietro simboli come π, $\sqrt{2}$, log3, ma l'imbarazzo resta nel momento in cui è richiesto di valutare (approssimativamente) tali valori o semplici espressioni che li contengono. Anche questo modo di vedere i numeri razionali e quelli irrazionali come due mondi a parte, ciascuno con le sue regole e le sue proprietà, è un ostacolo alla comprensione della struttura complessiva sull'insieme dei numeri reali.

Può essere quindi utile proporre attività che inducano ad una riflessione sul senso da assegnare a scritture simboliche di numeri irrazionali e sulla necessità, in alcune situazioni, di approssimarli con valori razionali. Quando poi questo si verifica è necessario un controllo sull'approssimazione, introducendo condizioni di accettazione delle approssimazioni raggiunte.

Fogli di carta: vai all'attività
Triangoli equilateri: vai all'attività

2.1.4.1. Fogli di carta

Attività ispirata da (Zaccagnini, 2003)

Ambito concettuale: misura, rapporti irrazionali

Livello: scuola media e superiore

Obiettivi:

1) provocare un conflitto fra il valore teorico del rapporto fra le aree e quello ottenuto sperimentalmente;
2) percepire che anche misure fisiche elementari di grandezze geometriche sono soggette ad incertezze e necessitano di approssimazioni;
3) distinguere fra l'errore sperimentale connesso all'operazione di misura e quello dovuto all'incommensurabilità dei segmenti;
4) calcolare, sulla base di considerazioni geometriche (similitudine), il rapporto fra i lati dei rettangoli e riconoscerlo come numero irrazionale.

Modalità di presentazione: l'attività può essere svolta a piccoli gruppi. A ciascun gruppo vengono forniti un foglio di carta formato A4 e un foglio formato A5. In una prima fase si richiede di misurare i lati del rettangolo con il righello e di calcolare le aree: è probabile che i vari gruppi ottengano valori diversi. In una seconda fase viene mostrata alla classe una confezione di fogli di carta o un blocco con le indicazioni delle misure fornite dai produttori (si possono trovare anche in Word nel menu File-Imposta pagina). In questo caso tutti ottengono gli stessi valori per le aree, ma il rapporto fra le aree non coincide con quello previsto. Può seguire una discussione finalizzata a scoprire che l'errore nasce da una doppia difficoltà: quella dell'incertezza delle misure sperimentali e quella della incommensurabilità delle grandezze (in questo caso i lati del rettangolo).

Calcolate l'area del foglio A5 e del foglio A4 e il loro rapporto.

Considerate la seguente affermazione:

il foglio A5 ha area metà di quella del foglio A4

L'affermazione è vera o falsa e perché?

L'affermazione corrisponde al valore del rapporto che avete trovato nel primo caso? E nel secondo caso? Perché secondo voi?

Discutete fra voi e aggiungete altre vostre considerazioni.

Bibliografia

Zaccagnini A.: 2003, 'Formato A4: aritmetica e geometria con un foglio di carta', L'Educazione Matematica, Anno XXIV, Serie VII, Vol.1, n.1, 47-53.

2.1.4.1. Triangoli equilateri

Ambito concettuale: misura, rapporti irrazionali
Livello: scuola media e superiore
Obiettivi:

1) percepire che anche misure fisiche elementari di grandezze geometriche sono soggette ad incertezze e necessitano di approssimazioni;
2) distinguere fra l'errore sperimentale connesso all'operazione di misura e quello dovuto all'incommensurabilità dei segmenti;
3) calcolare, sulla base di considerazioni geometriche (teorema di Pitagora), il rapporto fra il lato e l'altezza di un triangolo equilatero e riconoscerlo come numero irrazionale.

Modalità di presentazione: l'attività può essere svolta a piccoli gruppi. A ciascun gruppo vengono forniti fogli sui quali gli allievi sono invitati a disegnare con il compasso alcuni triangoli equilateri di diverse dimensioni. Si richiede di misurare il lato e l'altezza dei vari triangoli e il loro rapporto, dal più piccolo al più grande: è probabile che per i vari triangoli si ottengano valori diversi, che costituiscono approssimazioni sempre migliori del rapporto richiesto. Può seguire quindi una discussione finalizzata a scoprire da dove nasce la differenza fra il valore del rapporto ottenuto sperimentalmente e quello teorico dedotto dal teorema di Pitagora. Essa nasce da una doppia difficoltà: quella dell'incertezza delle misure sperimentali e quella dell'incommensurabilità delle grandezze (in questo caso i lati del rettangolo).

Calcolate il rapporto fra il lato e l'altezza dei vari triangoli equilateri. Per i vari triangoli ottenete sempre lo stesso valore del rapporto? Perché? Qual è il valore teorico di questo rapporto? Che relazione c'è fra il valore teorico e quelli ottenuti sperimentalmente? Discutete fra voi e aggiungete altre vostre considerazioni.

2.2. *Vari modi di presentare il concetto e relativi problemi*

2.2.1 Aspetti epistemologici connessi al concetto di limite

Esiste una vasta letteratura relativa agli aspetti didattici ed epistemologici implicati nel concetto di limite. L'articolo (Artigue, 2000) fornisce un quadro ampio e organico delle più recenti ricerche e teorie relative nel campo della didattica dell'analisi e a questo rimandiamo per un approfondimento dell'argomento.

Vogliamo qui sottolineare in particolare due elementi di tale studio che ci sembrano particolarmente importanti in relazione all'apprendimento del concetto di limite e illustrarli attraverso qualche esempio.

Una prima considerazione riguarda gli ostacoli epistemologici (quelli cioè legati alla natura stessa della matematica e pertanto inevitabili[2[1][1]]) implicati nel concetto di limite. Secondo l'impostazione di (Brousseau, 1976) tali ostacoli non devono essere evitati, ma anzi costituiscono una risorsa importante per mettere in discussione, attraverso la proposta di particolari situazioni problematiche, le conoscenze precedentemente acquisite e adattarle in un sistema coerente con quelle che si stanno formando.

Pur nelle diversità di impostazione fra i vari autori (in particolare (Sierpinska, 1985) e (Cornu, 1991)), relativamente al concetto di limite viene condivisa l'idea dell'esistenza di ostacoli epistemologici legati:

1. *"al senso comune della nozione di limite che porta a concezioni persistenti di limite come barriera o come ultimo termine di una progressione o ancora porta a ridurre la convergenza ad un processo strettamente monotòno;*

2. *all'impropria generalizzazione delle proprietà dei processi finiti ai processi infiniti secondo il principio di continuità di Leibniz;*

3. *ad un'eccessiva aderenza al punto di vista geometrico, che da un lato impedisce la chiara identificazione degli oggetti implicati nel processo di limite e delle topologie sulle quali si basano e dall'altro rende difficile il sottile gioco tra i quadri numerici e geometrici nel passaggio al limite;*

4. *a considerazioni metafisiche sull'infinito e il suo statuto in matematica"* (Artigue, 2000)

Per quanto riguarda il primo punto vorremmo sottolineare, tra gli altri, l'importanza degli aspetti linguistici, e in particolare dell'interferenza fra il linguaggio comune e quello matematico che può insorgere nell'utilizzo di espressioni come "limite", "limitato", "tendere verso" (si veda ad esempio:

2[1][1] « Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni on ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concept mêmes » (Brousseau G., 1976) (trad. « Gli ostacoli di origine propriamente epistemologica sono quelli ai quali non si può né si deve sfuggire, per il fatto stesso del loro ruolo costitutivo nella conoscenza specifica. Si possono ritrovare nella storia dei concetti stessi »)

Grugnetti, Rizza et al. 1999). E’ molto importante che gli allievi siano consapevoli delle proprie concezioni implicite e che riescano ad esplicitarle; questo può avvenire solo attraverso la discussione o la proposta di situazioni “destabilizzanti”.

Relativamente al secondo punto, suggeriamo di proporre qualche situazione in cui tale generalizzazione risulta impropria, come il caso di alcune serie indeterminate. Ad esempio una errata applicazione della proprietà associativa alla serie di Grandi 1-1+1-1+…, porta a conclusioni contraddittorie come la convergenza contemporanea a 0, ½, -1, 1.

Analogamente, per il terzo punto, l’attività della scala può costituire un controesempio significativo.

Un secondo elemento su cui si basa la ricerca in didattica dell’analisi riguarda la problematica *processo-oggetto* nell’ambito della teoria sviluppata a partire dalle ricerche di (Sfard, 1992) e (Dubinsky, 1991) e perfezionata da (Tall, 1996). Secondo tale impostazione esistono tre livelli di conoscenza matematica: *azioni*, *processi* e *oggetti* che sono organizzati in strutture indicate come *schemi* (da cui l’acrostico APOS). Un oggetto è costruito tramite l’ “incapsulazione” di un processo, che viene raggiunta quando l’individuo diventa consapevole della totalità del processo, si rende conto di quali trasformazioni possono attuarlo ed è in grado di costruire tali trasformazioni. Tall introduce inoltre la nozione di *procept* per indicare quei simboli matematici che rappresentano nello stesso tempo un processo e l’oggetto che costituisce il risultato di tale processo. Un esempio di *procept* è il simbolo $\lim_{x \to a} f(x)$ che esprime contemporaneamente il processo di “tendere verso” e il valore del limite, ma non fornisce, a differenza ad esempio dei *procept* aritmetici, alcuna informazione su come ottenere il risultato. La definizione ε-δ configura il limite come un processo “disincapsulato” (legato alla *possibilità,* una volta assegnato un ε, di trovare il corrispondente δ), piuttosto che come un oggetto (legato all’esistenza di una funzione δ(ε)).

Inoltre la visione *dinamica* connessa al processo di limite si oppone a quella *statica* richiesta dalla definizione di Weierstrass: il passaggio dall’una all’altra, che sembrerebbe naturale in quanto ripercorre l’evoluzione da un livello più concreto ed esperienziale ad uno più formale, risulta molto delicato e disseminato di difficoltà di vario tipo.

Come esempio di traduzione nella pratica scolastica di questo tipo di problematica, vorremmo richiamare un classico errore di scrittura nel calcolo di un limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-3}{x^3+x+1} = \frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = 2$$

A nostro parere la “dimenticanza” del simbolo di limite nasconde la difficoltà di gestire contemporaneamente un oggetto (il valore del limite), un processo (espresso dalla prima scrittura) e le operazioni algebriche che, in questo caso, li collegano.

Un altro esempio è citato in un articolo (Bagni, 1999): viene proposto il grafico cartesiano di una funzione costante di valore *b* e si chiede se la figura è compatibile con la scrittura $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Meno della metà degli alunni intervistati (di una classe V in cui era già stata introdotta la definizione di limite) afferma la compatibilità: questa difficoltà può essere riferita ancora al collegamento fra il processo (dinamico) di avvicinamento e il concetto (statico) di limite.

Bibliografia

Artigue M.: 2000, 'L'evoluzione delle problematiche nella didattica dell'analisi', La Matematica e la sua didattica, n.4, 380-402

Bagni G.T., 1999, 'Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22B, 4, 353-372

Brousseau G. 1976: 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', Actes CIEAEM « La problematique de l'enseignement des mathématiques », (Louvain-la-Neuve, Belgique), 101-117

Cornu B.: 1991, 'Limits', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, 153-166

Dubinsky E.: 1991, 'Reflective abstraction in advanced mathematical thinking', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers, 95-126

Grugnetti L., Rizza A., Bedulli M., Foglia S., Gregori S.: 1999, 'Le concept de limite: Quel rapport avec la langue naturelle?' in F. Jaquet (ed.), *Proceedings of CIEAEM 50*, Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318

Sfard A.: 1992, 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin', Educational studies in mathematics, Kluwer Academic Publisher, vol. 22, 1-36

Sierpinska A.: 1985, 'Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite', *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble, vol. 6(1), 5-67

Tall D.: 1996, 'Functions and Calculus', in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 289-325

2.2.2. Approccio attraverso le successioni (a cura di A. Maffini)

L'approccio al concetto di limite più seguito dal punto di vista didattico è quello relativo alla costruzione di tabelle in cui la variabile indipendente assume valori di una successione che converge ad un valore e si chiede agli alunni a cosa sembra tendere la variabile dipendente.
Tale approccio cerca di conciliare il concetto di avvicinamento con l'esigenza di generare negli alunni una congettura sul comportamento della funzione e la conseguente necessità di dotarsi di strumenti matematicamente adeguati per verificare tale congettura.
Oltre a questi aspetti, va evidenziato come per mezzo delle successioni si può introdurre l'idea topologicamente rilevante di "vicinanza", che apre la strada alla formalizzazione attraverso il concetto di punto di accumulazione.
Va infine rilevato come per mezzo delle successioni si sottolinea il processo legato al concetto di approssimazione, di limite e di infinito potenziale.
Le problematiche di tale approccio sono non meno trascurabili rispetto a quelle di altri approcci e, a nostro avviso, vanno tenute ben presenti, se non si vuole correre il rischio di produrre effetti contrari a quelli voluti.

Tra i problemi che ci sembra opportuno segnalare citiamo:

1) le funzioni che generalmente vengono prese sono funzioni "belle", dove questo belle è da riferire alla loro continuità. Il presupposto che sta alla base di questo modo di procedere è legato alla definizione di continuità data per successioni.
Ricordiamo brevemente tale definizione:

Una funzione $y=f(x)$ è continua in x_0 (appartenente al dominio D della funzione e punto di accumulazione per il dominio della funzione) se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in N}$ convergente a x_0 (essendo $\forall n\in N\ (x_n\in D)$) la corrispondente successione $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ convergente a $f(x_0)$.

L'idea che dovrebbe passare è che comunque si prenda una successione che converge a x_0 la successione delle immagini converge a L.
Risulta quindi opportuno riferirsi a più successioni, per mostrarne l'invarianza della convergenza, anche se il numero necessariamente limitato che si può considerare non può essere una garanzia. In ogni caso infatti non si può prescindere dall'assioma di scelta, il quale non crea problemi proprio grazie alla continuità delle funzioni considerate. [Vedi attività: Deduzione del limite di una funzione con le successioni]

2) Il prendere però più successioni può diventare un ostacolo alla successiva formalizzazione. Una delle difficoltà riconosciute alla comprensione del concetto di limite è proprio la sua controvarianza rispetto alla intuizione. Con le successioni invece si enfatizza il partire da x_0 per arrivare ad L, con l'introduzione, oltre tutto, di un quantificatore universale proprio su aspetti che hanno a che fare con x_0. Nella formalizzazione del concetto, invece, il quantificatore universale si riferisce ad L. L'approccio quindi rischia di creare conflitto con quella che sarà la successiva formalizzazione.

3) Un altro tratto saliente dell'approccio con le successioni è legato al fatto che il valore del limite delle funzioni proposte è sempre intero o al più razionale (se non tende a infinito). Questo ovviamente favorisce la congettura richiesta agli studenti, ma riporta la situazione a casi molto particolari, con l'idea che il limite possa sempre essere controllato col metodo delle successioni.
Riteniamo pertanto opportuno considerare funzioni che tendono a valori irrazionali proprio per fare sentire l'inadeguatezza dello strumento. Costruendo tali tabelle con un foglio elettronico si potrà però far notare come da un certo punto in poi la differenza tra due termini qualunque della successione delle immagini sia minore di un numero reale positivo (piccolo) fissato. Questo aspetto,

che rimanda al criterio di convergenza di Cauchy, dovrebbe "far sentire" l'esistenza del limite anche nei casi in cui non risulta facilmente deducibile. Come conseguenza diretta, si potrebbe far osservare che la successione costruita può essere vista come una possibile approssimazione del limite che si sta cercando e, di conseguenza, del numero irrazionale da esso individuato.
Come ultimo, ma non banale obiettivo, attività di questo tipo dovrebbero evidenziare i limiti intrinseci dei software in contesto numeri irrazionali.
[Vedi attività: Limiti irrazionali]
Parallelamente si potrebbero anche considerare funzioni che descrivono un comportamento noto e di cui si possa dedurre, ad esempio con strumenti geometrici, il valore del limite. Un esempio in tal senso potrebbe essere dato dalla funzione che ad ogni poligono contenuto in un dato cerchio associa la propria area [Vedi attività: Poligoni contenuti].
Nell'attività presentata è possibile dedurre il valore del limite, ma non l'espressione analitica della funzione. Inoltre si presenta, in tal modo, una diversa modalità di variazione della variabile indipendente (una problematica analoga si ritrova nella definizione secondo Riemann di integrale definito, con le suddivisioni dell'intervallo su cui la funzione è integrabile).
Un ulteriore esempio di limite in una forma "non canonica" si può riscontrare nel Canto della Terra di Mahler.
E' interessante osservare, in questo caso, il doppio registro con cui la musica permette di muoversi. Se infatti musica è ciò che è scritto sullo spartito e la sua esecuzione non ne è che il modello, le note che portano al finale-limite costituiscono una successione; l'esecuzione del brano musicale (potremmo dire il suo "grafico") si presenta invece come continuo rispetto alla variabile tempo. Può allora diventare interessante stabilire il tipo di topologia sottesa e, soprattutto, individuare intuitivamente il limite di tale funzione e come "verificarlo".

4) I valori considerati con le successioni sono sempre “pochi”, anche quando si utilizzano strumenti quali i fogli elettronici. L’uso comunque di software didattici è utile per avere più elementi a disposizione, ma non deve far dimenticare che ciò che conta non sono i primi n (con n grande “a piacere”) termini per descrivere il comportamento della funzione. Si ritiene pertanto opportuno proporre attività con funzioni in cui successioni con pochi elementi (fatte “ a mano”) sembrano portare a certi risultati, fatte con Excel ad altri, ma che il limite del foglio elettronico faccia anche sorgere il dubbio che possa succedere, in seguito, qualcosa di ulteriormente diverso. Ciò che dovrebbe emergere è anche l’aspetto attuale con cui va considerata la successione nel momento in cui la si usa per aspetti connessi al concetto di limite, laddove la costruzione di tabelle rimanda ad una percezione di tipo potenziale. Questo aspetto dovrebbe portare a relativizzare il ruolo dei primi n termini a fronte del comportamento complessivo. [Vedi attività: Limiti "pigri"]

5) Come detto, le funzioni utilizzate in genere sono sempre “belle”, inducendo così il misconcetto che le cose vadano sempre bene. Può risultare allora didatticamente rilevante considerare funzioni non continue che sembrano dare certi risultati se si considerano certe successioni, altri se se ne considerano altre. Questo, tra l’altro, dovrebbe servire per rafforzare l’idea che il comportamento della funzione non debba dipendere dalla successione considerata, con le conseguenti riflessioni sulla generalità della successione (e quindi della incontrollabilità di tutte) e l’esigenza di avere strumenti più idonei. [Vedi attività: Funzioni ingannevoli]

Appendice

Assioma di scelta.

Si tratta di un assioma usato nella teoria degli
formularsi in vari modi, alcuni dei quali "sorp
perché intervengono in vari campi della Mate
come risultati specifici di teorie, ad esempio i
- di Vitali sugli insiemi non misurabili,
- di Hahn-Banach sulla prolungabilità dei funz
- di Thikhonov sugli spazi topologici compatti
- il Lemma di Zorn

ed inoltre

- che ogni campo ha un'unica chiusura algebri
- che ogni spazio vettoriale ha una base,

ecc. Un lungo (ma non esaustivo) elenco delle dell'assioma di scelta si può trovare nei due te Rubin, 1962 e 1975). A parte l'interesse tecnic formulazione e delle dimostrazioni della loro e anche rilevante la suddivisione dei vari ambiti riportata negli indici dei testi citati.

I "riflettori" sull'assioma di scelta si sono accessi nel 1904, al terzo congresso internazionale dei matematici tenutosi ad Heidelberg. Nel precedente congresso di Parigi del 1900, D. Hilbert presentava una lista di 23 quesiti la cui soluzione, a suo parere avrebbe portato importanti sviluppi alla conoscenza matematica. Il primo riguardava la vera "natura" dell'insieme **R** dei numeri reali, che da poco avevano trovato una sistemazione soddisfacente, per opera di K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor, G. Peano ed altri. Infatti Hilbert chiedeva, tra l'altro, di risolvere il problema dell'esistenza di un buon ordinamento di **R**. La presenza di un buon ordine su R permetterebbe di trattare in modo più semplice molti argomenti di Analisi, a partire dalla nozione di limite.

Si ricorda che un insieme A non vuoto, su cui è definita una relazione d'ordine si dice bene ordinato da tale relazione se ogni sottinsieme non vuoto di A ha un minimo.
Un esempio importantissimo è dato dall'insieme dei numeri naturali **N** con la consueta relazione d'ordine, quella in cui 0 è il minimo di **N** e ciascun numero n precede il suo successivo $n+1$. Anzi questa proprietà di **N** si può vedere come un altro modo per formulare il Principio di induzione.

La consueta relazione d'ordine su **R** non è un buon ordine: basti pensare all'insieme dei numeri reali (strettamente) positivi, è un sottinsieme di **R**, non vuoto, ma non ha minimo; esso ha 0 come estremo inferiore, ma 0 non è un numero reale positivo, cioè non appartiene al sottinsieme considerato.

D. Hilbert (1862 - 1943)

K. Weierstrass (1815 - 1897)

R. Dedekind (1831 - 1916)

G. Cantor (1845 - 1918)

G. Peano (1958 - 1932)

J. König (1849 - 1913)

E. Zermelo (1871 - 1953)

Nel 1904 ad Heidelberg vennero presentate d una il matematico affermato König dimostrazione che l'insieme dei numeri re essere bene ordinato, nell'altra il più gi dimostrava che l'insieme **R** poteva essere be dimostrazione di König aveva bisogno di "sistemazione" che comparve l'anno succe risolveva invece il problema mostrando cl essere dedotto dall'assioma di scelta. La di Zermelo consisteva nel considerare i sottinsie **R** e di associare a ciascuno di essi un suo elemento "scelto" del sottinsieme. In tal mo una funzione detta appunta "funzione di scel dei sottinsiemi non vuoti di **R** a **R**. A pa posizione, Zermelo giunge alla costruzione su

Alcune semplici formulazione dell'assio

Siano A e B insiemi non vuoti, per ogni f: A funzione g: B –> A tale che

Siano A e B insiemi non vuoti, per ogni co contenuta in (AxB) esiste una corrisponden contenuta in S tale che *dom(S)*

Il prodotto cartesiano di un insieme non vuoto vuoti è un insieme non vuoto.

L'esistenza di una funzione di scelta per ogni insieme non vuoto è storicamente la prima formulazione dell'assioma di scelta. Non ci sono però indicazioni "costruttive" su come realizzare tale funzione e su questo aspetto si sono in seguito accentrate le obiezioni dei numerosi matematici che hanno ritenuto che l'assioma di scelta fosse inaccettabile. A complicare le cose sono venuti poi alcuni risultati

F. Hausdorff (1868 - 1941)

"paradossali" dovuti a Hausdorff, Banach e Tarski come la possibilità di decoporre una sfera in due sfere ciascuna delle quali congruente alla sfera di partenza.

Oggi la problematica relativa all'assioma di scelta è molto più sopita, anche in base a due importanti risultati, uno dovuto a Gödel, pubblicato nel 1940 ed uno di Cohen, apparso nel 1966. In base a quanto provato da entrambi l'assioma di scelta (e l'ipotesi del continuo) è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi, in una situazione cioè paragonabile al postulato delle parallele rispetto agli altri postulati (ed assiomi) della geometria euclidea.

Si possono considerare (almeno) due matematiche, una cantoriana ed una non-cantoriana. I problemi e le difficoltà della seconda, forse, sono la causa del fatto che la matematica degli attuali programmi scolastici (e di molti di quelli universitari) sia cantoriana. In questo modo si compie, di fatto, una scelta epistemologica accettabile, ma non obbligatoria, e che purtroppo non viene presentata e esplicitamente e giustificata adeguatamente agli studenti.

S. Banach (1892 - 1945)


A. Tarski (1902 - 1983)


K. Gödel (1906 - 1978)


Bibliografia

Banach S., Tarski A.: 1924, 'Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.' *Fundamenta Mathematicae*, 8,

Cohen P.J.: 1966, *Set Theory and Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, New York: Trad. italiana, *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, Feltrinelli, Milano, 1973.

Gödel K.: 1940, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Annals of Mathematics Studies vol. 3, Princeton University Press, Princeton.

Hausdorff F.: 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Teubner, Leipzig.

Heijenoort J. van (Ed.): 1967, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.)

Hilbert D.: 1901, 'Mathematische Probleme', *Archive der Mathematik und Physik* 1 (1901), 44 - 63 e 213 - 217; Trad. francese 'Sur les problèmes futurs des mathématiques', *Compe rendu du deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Gauthiers-Villars, Paris, 1902; Trad. italiana parziale in *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Abrusci V.M. (Ed.) Bibliopolis, Napoli, 1978, 145 - 162.

König J.: 1905, 'Über die Grundlagen der Mengenlehre un das Kontinuumproblem', *Mathematische Annalen* 61, 155 - 160; Trad. inglese in (Heijenoort, 1967), 145 - 149.

Rubin Rubin: 1962, *Equivalents of the axiom of choice*, North Holland, Amsterdam

Rubin Rubin: 1975, *New equivalents of the axiom of choice*, North Holland, Amsterdam

Zermelo E.: 1904, 'Beweis daß jede Menge wohlgeordnet werden kann', *Mathematische Annalen*, 59, 514 - 516; Trad. inglese in (Heijenoort, 1967), 139 - 141.

2.2.2.1. Deduzione del limite di una funzione con le successioni

Ambito concettuale: approccio al limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) utilizzare le successioni per fare congetture sul limite di una funzione;
2) mostrare come entra l'assioma di scelta nel limite di una successione proposto secondo questo approccio;
3) far percepire gli aspetti attuali impliciti nell'uso delle successioni per la formulazioni di ipotesi sul limite.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta in laboratorio, disponendo di un foglio elettronico (es. Excel) che permetta la costruzione di successioni. Gli allievi lavorano singolarmente o a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.
Fruitori: studenti

$$y = \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$$

Valuta il comportamento della funzione quando la variabile indipendente x assume valori "vicini" a 2 e a -2. Prova a fare tale valutazione considerando diverse successioni (almeno 4) di numeri reali che si avvicinano a questi valori.
A cosa sembra tendere la variabile indipendente y? Cambia qualcosa, secondo te, cambiando le successioni? E se di ogni successione pensassi di cambiare i primi 100000 termini? Cosa pensi di poter concludere? Sapresti verificarlo?

2) Considera la curva di equazione y=ln(2x-1) e rappresentane il grafico. Supponi di voler determinare l'equazione della retta tangente nel suo punto P(1,0).
Per fare questo prendi un punto Q generico della curva di coordinate (t,ln(2t-1)), con $t\neq 1$. La retta (secante) PQ ha coefficiente angolare $m=\dfrac{\ln(2t-1)}{(t-1)}$.

Osserva che deve essere $t\neq 1$: questo perché stiamo parlando di una secante e quindi i due punti P e Q devono essere distinti.
Utilizzando Excel costruisci una tabella di questo tipo con almeno 10 successioni della variabile indipendente t che converge a 1:

t	0,9	0,99	0,999	0,99999	0,999999
m					
t	1,2	1,02	1,002	1,0002	1,00002
m					

A cosa sembra tendere la variabile indipendente m? Cosa rappresenterebbe tale valore?
Cambia qualcosa, secondo te, cambiando le successioni? E se di ogni successione pensassi di cambiare i primi 100000 termini? Cosa pensi di poter concludere? Sapresti verificarlo?

2.2.2.2. Limiti irrazionali.

Ambito concettuale: approccio al limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) utilizzare le successioni per fare congetture sul limite di una funzione;
2) mostrare come nel caso di limiti irrazionali le successioni non portino a deduzioni significative;
3) mettere in crisi l'idea che le successioni siano un modo esauriente per affrontare il limite di una funzione;
4) mostrare i limiti tecnici di un foglio elettronico nella rappresentazione dei numeri reali.

Modalità di presentazione: l'attività, che dovrebbe seguire quella presentata in 2.2.2.1., richiede di essere proposta in laboratorio informatico, utilizzando un foglio elettronico (es. Excel) che permetta la costruzione di successioni. Gli allievi lavorano singolarmente o a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.
Fruitori: studenti

Considera la funzione da $]-1/2;+\infty[-\{0\}$ a **R** individuata dalla proposizione

$y=(1+2x)^{1/x}$

Valuta il comportamento della funzione quando la variabile indipendente x assume valori "vicini" a 0. Prova a fare tale valutazione considerando diverse successioni (almeno 4) di numeri reali che si avvicinano a questi valori.
E' possibile stabilire l'andamento della variabile dipendente y dal comportamento della successione delle immagini? Ci sono cose che ti sembra di poter dire?
Considera ora il numero reale $\varepsilon=0{,}0000001$. Riesci ad individuare un termine t nella successione delle immagini tale che la differenza tra due termini qualunque successivi a t sia minore di ε?
Prova a "rimpicciolire" ε: riesci ancora a rispondere alla domanda precedente?
Ci sono valori di ε a cui il programma non ti permette di dare una risposta?
In base ai valori di ε che ti hanno permesso di rispondere, cosa ti sembra di poter dire a proposito dei limiti delle successioni delle immagini?

Ripeti quanto richiesto in precedenza a proposito della funzione individuata da

$$y = \frac{\log_2(1+x)}{x}$$

2.2.2.3. Poligoni contenuti

Ambito concettuale: approccio al limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) proporre il concetto di limite in ambito geometrico;
2) mostrare come si possa parlare di limite anche su funzioni non canoniche;
3) porre il problema della visualizzazione del limite e della sua verifica attraverso la costruzione di successioni privilegiate;
4) cercare un collegamento tra il concetto di limite e quello di estremo superiore.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta in due fasi: in un primo momento in laboratorio di informatica in cui, utilizzando Cabri, si visualizzano alcuni poligoni coinvolti. Successivamente, in classe si affronterà la discussione su cosa significhi trovare il limite per funzioni di questo tipo. Entrambe le attività dovrebbero essere svolte a gruppi
Fruitori: studenti

Prendi un cerchio di raggio r e considera l'insieme P dei poligoni contenuti nel cerchio. Sugli elementi dell'insieme P considera la relazione (d'ordine) di inclusione insiemistica.
Sia f la funzione da P ad R che ad ogni poligono p di P associa la misura della sua area, rispetto ad una fissata unità di misura.
Osserva che:
1) la relazione di inclusione è una relazione d'ordine parziale su P;
2) Per ogni coppia di poligoni p1 e p2 di P esiste un poligono p di P che contiene entrambi.
Determina il limite, se esiste, della funzione f al tendere di p a C.
Come verificheresti la correttezza del tuo risultato?
Riusciresti a proporre l'attività utilizzando opportune successioni di poligoni convergenti a C?

Commento:
La relazione d'inclusione sull'insieme dei poligoni contenuti in un cerchio è una relazione d'ordine parziale con la proprietà (evidenziata dall'osservazione al punto 2)) che ogni sottoinsieme finito di poligoni di P ha estremo superiore. Il limite della funzione f al tendere di p a C è la misura dell'area del cerchio rispetto all'unità di misura fissata. Se la determinazione di tale risultato è facilmente intuibile, non risulta semplice la verifica della sua correttezza. Per fare questo occorre innanzi tutto individuare opportune successioni di poligoni di P convergenti a C. Le più semplici da considerare sono quelle individuate da poligoni regolari inscritti nella circonferenza che delimita C. Si può osservare come, comunque preso un poligono p contenuto in C, esista un poligono regolare inscritto nella circonferenza che contenga p. In sostanza, le successioni di poligoni regolari costituiscono l'analogo delle successioni particolari che si utilizzano nella individuazione (intuitiva) del limite di una funzione.
Per dimostrare che effettivamente la successione delle misure delle aree dei poligoni regolari inscritti converge alla misura dell'area del cerchio si può ricorrere al metodo di esaustione, come proposto in [Maffini 2001].

[Maffini 2001] Maffini A.:2001, Le basi dell'analisi non-standard, Atti delle conferenze su l'analisi non standard, Quaderno 1 a cura della Mathesis Sezione Picena

2.2.2.4. Limiti "pigri"

Ambito concettuale: approccio al limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) utilizzare le successioni per fare congetture sul limite di una funzione;
2) mostrare come il numero di termini di una successione possa influire sulla congettura relativa al limite;
3) porre il problema dell'attendibilità del limite ottenuto per mezzo delle successioni.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta prima in classe e poi in laboratorio, disponendo di un foglio elettronico (es. Excel) che permetta la costruzione di successioni. Gli allievi lavorano singolarmente o a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.
Fruitori: studenti

Considera la funzione da **R** in **R** definita da
$y=1/|x|^{1/100}$
Completa la seguente tabella

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
y					
x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001
y					

Cosa ti sembra di poter concludere sul comportamento della variabile dipendente y al tendere della variabile indipendente x a 0?
Ripeti la richiesta precedente utilizzando Excel per costruire tabelle analoghe con 30 termini al posto dei 5 precedenti. Cosa ti sembra di poter concludere in questo caso?

2.2.2.5. Funzioni ingannevoli

(le funzioni presentate sono state utilizzate anche in
Ambito concettuale: approccio al limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in crisi l'idea che le successioni portino sempre a risultati adeguati rispetto al limite;
2) porre il problema sul presunto diverso comportamento delle funzioni a seconda delle successioni considerate;
3) portare a stabilire in quali casi o condizioni una successione può o non può fornirmi informazioni adeguiate rispetto al concetto di limite..

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta prima in classe, senza l'ausilio di strumenti informatici. Gli allievi lavorano singolarmente o a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.
Fruitori: studenti

1) Considera la seguente funzione (di Dirichelet): definita su **R** vale 0 sui reali razionali e 1 sui reali irrazionali.

Completa la seguente tabella, relativa a valori che approssimano √2:

x	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
y					
x	1,56	1,42	1,415	1,4143	1,41422
y					

Cosa ti sembra di poter dire delle immagini della funzione quando x tende a √2?
Completa adesso la seguente tabella

x	√2+0,1	√2+0,01	√2+0,001	√2+0,0001	√2+0,00001
y					
x	√2 -0,1	√2-0,01	√2-0,001	√2-0,0001	√2-0,00001
y					

Cosa ti sembra di poter dire in questo secondo caso?
Quali conclusioni puoi trarre dai risultati ottenuti?

2) Considera adesso la funzione così definita:

Sia f una funzione reale di variabile reale così definita:
se il reale x è razionale, con x=m/n, essendo m intero diverso da zero, n intero positivo, in modo che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini, allora: f(x)=1/n
se il numero x è irrazionale o se è zero, allora f(x)=0

Valuta, considerando separatamente il caso di un numero reale razionale diverso da zero e un numero reale irrazionale, se ti è possibile costruire successioni che convergano al numero e che portino a risultati diversi, come nell'esercizio precedente.

2.2.3 Approccio attraverso i grafici

L'approccio al concetto di limite attraverso grafici di vario tipo è seguito da vari libri di testo e articoli, che lo ritengono, probabilmente a ragione, maggiormente intuitivo rispetto ad altri. Vogliamo qui sottolineare quelli che a nostro avviso possono essere i punti di forza e di debolezza di questo modo di procedere.

Una prima considerazione da tenere presente è il rischio di identificare il grafico di una funzione con la funzione stessa, già analizzato in 1.2.4. e la conseguente convinzione che ogni funzione abbia necessariamente un grafico, anzi un "buon" grafico, con caratteristiche "minime" di continuità e derivabilità. Tale convinzione viene alimentata nel corso degli anni attraverso la pratica di operare (quasi esclusivamente) in **R** con particolari classi di funzioni "elementari", per esempio nella risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche e trascendenti con metodi grafici. Ad una equazione o disequazione (razionale, esponenziale, logaritmica, goniometrica…) si associa il grafico della funzione corrispondente, dal quale si ricavano informazioni che vengono interpretate in chiave algebrica.

Non ci si deve, quindi, sorprendere che poi gli allievi mostrino difficoltà ad accettare, ad esempio:

- la possibilità di un grafico discreto (derivante ad esempio da misure sperimentali); prevale spesso in questo caso la tendenza a unire i vari punti, anche qualora tale operazione non abbia alcun significato;
- il fatto di non poter rappresentare grafici di funzioni ad esempio definite su **Q**; c'è la tendenza a identificare tali funzioni con le loro estensioni a tutto **R** per poter rappresentare i relativi grafici nel piano cartesiano;
- la possibilità di funzioni "patologiche" come quella di Dirichelet non rappresentabili graficamente, pur essendo definite in **R**.

Premesso questo, l'approccio grafico al concetto di limite può avvenire in due diversi modi:

1. utilizzando grafici noti, cioè di cui sia nota, in quanto appartenente ad un campionario di funzioni "elementari", la funzione che essi rappresentano;

2. utilizzando grafici appositamente costruiti per mostrare i vari casi di limite, senza che sia esplicitata la funzione che essi rappresentano.

E' evidente che, in entrambi i casi, l'obiettivo principale non è tanto quello di arrivare ad una definizione di limite ma piuttosto di favorire, attraverso la visualizzazione, la costruzione di immagini mentali significative che facciano avvertire l'esigenza di tale definizione e, una volta data, permettano di comprenderne più a fondo il significato. In questa fase preliminare il grafico assolve dunque la funzione di un mediatore che induce la formulazione di *congetture* sul valore del limite, che necessitano poi di essere verificate con altri strumenti e in altri ambiti. Nella formulazione di tali congetture e nella ricerca di strategie che possano o meno favorirle, occorre comunque sempre tenere presente, come visto in 1.2.4., che quello visualizzato non è *il* grafico della funzione bensì *una parte* di tale grafico e che spesso le informazioni che si richiede di dedurre da esso riguardano proprio la parte non visualizzata. Si richiede quindi, piuttosto che di "*leggere*" un grafico, di *immaginarne* le parti mancanti estendendo ad esse le proprietà (vedi ad esempio 1.2.4.1)

Altre difficoltà da tenere presenti nell'attività di lettura di un grafico in relazione al concetto di limite sono le seguenti:

- è richiesta la lettura *dinamica* (in termini di avvicinamento) di un oggetto di fatto *statico* (il grafico come insieme di coppie ordinate);

- la definizione di limite avviene nel senso opposto (dalle ordinate alle ascisse) rispetto alla lettura della funzione (dalle ascisse alle ordinate);

- è sempre sottointesa la *continuità* delle funzioni rappresentate, concetto che in un percorso tradizionale viene introdotto successivamente a quello di limite.

Inoltre, nei casi specifici di approccio attraverso grafici noti o grafici "ad hoc", vi sono ulteriori elementi da considerare:

- nel primo caso è bene chiarire quando un grafico (ad eccezione del caso lineare) è da considerarsi "noto": c'è un numero minimo di punti da considerare? Ci fidiamo del risultato proposto per esempio da un computer? O dell'autorità dell'insegnante? Attività potenze e esponenziale (pdf)

- nel secondo caso è ancora più importante tenere presenti aspetti di un contratto didattico implicito che necessariamente viene evocato quando si richiede agli allievi di dedurre da un grafico informazioni che esso *non può dare*. Esempio 1 (pdf)

Un vantaggio del primo approccio rispetto al secondo può essere quello di potersi "spingere un po' più in là" nel percorso verso la definizione di limite: gli intorni in gioco (e soprattutto il delicato legame di dipendenza fra di essi) possono non solo essere *visualizzati* nel grafico, ma anche *determinati* numericamente per alcuni valori di ε o in funzione di ε stesso.

Tuttavia le precedenti considerazioni consigliano, in generale, di utilizzare con prudenza lo strumento grafico: il rischio è che esso possa involontariamente ostacolare anziché favorire la costruzione di immagini coerenti con il concetto di limite.

Tra gli accorgimenti che possono contenere gli aspetti negativi evidenziati senza rinunciare alle riconosciute potenzialità della visualizzazione, ci permettiamo di avanzare due proposte:

- Una prima proposta, condivisa da molti ricercatori e supportata da numerose sperimentazioni (si veda ad esempio Maschietto, 2002) consiste nell'utilizzo di software didattici che permettano non solo la *costruzione* ma anche l'*esplorazione* di grafici tramite zoom e/o cambiamenti nella finestra di visualizzazione. Questo attribuisce ai grafici una dinamicità che consente di disporre di maggiori informazioni e favorisce la formulazione di congetture.

  Esistono vari siti Internet in cui, tramite apposite Applet Java, è possibile tracciare un grafico e di manipolarlo, ad esempio:

  http://www.math.com/students/graphing.html

  http://www.langara.bc.ca/mathstats/resource/GraphExplorer/

  Anche la definizione di limite può essere resa graficamente dinamica osservando come cambia il secondo intorno quando viene modificato il primo; si veda ad esempio:

  http://www.batmath.it/matematica/a_limiti/def/def.htm

  http://www-math.science.unitn.it/~baldo/vecchicorsi/aa2001/SSIS/limite/

- Una seconda proposta è quella di corredare il grafico di informazioni, relative ad esempio alla presenza di asintoti, alla monotonia, alla continuità, alla concavità. Esempio 2 (pdf)

Fino ad ora si è parlato dell'uso dei grafici per *introdurre* il concetto di limite; si potrebbero fare considerazioni analoghe relativamente all'uso dei grafici in attività di *consolidamento* dei concetti appresi, cioè in una fase successiva alla definizione del concetto stesso. Questo tipo di esercizio può essere utile per interpretare graficamente il valore di limiti e comprendere più a fondo la definizione, anche prima di affrontare lo "studio di funzione".

Tali attività possono essere di vari tipi:

- dedurre da un grafico il valore di un limite; Attività logaritmo (pdf)

- indicare in un grafico una coppia di intorni che verifica la definizione; Attività intorni (pdf)

- noto il valore di un limite (ed eventualmente altre informazioni), tracciare un grafico compatibile con esso. Esercizio 1 (pdf) Esercizio 2 (pdf)

Bibliografia

Maschietto, M: 2002, 'L'enseignement de l'analyse au Lycée : les debuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices', Tesi di dottorato, Université Paris 7

2.2.3.1. Potenze ed esponenziali

Ambito concettuale: funzioni elementari e loro proprietà

Livello: scuola superiore

Obiettivi:

1) Comprendere che la visualizzazione del grafico di una funzione è sempre parziale;
2) Porre il problema che un grafico, anche se costruito con sotfware specifici, dà informazioni a livello locale, non sempre generalizzabili a livello globale;
3) Utilizzare le informazioni note sulle funzioni (positività, monotonia,…) per mettere in discussione quanto mostrato dal grafico.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta in laboratorio, disponendo di un software adeguato (es. Derive) che permetta la rappresentazione grafica di funzioni. Gli allievi lavorano a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.

Rappresenta nel piano cartesiano le funzioni da **R** a **R** $y=e^x$ e $y=x^6$. Quali informazioni puoi *dedurre dal grafico* circa: il numero di soluzioni reali dell'equazione $e^x = x^6$ il valore dei seguenti limiti $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^6}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^6}$ Ti sembra che tali risultati siano compatibili con le tue conoscenze sulle funzioni date? Perché?

2.2.3.2. Quello che un grafico non può dire

Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) assumere un atteggiamento critico nei confronti delle richieste di un esercizio;
2) rilevare informazioni mancanti o implicite nel testo di un esercizio.

Modalità di presentazione: attività a piccoli gruppi con successiva discussione.
Si prende spunto dall'Esercizio n. 16 pag. 750 di (Dodero et al., 1999)

Considera il seguente esercizio:

16 Osservando il grafico della funzione $y = f(x)$, rappresentato in **figura 2**, si ha

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...;$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...;$

$\lim\limits_{x \to ...} f(x) = 2;$ $\lim\limits_{x \to ...} f(x) = 0;$

$\lim\limits_{x \to ...} f(x)$ non esiste; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ...;$

il dominio della funzione è ..... ,
il codominio della funzione è l'intervallo (...; ...].

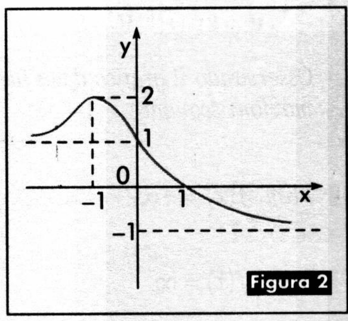


Figura 2

Per rispondere alle varie domande utilizzi informazioni che leggi direttamente dal grafico o, in qualche caso implicite in esso?

Vorresti in alcuni casi avere qualche informazione in più sulla funzione per poter rispondere con maggiore sicurezza?

Completa la seguente tabella:

Richiesta esercizio	Informazioni implicite	Eventuali richieste aggiuntive
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$		
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$		
$\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = 2$		
$\lim\limits_{x \to \ldots} f(x) = 0$		

$\lim_{x \to \ldots} f(x)$ non esiste

$\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots$

dominio della funzione

codominio della funzione

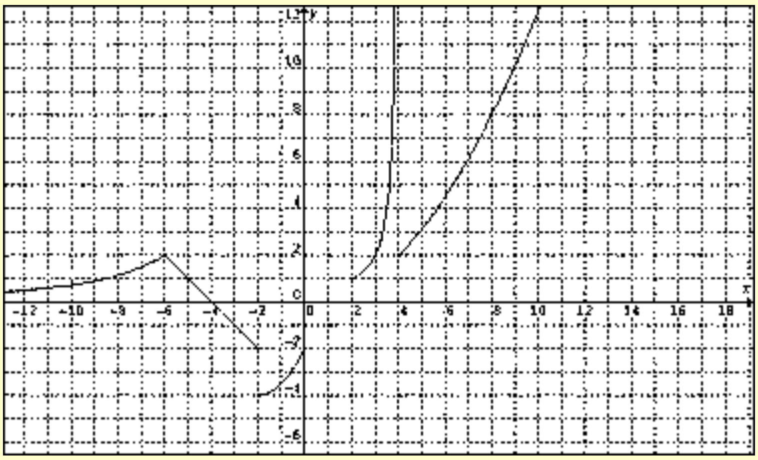
Bibliografia
Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 1999, *Lineamenti di matematica* vol.4, Ghisetti e Corvi, Milano.

2.2.3.3. Lettura di un grafico

Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) comprendere la necessità di corredare un grafico di informazioni sulla funzione per poter rispondere ad alcune richieste sui limiti;
2) rilevare che nel testo dell'esercizio restano comunque informazioni implicite.
Modalità di presentazione: attività di esercitazione individuale.

Dal grafico sottostante deduci il valore dei limiti richiesti, se esistono, sapendo che y=0 e x=4 sono due asintoti della funzione.

Dei limiti richiesti, di quali il grafico non ti fornisce sufficienti informazioni per essere certo della risposta?



$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to-6^-} f(x) =$

$\lim_{x\to-6^+} f(x) =$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to0^-} f(x) =$

$\lim_{x\to0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to2^+} f(x) =$

$\lim_{x\to4^-} f(x) =$

$\lim_{x\to4^+} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

2.2.3.4. La funzione logaritmo

Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) fare congetture a partire da grafici noti che presentano un comportamento non evidente;
2) verificare tali congetture utilizzando le proprietà delle funzioni.
Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere svolta in laboratorio, disponendo di un software adeguato (es. Derive) che permetta la rappresentazione grafica di funzioni. Gli allievi lavorano a coppie seguendo la scheda di lavoro seguente.

Osservando ed esplorando il grafico della funzione da **R** ad **R** $y=\log x$, quali congetture potreste fare sul valor per $x \rightarrow +\infty$? In base alle vostre conoscenze sulla funzione logaritmo, potete verificare le vostre congetture?

Commento: la funzione logaritmo ha una crescita molto lenta e, dalla sua rappresentazione grafica, si potrebbe dedurre la duplice congettura che:
il limite sia finito (il grafico presenti cioè un asintoto orizzontale)
oppure
il limite sia infinito
Le conoscenze sulla funzione logaritmo, in particolare la sua iniettività su tutto **R**, dovrebbero guidare la scelta della congettura corretta.

2.2.3.5. Intorni... di chi?

Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite

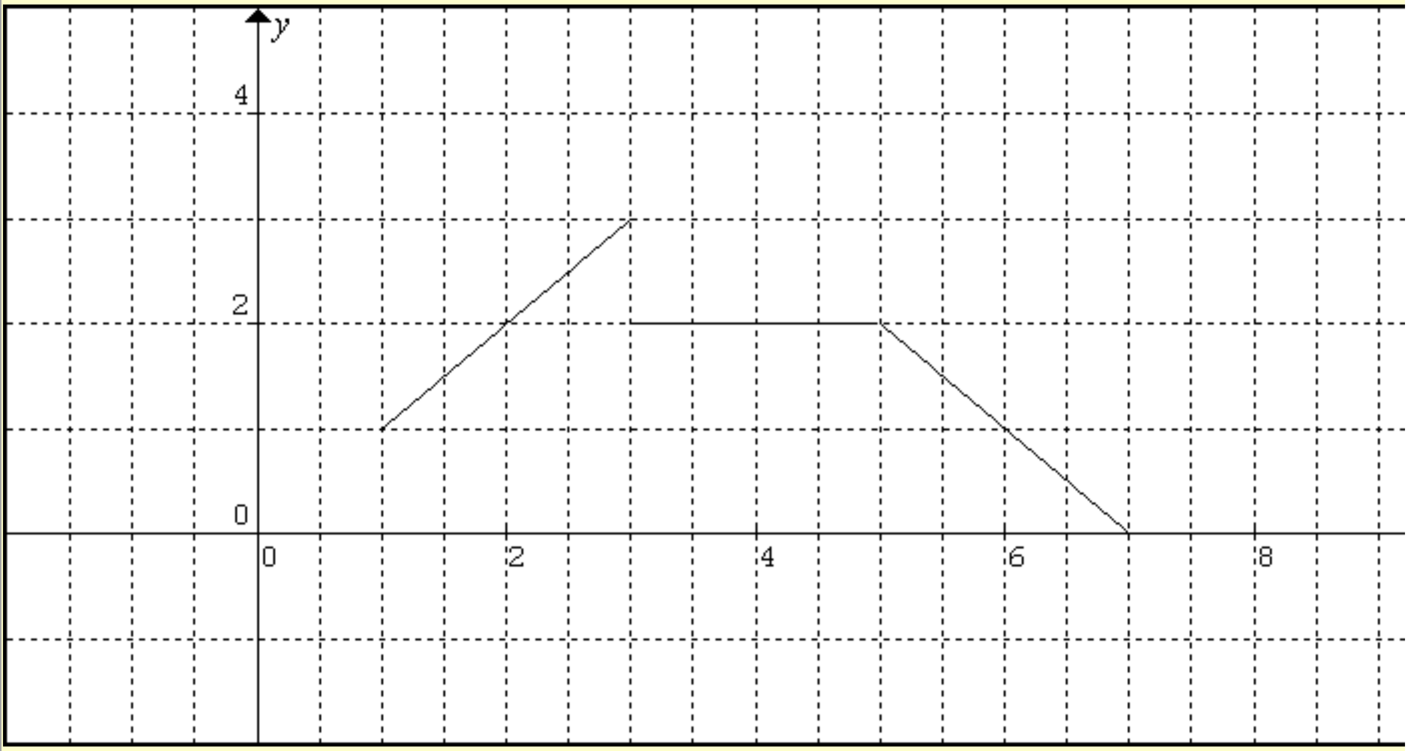
Livello: scuola superiore

Obiettivi:

1. capire il "funzionamento" della definizione di limite, determinando graficamente coppie di intorni che la verificano;
2. comprendere la differenza fra una funzione costante e una funzione lineare nella scelta di intorni opportuni.

Modalità di presentazione: l'attività può essere svolta individualmente o a piccoli gruppi.

Il seguente grafico rappresenta una funzione di dominio D=[1,7]



Fissato un valore ε , 0<ε <1, determina la controimmagine dell'intervallo (2-ε ,2+ε).

In base ai risultati ottenuti e alla definizione di limite, stabilisci –motivando le risposte- se le seguenti afferma
sono vere o false:

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 4} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 5} f(x) = 2$

2.2.3.6. Localizzazione del grafico

Da (Andriani *et al.*, 1999)

Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite

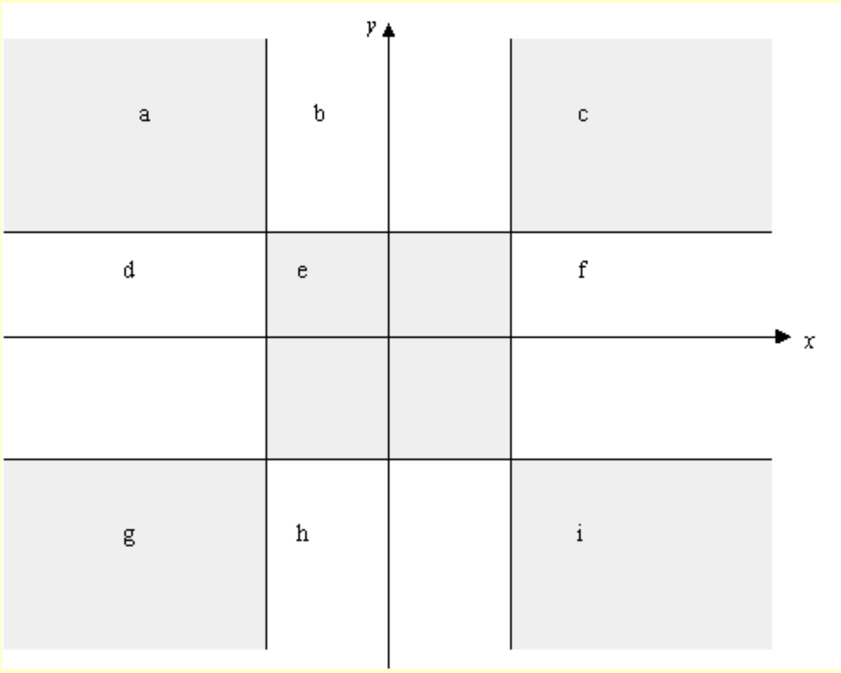
Livello: scuola superiore

Obiettivi:

1) associare il valore di un limite ad una porzione di grafico compatibile con esso;
2) rendersi conto che l'informazione contenuta in un limite è parziale e che al più interessa una parte del grafico di una funzione.

Modalità di presentazione: attività individuale di esercitazione.

Il piano cartesiano è diviso in 9 regioni, mediante le rette di equazioni x=-2, x=2, y=-2, y=2, indicate con le lettere a, b, c, …



Per ciascuno dei seguenti casi indica se c'è e qual è la regione nella quale si trova una parte del grafico della funzione:

1. Sapendo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
2. Sapendo che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
3. Sapendo che $\lim_{x \to +\infty} m(x) = 1$
4. Sapendo che $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$
5. Sapendo che $\lim_{x \to 0} t(x) = +\infty$

Bibliografia

Andriani M.F, Dallanoce S., Grugnetti L., Molinari F., Rizza A.: 1999, 'Autour du concept de limite' in F. Jaquet (ed.) *Proceedings of CIEAEM 50,* Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335

2.2.3.7. Grafico di una funzione a partire da alcune informazioni
Ambito concettuale: interpretazione grafica della definizione di limite
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) associare ad una serie di informazioni un grafico compatibile con esse;
2) rendersi conto che alcune informazioni sono superflue e altre mancanti
3) comprendere che l'esercizio può avere varie soluzioni, il grafico non è unico.

Modalità di presentazione: attività individuale di esercitazione.

Disegna tre grafici di funzioni che presentano tutte le caratteristiche indicate dalla tabella:

	Grafico 1	Grafico 2	Grafico 3
Dominio	R	R	(-5,3]
Codominio	[-1,4]	[-2,+∞)	(-∞,5]
Simmetria assiale	No	x=1	No
Simmetria centrale	No	No	No
Zeri	0 2	-3 0 2 5	-4 3
Positiva	(-∞,0)∪(2,+∞)	(-∞,-3)∪(0,2)∪(5,+∞)	(-4,3)
Negativa	(0,2)	(-3,0)∪(2,5)	(-5,-4)
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	3	+∞	-
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	3	+∞	-
$\lim_{x\to-5^+} f(x)$			-∞
Asintoto orizzontale	y=3	No	-
Crescente	(1,4)	(-1,5;0)∪(3,5;+ ∞)	(-5,1)
Decrescente	(-∞,1)∪(4,+∞)	(-∞;1,5)∪(1;3,5)	(1,3)
Massimi	4	1	1
Minimi	1	-1,5 3,5	-
Flessi tangente orizzontale	No	No	-2
Altri flessi	0,5 2,5 6	-0,5 2,5	0
Concavità verso l'alto	(0,5;2,5)∪(2,+∞)	(-∞;-0,5)∪(2,5;+ ∞)	(-2,0)
Concavità verso il basso	(-∞;0,5)∪(2,5;6)	(-0,5;2,5)	(-5,-2)∪(0,3)

Quali informazioni sono superflue? Eliminale dallo schema.

Quali informazioni sono (eventualmente) mancanti?

PARTE 3 – IL TEMA DELLA CONTINUITA' E DELLA DISCONTINUITA'

a cura di Achille Maffini

3.1. Continuità locale e continuità globale.

3.1.1. Il problema della continuità

Il problema della continuità di una funzione viene affrontato, nella prassi didattica italiana, durante il corso di analisi (che solitamente, nella scuola media superiore, viene proposto al termine del quarto o all'inizio del quinto e ultimo anno) e, in generale, dopo aver introdotto il concetto di limite. Di fatto, come del resto è noto, l'introduzione dei numeri reali e soprattutto il piano cartesiano utilizzano pesantemente il concetto di continuità per la rappresentazione delle curve, tanto è vero che nella introduzione intuitiva del concetto di limite molti libri di testo si servono implicitamente proprio della continuità per "giustificare" la definizione di limite.
Gli approcci che fanno riferimento a questo aspetto sono generalmente di due tipi:

a) presentazione di successioni che "convergono a x_0" e vedere corrispondentemente il comportamento delle immagini
b) utilizzo dei grafici di funzioni per descriverne il comportamento in termini di limite

Il problema, a nostro avviso, risiede in una non sempre ben evidenziata relazione-separazione tra il concetto di continuità in senso globale e il concetto in senso locale.

Il concetto di continuità in senso globale viene trattato in Nordon, 1995 in cui lo si contrappone non tanto a quello di discontinuità, quanto a quello di discreto. Nordon, in questo senso, fa chiaramente riferimento al concetto di continuità che caratterizza i numeri reali e che si ritrova poi nei vari ambiti che utilizzano tale insieme numerico come modello.
Il problema dell'uso dell'aggettivo "continuo" in contesto 'funzioni' ed in contesto 'numeri reali' viene trattato in Leonelli 1990.
Dai lavori citati emerge come i numeri reali giochino un ruolo fondamentale rispetto alla continuità di una funzione. E' infatti opportuno osservare come il concetto di continuità globale sia un concetto di tipo topologico, per cui dipende dal tipo di topologia che si è considerata nei due insiemi messi in relazione. Nella prassi didattica della scuola media superiore la topologia considerata su R è, spesso implicitamente, quella ordinaria in cui gli intervalli aperti costituiscono le famiglie di intorni e solitamente non vengono proposti esempi di altre topologie su R.
Non è inoltre superfluo osservare come il termine continuità venga usato in contesto "numeri reali" con valenze diverse: si parla così della **continuità** delle funzioni **in** R e della **continuità** **di** R (legata quest'ultima alla proprietà peculiare dell'insieme dei numeri reali rispetto agli altri insiemi numerici).
Questa distinzione linguistica, se non sufficientemente compresa, può generare non poche confusioni, impedendo al contempo di evidenziare la stretta relazione tra i due concetti.
Vai all'Attività Condizione globale e condizione locale di continuità.

Per approfondimenti:

Leonelli A.: Novembre 1990, Continuità e connessione, Archimede, pag. 155-168
Leozun D., Amit M., Ceaushu C., ecc.: 2000, 'Pratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différentes entre enseignants et enseignés dans la formation permanente', *in Cultural diversity in mathematics (education): CIEAEM 51*, Horwood Publishing.
Nordon N.: 1995, Le continu quand il n'etait qu'attribut, *Actes de l'Universitè d'été: Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, Besancon, pag. 127-151

3.1.1.1. Condizione locale e condizione globale di continuità

Ambito concettuale: Aspetti legati a diverse percezioni della continuità
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) focalizzare gli aspetti connessi alle percezione di continuità in ambito matematico;
2) destabilizzare l'idea di discontinuità come negazione della continuità;
3) evidenziare l'uso didattico del concetto di continuità e le difficoltà annesse.
Modalità di presentazione: descritte nella scheda.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

La consegna:
Considera la seguente formulazione per un quesito da sottoporre a degli studenti relativamente al problema della continuità/discontinuità (proposto da una insegnante ad una sua classe):

"Stabilisci quali fra le seguenti funzioni sono continue in **R** (o in intervalli di **R**) riferendoti a quanto abbiamo detto sulla continuità delle funzioni elementari:

$a) \quad y = x^2 - 1$	$b) \quad y = \ln(x-2)$	$c) \quad y = 2^x$
$d) \quad y = \frac{x^2 - 4}{x}$	$e) \quad y = e^{\frac{3x}{x+1}}$	$f) \quad y = \sqrt{x-3}$

Rispondi alle seguenti domande:
a) Indipendentemente da quanto proposto in classe dall'insegnante, quali erano secondo te, le risposte attese?
b) Il quesito così com'è formulato porta a tali risposte?
c) Come lo riformuleresti?
d) Secondo te, a cosa sono dovute le difficoltà nella riformulazione?
e) In relazione alla tua prassi didattica, come formuleresti il quesito o che tipo di risposte ti aspetteresti?

Per osservazioni sull'attività vedi Aspetti connessi al concetto globale e al concetto locale di continuità.

3.1.2. Aspetti connessi al concetto globale e al concetto locale di continuità.

Riprendiamo l'attività proposta in 3.1.1.1 e procediamo ad una sua analisi:

"Stabilisci quali fra le seguenti funzioni sono continue in **R** (o in intervalli di **R**) riferendoti a quanto abbiamo detto sulla continuità delle funzioni elementari:

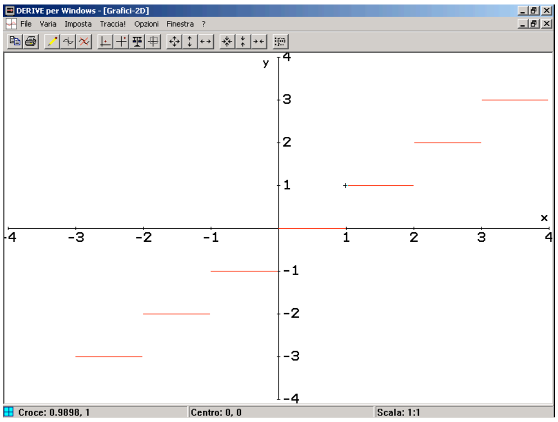
$a) \quad y = x^2 - 1$	$b) \quad y = \ln(x-2)$	$c) \quad y = 2^x$
$d) \quad y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$	$e) \quad y = e^{\frac{3x}{x+1}}$	$f) \quad y = \sqrt{x-3}$

Rispondi alle seguenti domande:

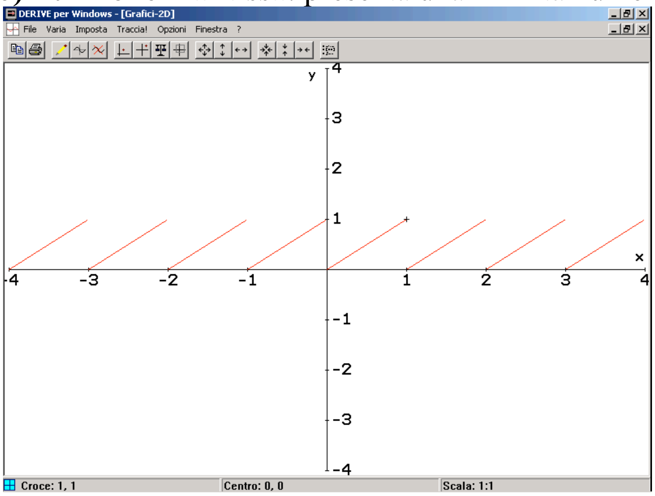
a) Indipendentemente da quanto fatto dall'insegnante, quali erano secondo te, le risposte attese?
b) Il quesito così com'è formulato porta a tali risposte?
c) Come lo riformuleresti?
d) Secondo te, a cosa sono dovute le difficoltà della formulazione?
e) In relazione alla tua prassi didattica, come formuleresti il quesito o che tipo di risposte ti aspetteresti?

La formulazione dell'esercizio precedente mette implicitamente in evidenza la difficoltà nel gestire la continuità a livello puntuale, soprattutto quando l'attenzione è invece incentrata su punti "critici".
In pratica la formulazione della richiesta in positivo (ricerca continuità) impedisce di caratterizzare ciò che invece risulta più evidente, cioè "il distacco della matita dal foglio".
Ma soprattutto mette in evidenza come sia fuorviante legare la condizione di discontinuità (come tradizionalmente viene posta) con quella di negazione della continuità. Se la definizione di continuità fa riferimento a punti del dominio, tutte le funzioni dell'esercizio proposto lo sono (nel loro dominio); ma probabilmente l'insegnante voleva mettere in risalto non la continuità, ma qualcos'altro. Cosa di preciso? Per rispondere a questa domanda bisogna tener conto che il passaggio dalla definizione puntuale di continuità a quella globale passa attraverso un quantificatore universale (per essere continua in un insieme A, una funzione deve essere continua in tutti i punti di A), mentre la sua negazione fa riferimento ad un quantificatore esistenziale che riporta quindi la questione a livello locale. E' in questo delicato passaggio dal locale al globale per poi ritornare al locale che si annidano, a nostro avviso, le maggiori insidie, evidenziate appunto dalla difficoltà nella formulazione precedente.
Come ulteriore conseguenza di questo aspetto c'è il rafforzamento cha la non continuità sia "accidentale" e relativa a qualche punto: le funzioni che in genere vengono presentate nella prassi didattica fanno riferimento ad un numero finito di punti di discontinuità o ad un'infinità numerabile. Questo fa pensare che la stragrande "maggioranza" delle funzioni sia quasi ovunque continua, mentre è vero il viceversa, cioè sono le funzioni che presentano una infinità più che numerabile di punti di non continuità ad essere in maggioranza.
Questo in genere non emerge (troppo) dalla prassi didattica, in quanto in genere le funzioni a cui ci si riferisce hanno ben precisi scopi (di rappresentazione, di modellizzazione, ecc.) con le conseguenti necessarie proprietà di continuità e derivabilità.

Esempi di funzioni con punti di non continuità:
a) Funzione parte intera: presenta una infinità numerabile di punti di non continuità



b) Funzione mantissa: presenta una infinità numerabile di punti di non continuità



c) Il tariffario postale (vedi 3.1.2.1.**)**

Nell'attività del "Tariffario postale" dovrebbero emergere alcuni aspetti peculiari, legati soprattutto alla modellizzazione della realtà con strumenti matematici (col ruolo significativo legato ai numeri reali nell'ottica della rappresentazione) e al ruolo giocato dalle diverse modalità di presentazione di una funzione: descrittiva, analitica e grafica, ovviamente quando sono possibili tutte e tre. E' il caso di osservare come nel caso una di queste condizioni non sia possibile, si "cambia funzione", modificando opportunamente gli insiemi coinvolti, perché siano possibili le tre modalità di rappresentazione. Ciò avviene, ad esempio quando si considera una funzione avente dominio un sottinsieme di **Q**, o come accade molto spesso nelle modellizzazione di fenomeni discreti mediante relazioni funzionali estese a intervalli di **R**.

L'attività dovrebbe inoltre evidenziare l'importanza di tenere collegati questi tre ambiti per la gestione delle informazioni peculiari a ciascun ambito, ma necessariamente da integrare con gli altri.

Di rilievo il ruolo giocato dalla continuità (necessaria nel modello descrittivo del fenomeno, ma non nel fenomeno) e dai punti di non continuità, ruolo che dovrebbe far emergere che dove si hanno punti di "rottura" si ha una rottura anche dell'informazione connessa alla funzione con una conseguente maggiore attenzione alle conseguenze (evidenziata, nell'attività, dai risultati della ricerca promossa dal Ministro).

d) Funzione di Dirichelet (o funzione caratteristica dei numeri reali irrazionali): funzione definita sull'intervallo [0;1] (qualche autore la definisce su tutto **R**) che vale 0 sui reali razionali e 1 sui reali irrazionali.

Tale funzione ha un'infinità più che numerabile di punti di non continuità (e tale insieme non si riesce a rappresentare in modo da distinguerlo dall'intervallo [0;1]).

e) Funzione presentata in [Bagni 1994] (con modifica).
Sia f una funzione reale di variabile reale così definita:
se il reale x è razionale, con x=m/n, essendo m intero, n intero positivo, in modo che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini, allora: f(x)=1/n
se il numero x è irrazionale o se x=0, allora f(x)=0.
La funzione è continua in ogni numero reale irrazionale e in zero e discontinua in ogni numero reale razionale.

Nelle ultime due funzioni proposte il concetto di continuità e di discontinuità non è individuabile, su base intuitiva, a livello grafico.

Per approfondimenti:
[Bagni 1994] Bagni G. T.: 1994, Continuità e discontinuità nella didattica dell'analisi matematica, in Funzioni, limiti, derivate – Atti del 4° Incontro Internuclei, a cura di B. Piocchi; Siena 10-12/03/1994, pag. 27-32

3.1.2.1. Il tariffario postale.

Ambito concettuale: analisi di funzione legata ad un contesto reale.
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) analizzare dal punto di vista matematico un tipo di funzione legata ad un ambito concreto;
2) modellizzare con strumenti matematici un aspetto della realtà;
3) individuare i limiti e i punti di forza del modello;
4) utilizzare il modello per ricavare informazioni;
5) confronto fra diverse situazioni utilizzando i rispettivi modelli;
6) individuare nella modellizzazione i punti critici.

Modalità di presentazione: si ritiene opportuno far lavorare gli studenti a gruppi raccogliendo le indicazioni che provengono da ciascun gruppo. Al termine l'attività dovrebbe produrre una discussione sul tipo di informazioni che si ritiene importante evidenziare e su come considerare i "salti" presenti.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

(A) Di seguito viene riportato il tariffario postale relativo alle lettere ordinarie
fino a 20 g (compreso): 0,41 euro
da 20 g (escluso) a 100 g (compreso): 0,77 €
da 100 g (escluso) a 350 g (compreso): 1,55 €
da 350 g (escluso) a 1000 g (compreso): 3,62 €
da 1000 g (escluso) a 2000 g (compreso): 6,22 €

a) Proponi una rappresentazione analitica della funzione che fornisce il costo di spedizione di una lettera in funzione della massa.
Quali sono il dominio e il codominio che ritieni più opportuno prendere per la funzione?

b) Rappresenta il grafico della funzione che fornisce il costo di spedizione.
La scelta precedentemente fatta del dominio e del codominio ti permette la rappresentazione?
Ritieni opportuno dover modificare la funzione (per quanto concerne dominio e codominio) per poterla rappresentare?
Quali ipotesi sulla massa sono necessarie? Sul prezzo sono indispensabili le stesse ipotesi?

c) Ci sono valori della massa che devono essere particolarmente tenuti "sotto controllo" da chi volesse spedire delle lettere? Quali e perché?

(B) Supponi ora che cambi il governo e che il nuovo Ministro delle Poste commissioni una ricerca in cui emerge che la maggior parte di chi spedisce lettere riempie la busta fino a quando la sua massa non è "appena sotto" (*come potrebbe tradurre il Ministro in termini matematicamente più corretti questa espressione?*) la massa in cui scatta l'aumento di tariffa. Per disincentivare questa abitudine, modifica il piano tariffario, proponendo il seguente:
da 0 g a 20 g (escluso) : 1 centesimi di euro per ogni grammo a partire da 0,30 € per 0 grammi.
da 20 g (compreso) a 100 g (escluso) : 0,6 centesimi di euro per ogni grammo a partire da 58 centesimi per le lettere da 20 g;
da 100 g (compreso) a 350 g (escluso) : 0,3 centesimi di euro per ogni grammo a partire da 1,06 € per le lettere da 100 g;
da 350 g (compreso) a 1000 g (compreso): 0,3 centesimi di euro per ogni grammo a partire da 2,1€ per le lettere da 350 g

da 1000 g (escluso) a 2000 g (compreso): 0,25 centesimi di euro per ogni grammo a partire da 5 € per le lettere da 1000 g

a) Proponi una rappresentazione analitica della funzione che fornisce il costo di spedizione di una lettera in funzione della massa.
Quali sono il dominio e il codominio che ritieni più opportuno prendere per la funzione? Cosa cambia, per tale scelta, rispetto alla funzione del caso (A)?

b) Rappresenta il grafico della funzione che fornisce il costo di spedizione.
La scelta precedentemente fatta del dominio e del codominio ti permette la rappresentazione?
Ritieni opportuno dover modificare la funzione (per quanto concerne dominio e codominio) per poterla rappresentare?
Quali ipotesi sulla massa sono necessarie? Sul prezzo sono indispensabili le stesse ipotesi? E' cambiata la tua risposta rispetto al caso (A)? Perché?

c) Ci sono valori della massa che devono essere particolarmente tenuti sotto controllo da chi volesse spedire delle lettere? Quali e perché?

d) Le funzioni che hai descritto e rappresentato sono realistiche o sono state costruite introducendo ipotesi o condizioni non legate alle grandezze coinvolte?
Motiva la risposta, evidenziando i motivi che giustificano o impongono tale scelta.

In entrambi i casi (A) e (B) le due funzioni che hai individuato possono essere rappresentate con tre modalità, a loro volta riferiti a tre ambiti distinti: descrittivo-linguistico, analitico e grafico. Rispondi, facendo riferimento a questi tre ambiti:

e) In quali condizioni è più conveniente un piano tariffario piuttosto che l'altro?
Quale modalità di presentazione della funzione ti permette di evidenziarlo meglio?
Quali modalità di presentazione della funzione ti permettono di verificare la tua supposizione?

f) Quali modalità di presentazione della funzione forniscono informazioni più esaurienti?
Quali modalità di presentazione della funzione forniscono informazioni più chiare?
Cosa intendi per "informazioni più esaurienti"?

Osservazioni sull'attività: vedi
Aspetti connessi al concetto globale e al concetto locale di continuità
Il tariffario postale: tracce per le possibili risposte

3.1.2.1.1. Il tariffario postale: tracce per le possibili risposte

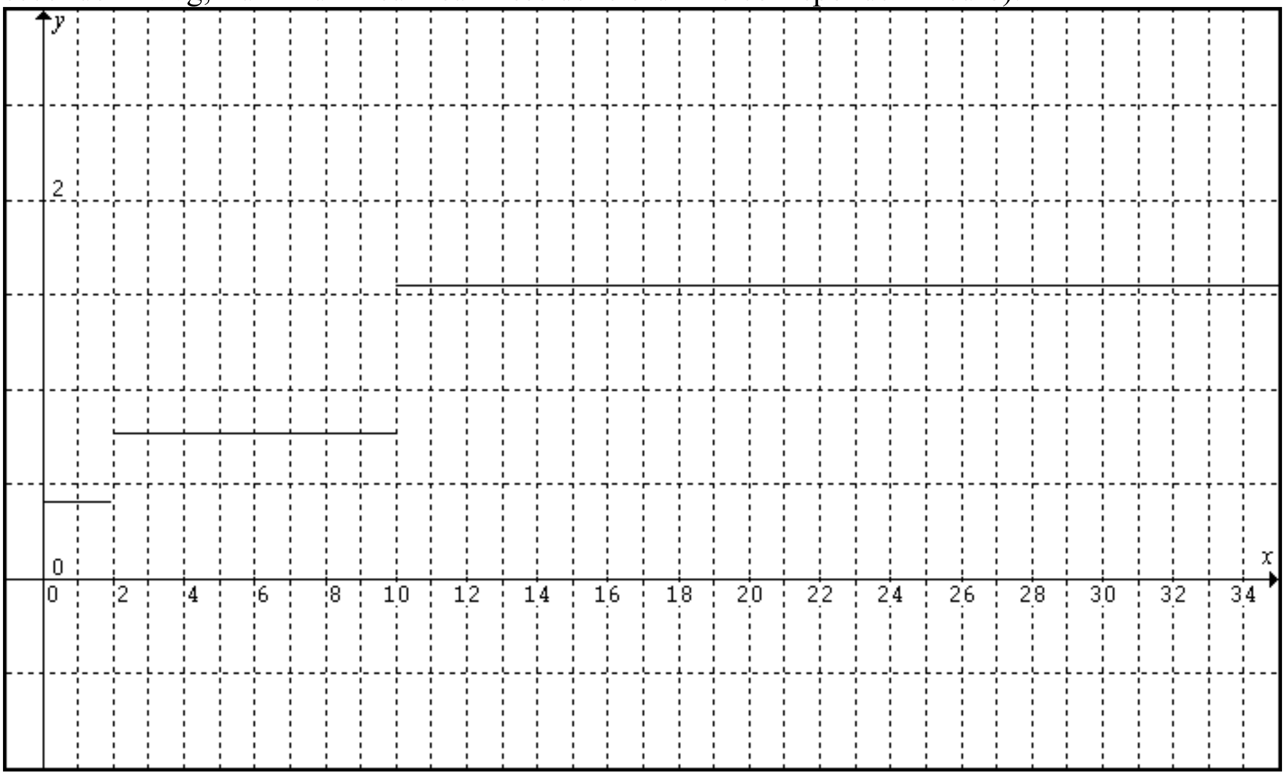
Tariffario (A)

a) Indicata con f la funzione che esprime il tariffario postale, una sua possibile rappresentazione analitica può essere la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}41 & 0 \le x \le 20 \\ 0{,}77 & 20 < x \le 100 \\ 1{,}55 & 100 < x \le 350 \\ 3{,}62 & 350 < x \le 1000 \\ 6{,}22 & 1000 < x \le 2000 \end{cases}$$

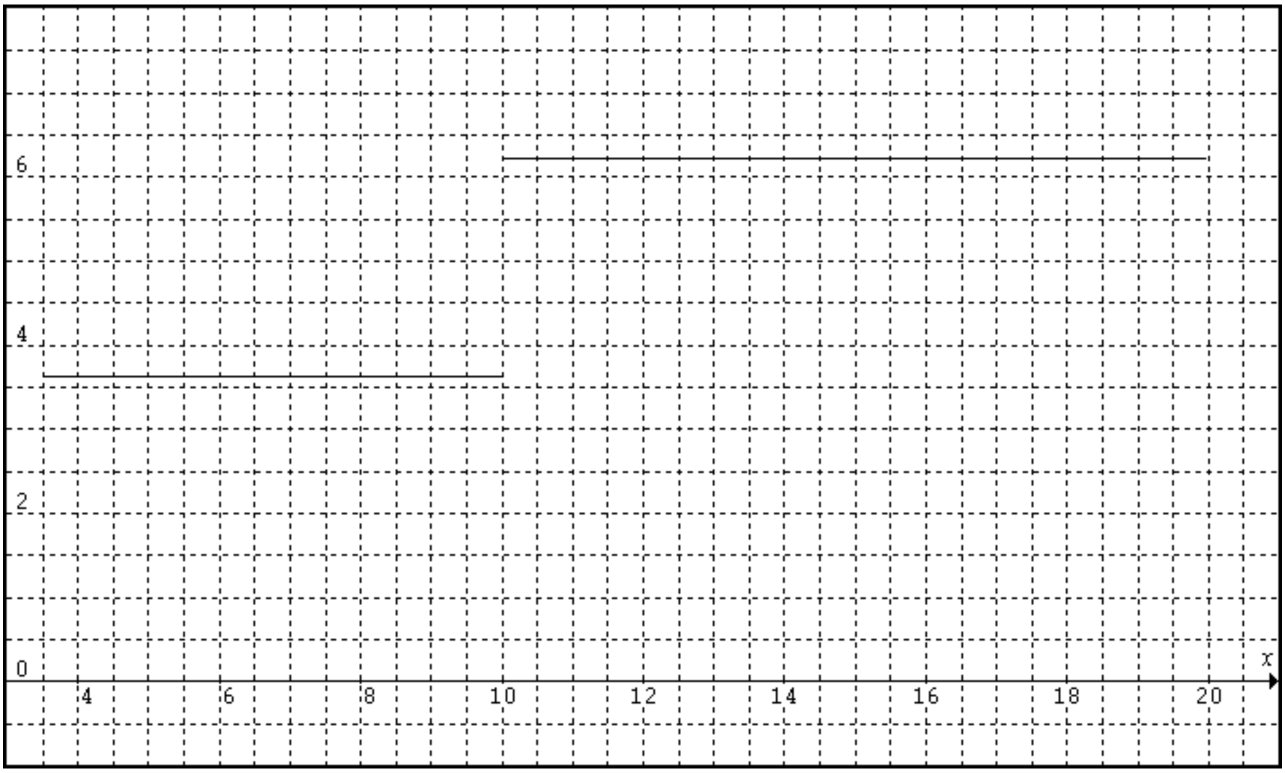
Tenendo conto che la massa di una lettera è misurata con bilance la cui sensibilità può essere dell'ordine del decimo o centesimo di grammo, come dominio si può considerare l'insieme $D=\{x\in Q/x=([q\bullet 100])/100$, con $q\in Q$[3] e $0\leq x\leq 2000\}$. Come codominio è possibile prendere Q (se il prezzo è espresso in euro) o N (se il prezzo fosse espresso in centesimi di euro).

b) Nel caso ci si preoccupi della rappresentazione, deve essere modificato il dominio: in questo caso la massa, come grandezza, deve essere ritenuta continua e la sua misura deve essere intesa come funzione matematica, sganciandola così dalle condizioni di misurabilità in senso fisico[4]. Il dominio deve quindi essere formato dai numeri reali compresi tra 0 e 2000 (estremi inclusi), mentre il codominio può rimanere Q.
Il grafico risulta quindi (nel primo grafico l'unità di misura sulle ascisse corrisponde a 10g, nel secondo a 100g; l'unità di misura sull'asse delle ordinate corrisponde a 1 euro):



3 Con [q] si intende la parte intera di q. I numeri così ottenuti sono i numeri razionali con al massimo due cifre decimali, nel caso la bilancia utilizzata abbia una sensibilità al centesimo di grammo. Nel caso la sensibilità sia al decimo di grammo, basterà moltiplicare e dividere per 10. Nel caso infine la sensibilità della bilancia sia il grammo, come dominio è possibile prendere l'insieme dei numeri naturali compresi tra 0 e 2000 (estremi inclusi).

4 Si tratta chiaramente di un modello, visto il limite atomico della divisibilità della massa. Tale modello, però, è fisicamente accettabile, visto l'ordine di grandezza degli atomi e delle particelle subatomiche.



c) I valori della massa da tenere sotto controllo sono quelli relativi ai punti di "saldatura" dei vari intervalli su cui è definita la funzione: 20, 100, 350, 1000. Ciò che dovrebbero emergere sono le diverse condizioni relative alla non continuità della funzione in tali punti. I salti, evidenziati anche dal grafico, pongono condizioni significative sui prezzi delle lettere.

Tariffario (B)

a) Indicata con g la funzione che esprime il tariffario postale, una sua possibile rappresentazione analitica può essere la seguente:

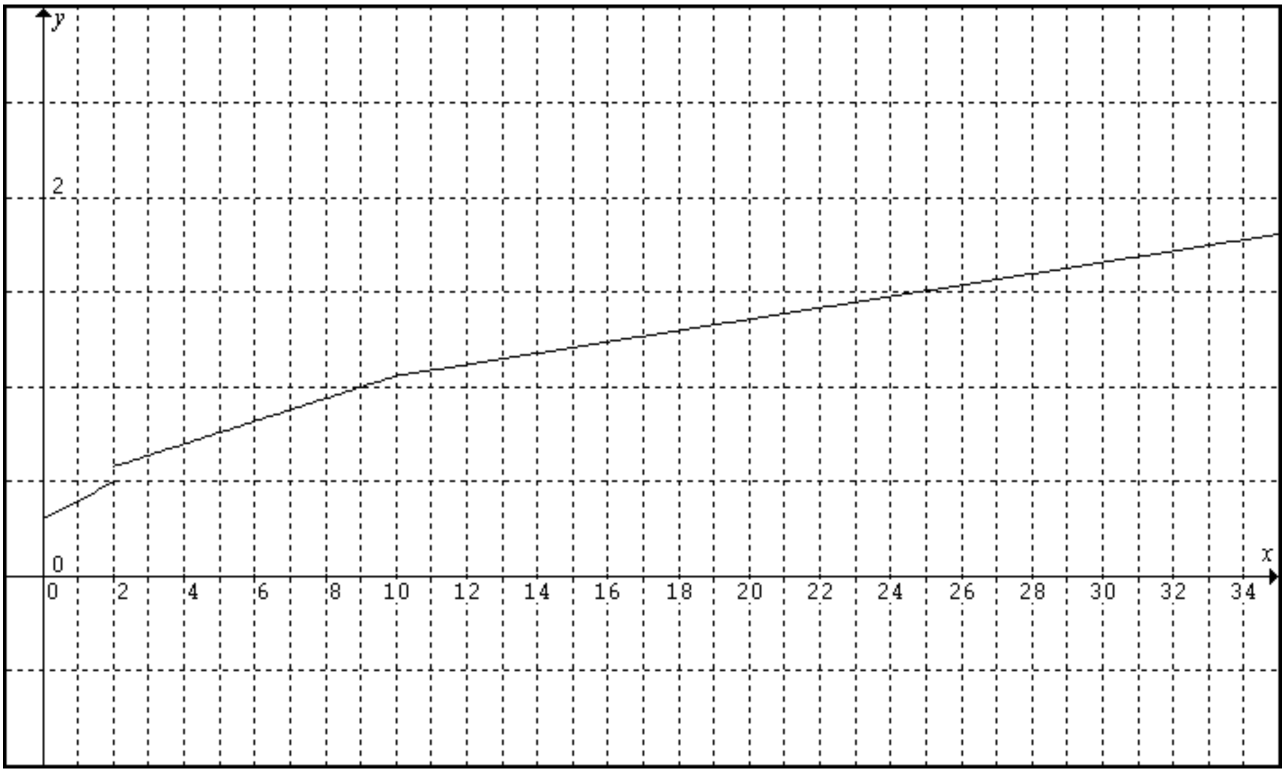
$$g(x) = \begin{cases} 0{,}30 + 0{,}01x & 0 \le x < 20 \\ 0{,}58 + 0{,}006(x-20) & 20 \le x < 100 \\ 1{,}06 + 0{,}003(x-100) & 100 \le x < 350 \\ 2{,}1 + 0{,}003(x-350) & 350 \le x \le 1000 \\ 5 + 0{,}0025(x-1000) & 1000 < x \le 2000 \end{cases}$$

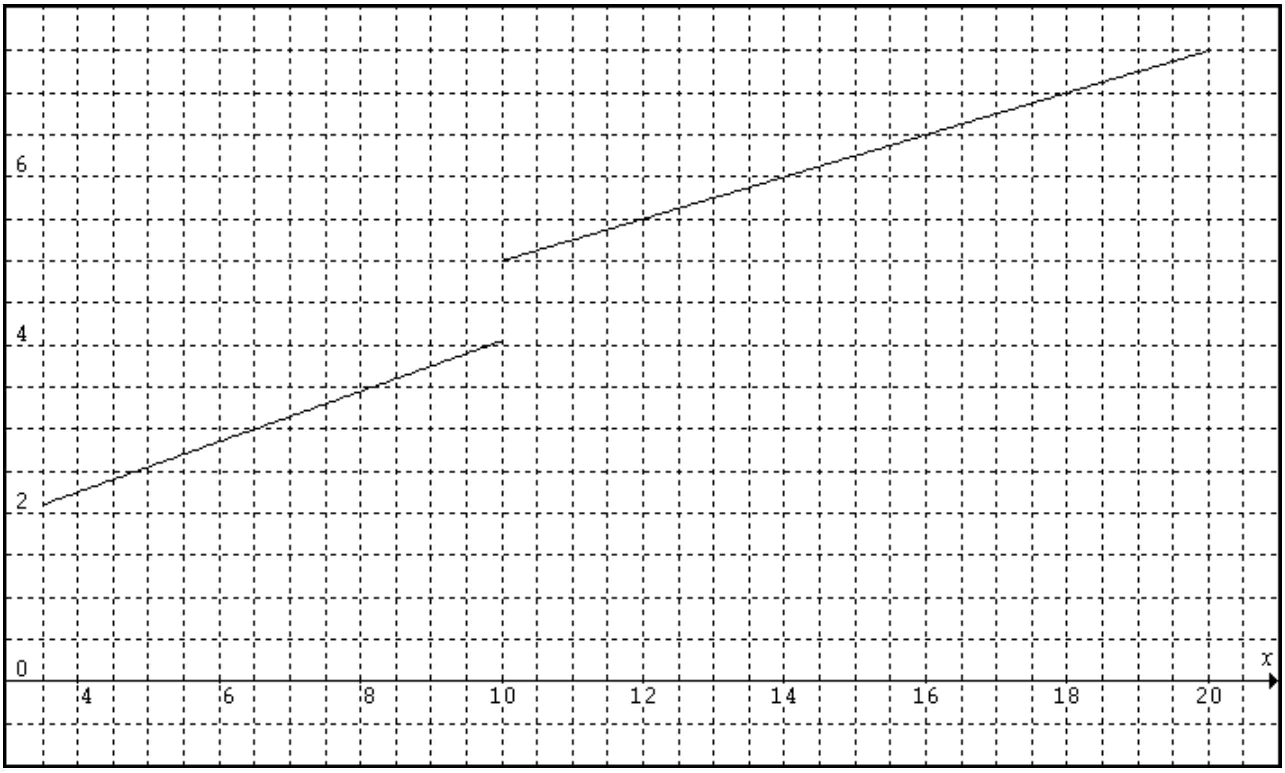
Rispetto al dominio, vale quanto detto al punto a) del tariffario (A). Per quanto riguarda invece il codominio, indipendentemente dall'unità di misura utilizzata per il prezzo (euro o centesimi di euro), questa volta non può che essere Q.

b) Per la rappresentazione, in questo caso, non è solo indispensabile pensare alla massa come grandezza continua, ma anche al prezzo. Se per quanto riguarda la massa la cosa è abbastanza legittimata sul piano fisico (vedi nota 2), per il prezzo risulta determinante il ruolo della modellizzazione matematica a sua volta funzionale alla rappresentazione.

In questa fase dovrebbe emergere come l'esigenza della rappresentazione "imponga" insiemi numerici adeguati allo scopo.

Il grafico in questo secondo caso risulta essere (nel primo grafico l'unità di misura sulle ascisse corrisponde a 10g, nel secondo a 100g; l'unità di misura sull'asse delle ordinate corrisponde a 1 euro):

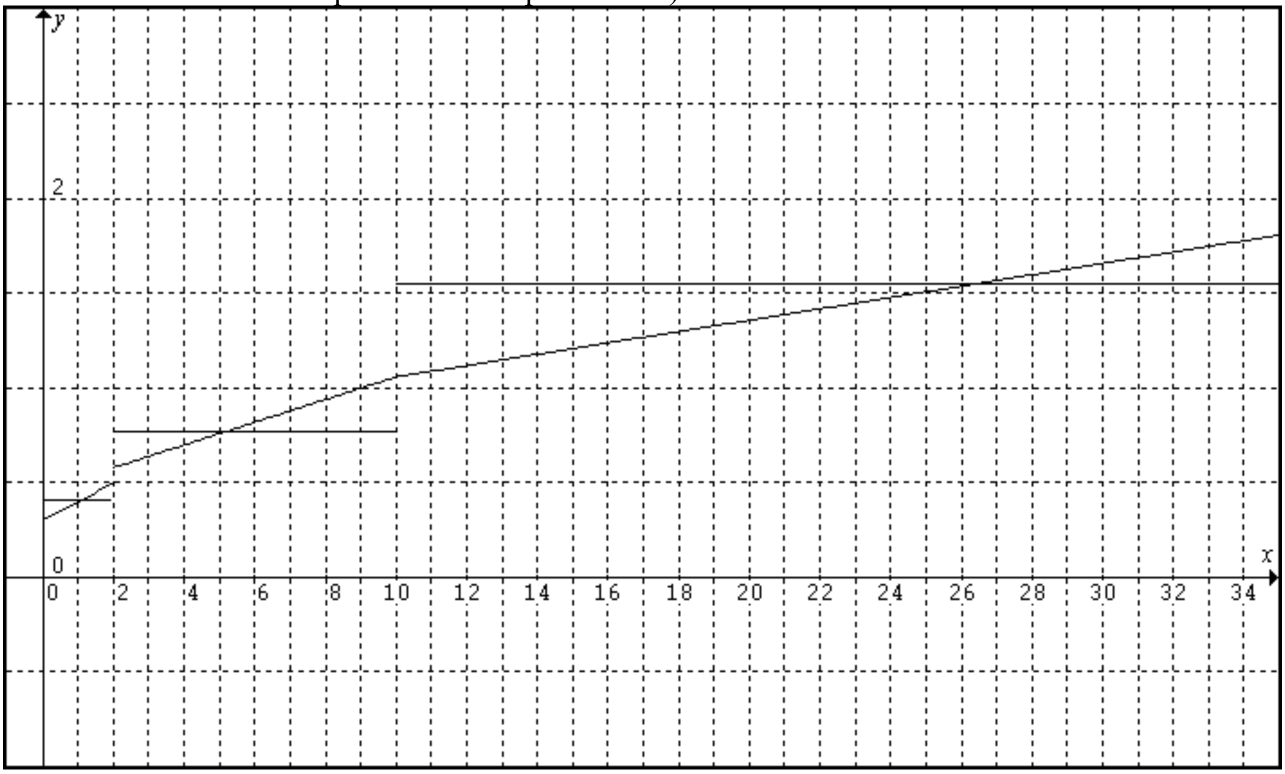


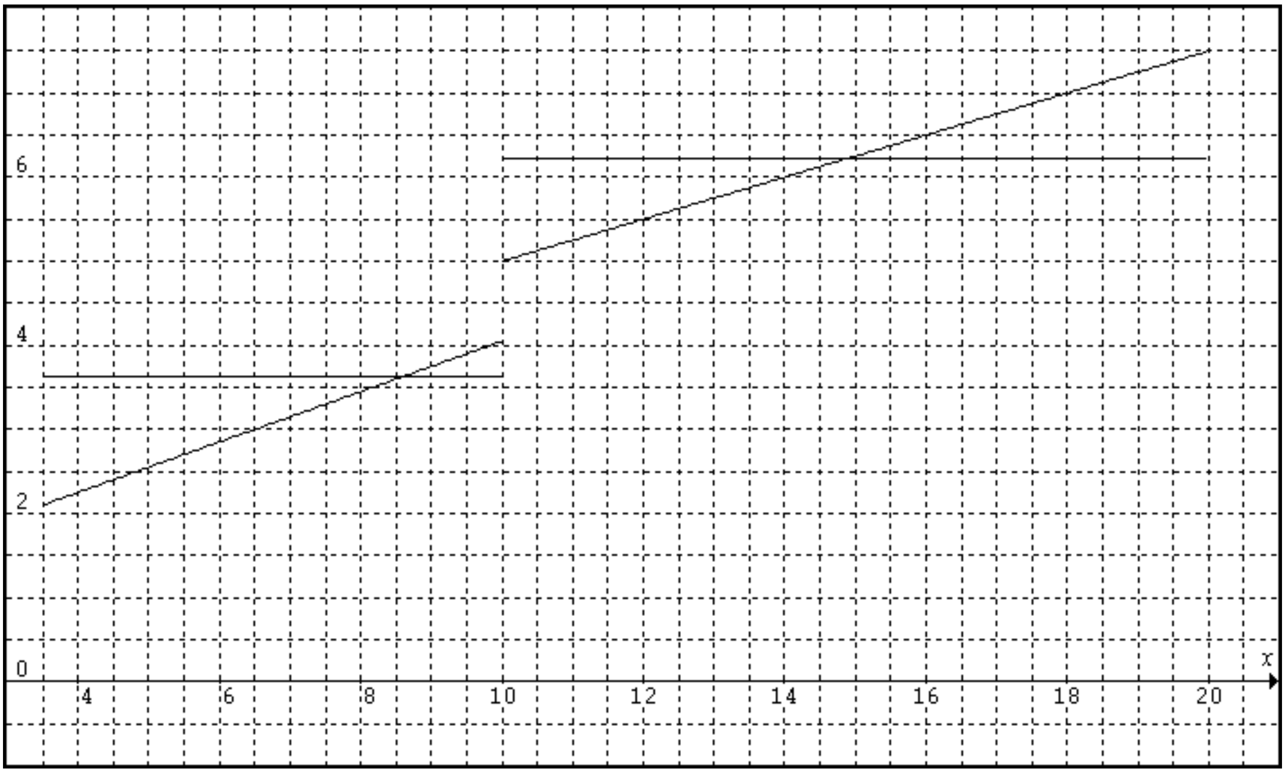


c) Oltre ai punti di non continuità della funzione, dovrebbe essere notato un "errore" nella proposta (B) relativo a x=100g. Nel punto corrispondente, infatti, la funzione non solo è continua, ma a destra ha pendenza minore, per cui chi spedisce una lettera non è incentivato a rimanere al di sotto di tale valore poiché un eventuale scostamento per eccesso costerebbe relativamente poco.

d) Le osservazioni si riallacciano a quelle del punto b): in particolare è irrealistica l'ipotesi di continuità sul prezzo; tale scelta, come detto, è motivata dall'esigenza della rappresentazione.

e) In questa parte dovrebbe emergere quale modalità di presentazione permette un confronto più diretto dei due piani tariffari, con particolare evidenza del ruolo del grafico.
Rappresentando in uno stesso riferimento i grafici delle due funzioni si ottiene (per le unità di misura sulle ascisse vale quanto detto in precedenza):





La modalità grafica rende evidenti, dal punto di vista qualitativo, gli intervalli in cui è più conveniente un piano tariffario piuttosto che l'altro. E' però indispensabile ricorrere alla modalità analitica se si vogliono determinare gli estremi di tali intervalli. In pratica la modalità grafica risulta sufficiente se si ha a che fare con valori "non vicini" ai punti di intersezione dei due grafici.

Nell'ottica della convenienza, quindi, anche i punti di intersezione sarebbero da tenere sotto controllo nel caso si potesse scegliere quale piano tariffario utilizzare.
Se ad esempio si volesse trovare il punto di intersezione appartenente all'intervallo [20;100] si dovrebbe risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 0{,}77 \\ y = 0{,}58 + 0{,}006(x - 20) \end{cases}$$

che ha come soluzione la coppia (155/3, 0,77). E' da osservare che 155/3=51,6666…. Si tratta quindi di un numero razionale non ottenibile come misura della massa di un oggetto misurata con una bilancia graduata (con base ovviamente decimale).

f) Le domande tendono ad evidenziare cosa associano gli alunni all'idea di informazione chiara ed informazione esauriente. Dovrebbe emergere l'importanza degli ambiti analitico e grafico a scapito di quello descrittivo e le loro risposte dovrebbero fare riferimento, a seconda del termine su cui pongono l'accento, ad uno di questi due ambiti. Ad esempio, per la visualizzazione dei "punti da tenere sotto controllo" come per il concetto di convenienza, l'ambito grafico risulta privilegiato per ottenere informazioni più chiare. Diverso il caso delle informazioni più esaurienti, se con questo termine ci si riferisce ad esempio agli estremi degli intervalli di convenienza, dove l'ambito analitico è, come visto, più idoneo.

3.1.3. Continuità globale e suo uso didattico.

Nella prassi didattica pre-analisi è d'uso fare riferimento al concetto globale di continuità, visto da diversi autori come intuitivo, seppure in modo implicito. Mai (o quasi mai) viene fatto riferimento al concetto locale di continuità.

Per una trattazione di questi concetti vai alle attività 3.1.3.1, 3.1.3.2., 3.1.3.3., 3.1.3.4., 3.1.3.5.

A livello elementare il concetto locale di continuità può essere visto come coincidenza delle informazioni dedotte (da una funzione) a livello puntuale e a livello locale: in pratica ciò "che dice" la funzione in un punto si lega con "ciò che dice" nelle sue vicinanze. Questa idea viene sviluppata solitamente (anche in modo implicito) quando il concetto di continuità viene trattato in modo tecnico durante i corsi di analisi.

3.1.3.1. Attività: Continuità e grafici di funzioni

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in evidenza gli ambiti in cui si utilizza implicitamente il concetto di continuità;
2) favorire un'analisi critica delle modalità didattiche utilizzate;
3) destabilizzare l'idea che si possa sempre rappresentare il grafico di una funzione.

Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine. L'attività dovrebbe essere proposta a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

a) Considera le seguenti relazioni:

Dominio: Q	Codominio: Q	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: Q	Codominio: R	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: R	Codominio: Q	Proposizione: y=2x/3+5
Dominio: R	Codominio: R	Proposizione: y=2x/3+5

Quali delle relazioni precedenti sono funzioni?
Di quali, tra le relazioni precedenti è possibile rappresentare il grafico?
Motiva la risposta data.

Osservazioni sull'attività: vedi La continuità globale implicita nella prassi didattica

3.1.3.2. Attività: Problema sul montante

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

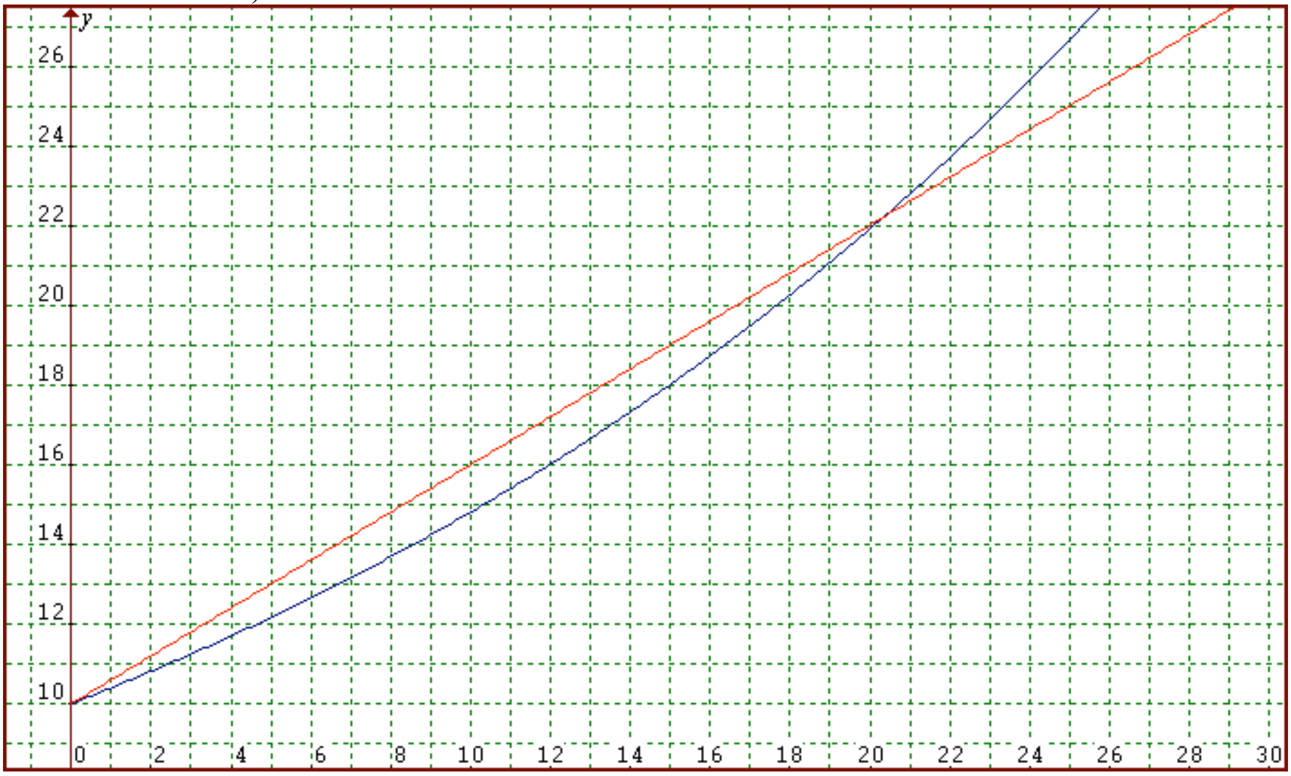
1) mettere in evidenza gli ambiti in cui si utilizza implicitamente il concetto di continuità;
2) favorire un'analisi critica delle modalità didattiche utilizzate;
3) porre il problema delle proprietà di invertibilità della funzione esponenziale
4) individuare funzioni continue come modelli di fenomeni reali .

Modalità di presentazione: L'attività dovrebbe essere proposta a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione. Inoltre può essere proposta con una duplice finalità: introduzione alla funzione esponenziale e come riflessione sulle proprietà della funzione esponenziale una volta nota. Questa duplice finalità può rendere l'attività riproponibile in momenti diversi del percorso didattico, modificando eventualmente l'elenco delle richieste.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.
NB. Tra parentesi quadre le risposte attese.

Supponi di avere un "capitale" di 1.000 euro e di portarlo in banca. L'impiegato ti spiega che loro danno interessi del 4% con capitalizzazione degli interessi. Alle tue richieste, ti spiega che alla fine dell'anno anche sugli interessi maturati gli anni precedenti ti verrà dato il 4% d'interesse. In alternativa, ti possono dare un interesse semplice dell'6%, cioè gli interessi maturano tutti gli anni solo sul capitale. Non ti sarà difficile verificare che nel primo caso la legge che fornisce il montante (cioè il capitale dopo un certo periodo di tempo) è data da
$M=C(1+i)^t$
(dove t rappresenta il tempo, C il capitale iniziale ed i il tasso d'interesse)
mentre nel secondo caso è data da
$M=C(1+it)$.
Mentre la legge del secondo caso è nota (c'è una relazione lineare tra montante e tempo), la prima risulta nuova (*frase da lasciare solo se la funzione non è nota*) ; in particolare, nel caso della capitalizzazione degli interessi (prima condizione), prova a rispondere a queste domande (utilizzando i dati precedenti):
a) Dopo 5 anni, 3 mesi e 24 giorni, a quanto ammonta il capitale?
b) Come tu sai il tempo è continuo (o meglio, viene considerato tale) e quindi ha senso parlare di $\sqrt{173}$ anni (indipendentemente dal fatto che sia significativo); dopo un tempo siffatto, a quanto ammonta il tuo capitale? Quali ipotesi dovresti fare sulla grandezza "capitale"?
c) Dopo quanto tempo avrai un montante di 4.000 euro?
d) Come dovrebbe essere la funzione perché la domanda precedente abbia risposta? [*suriettiva su* $\boldsymbol{R}^+$]
e) Chi garantirebbe tale proprietà? [*la continuità dell'esponenziale*]
f) E' più conveniente la prima o la seconda proposta della banca? oppure questo dipende dal tempo in cui tieni impegnato il capitale? ed allora, fino a quando conviene l'uno anziché l'altro?
g) Come faresti a rispondere alla domanda precedente? Sotto quali ipotesi potresti effettuare una rappresentazione grafica della situazione?

Commento:
Come suggerito, questa attività può essere proposta sia come introduzione alla funzione esponenziale, sia come riflessione sulle proprietà di tale funzione.
In particolare le richieste a) e b) dovrebbero servire per introdurre le potenze ad esponente reale (supponendo il capitale una grandezza continua), mentre le richieste d) ed e) dovrebbero porre l'accento sulla necessità che la funzione esponenziale abbia come insieme delle immagini $\mathbf{R}^+$,

aspetto questo in genere dato per scontato, ma difficilmente giustificabile senza fare ricorso alla continuità della funzione.
Le richieste f) e g) giustificano la scelta di un modello di grandezze continue nell'ottica della rappresentazione. Una parte dei grafici corrispondenti alle due funzioni sono (in rosso il grafico relativo alla capitalizzazione semplice, in blu quello relativo alla capitalizzazione composta. L'unità di misura relativa all'asse delle ascisse corrisponde ad un anno; quella relativa all'asse delle ordinate a 100 euro):



Il grafico evidenzia fino a quando può essere conveniente una soluzione piuttosto che l'altra, ponendo anche il dubbio che non ci siano altri punti di intersezione e suggerendo quindi la necessità di una ulteriore indagine con strumenti quali Derive.
La ricerca del punto di intersezione, infine, ripropone il problema della risoluzione approssimata con metodi numerici di un'equazione.

Ulteriori osservazioni sull'attività: vedi La continuità globale implicita nella prassi didattica

3.1.3.3. Attività: Disequazioni in R

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in evidenza gli ambiti in cui si utilizza implicitamente il concetto di continuità;
2) favorire un'analisi critica delle modalità didattiche utilizzate;
3) destabilizzare l'idea che sia sempre possibile rispondere alle richieste proposte;
4) porre il problema sul senso dell'esistenza di una soluzione
5) distinguere la richiesta di esistenza da quella di determinazione di una soluzione.

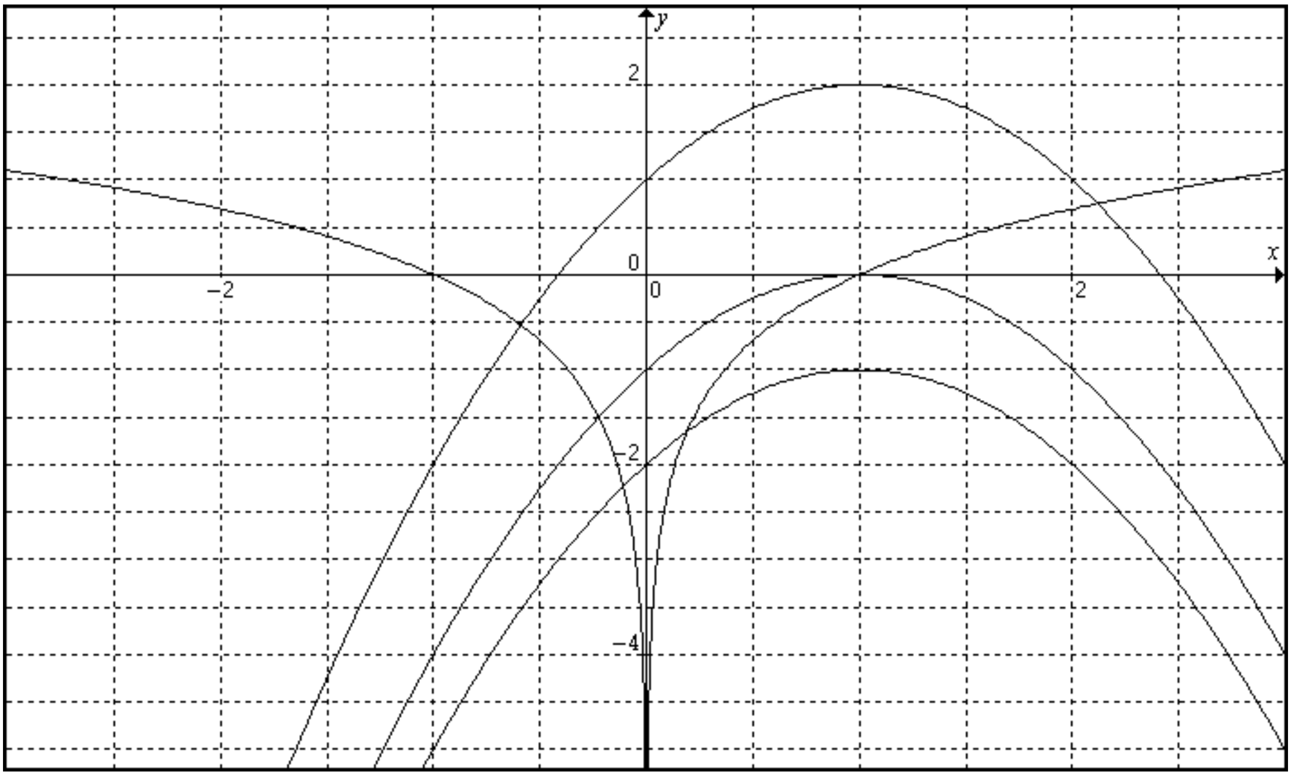
Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine, selezionando eventualmente le richieste più significative per quella classe. L'attività dovrebbe essere proposta a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

Considera la seguente disequazione in **R** nella variabile x e con parametro k:
(1) $\ln|x|+x^2-2x+k<0$
a) Dimostra che per ogni valore di k reale ci sono due numeri reali $a>0$ e $b>0$ tali che
$\ln|a|+a^2-2a+k>0$ e $\ln|b|+b^2-2b+k<0$
b) C'è una proprietà analoga nel caso in cui a e b siano negativi?
c) Dimostra che per ogni valore di k esistono due intervalli di numeri reali che verificano la (1).
d) Risolvila nel caso in cui sia $k=-1$.
e) Quale tra le due ultime richieste fornisce, una volta risolta, maggiori informazioni?
f) A quale delle richieste dei punti c) e d) è possibile rispondere?
g) Quale "idea" (teorema, se rivolto ad insegnanti) matematica giustifica la risposta al punto c)?

Osservazioni sull'attività: vedi
La continuità globale implicita nella prassi didattica
Traccia di soluzione all'attività Disequazioni in R

3.1.3.3.1 Traccia di soluzione dell'attività Disequazioni in R

Se si considerano le funzioni
di dominio $\mathbf{R_0}$ e codominio **R** individuata da f(x)=ln|x|
di dominio **R** e codominio **R** individuata da $g(x)=-x^2+2x-k$ ($k\in R$)
la disequazione (1) può essere vista come f(x)<g(x).
Poiché y=g(x) individua un fascio di parabole aventi lo stesso asse di simmetria x=1 con concavità rivolta verso il semiasse negativo delle ordinate, si tratta di valutarne la posizione del vertice. Nel grafico sottostante vengono riportati, a titolo di esempio, i grafici di tre parabole del fascio corrispondenti a un valore di k<1 (vertice nel primo quadrante), a k=1 (vertice sull'asse delle ascisse) e a un valore di k>1 (vertice nel quarto quadrante):



a) Se k=1 un punto di intersezione tra i grafici delle due funzioni è (1,0). Poiché in tale punto le due curve hanno tangenti diverse, se x<1 f(x)<g(x), mentre se x>1 f(x)>g(x).
Se k<1 il vertice della corrispondente parabola ha ordinata positiva. Posto quindi b=1 si ha che $\ln|b|+b^2-2b+k<0$. Inoltre poiché per $x\rightarrow+\infty$ si ha che $f(x)\rightarrow+\infty$ e $g(x)\rightarrow-\infty$, esiste un numero reale a per cui f(a)>0 e g(a)<0 e quindi $\ln|a|+a^2-2a+k>0$.
Se k>1 la corrispondente parabola ha il vertice con ordinata negativa, per cui posto a=1 si ha $\ln|a|+a^2-2a+k>0$. Poiché per $x\rightarrow0^+$ $f(x)\rightarrow-\infty$ e $g(x)\rightarrow-k$, esiste in un intorno destro di 0 (contenuto in [0;1]) un numero reale b tale che f(b)<-k. Poiché inoltre la funzione y=g(x) è crescente in [0;1], g(b)>-k, da cui $\ln|b|+b^2-2b+k<0$.

b) La risposta, affermativa, si giustifica con considerazioni analoghe alle precedenti, osservando che per $x\rightarrow-\infty$ $f(x)\rightarrow+\infty$ e $g(x)\rightarrow-\infty$.

c) Le considerazioni ai punti a) e b) precedenti garantiscono l'esistenza di due numeri reali $\alpha<0$ e $\beta>0$ tali che $f(\alpha)=g(\alpha)$ e $f(\beta)=g(\beta)$. La disequazione (1) ha come insieme di soluzioni l'unione degli intervalli $]\alpha;0[$ e $]0;\beta[$, sempre in base alle considerazioni fatte in a) e b). E' da osservare che per l'esistenza di α e β occorre fare implicitamente riferimento alla continuità delle funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

d) Le considerazioni precedenti garantiscono l'esistenza di soluzioni senza permettere di determinare esplicitamente α e β. Apparentemente la richiesta del punto d), riferita ad un caso particolare, sembra più semplice, ma l'esplicita determinazione delle soluzioni (cioè degli estremi degli intervalli che le individuano), non è possibile se non con metodi numerici che permettano di trovare un'approssimazione delle soluzioni dell'equazione $\ln|x|=-x^2+2x-k$. Ciò che dovrebbe emergere in questo punto è che la richiesta sul caso particolare, formulata come risoluzione e non come dimostrazione di esistenza, risulta più difficile e senza risposta, se non in termini, appunto, approssimati.

e) Questo punto dovrebbe servire per avviare una discussione sul concetto di informazione e, soprattutto, su come viene inteso dagli alunni. Se tale concetto è riferito a condizioni di esistenza, è il punto c) a fornirne di più esaurienti. Diverso il caso se per informazione si intendono intervalli di cui si riesce a darne una rappresentazione. La risposta d), seppure legata ad approssimazioni, risulta essere allora più esauriente.
Dietro le risposte date dagli alunni relativamente a ciò che loro intendono per "maggiori informazioni" è possibile vedere anche secondo quale logica si rapportano alle questioni: classica (è sufficiente dimostrare l'esistenza) o costruttivista (garantire l'esistenza non basta se non è garantita anche la procedura per la determinazione dell'ente coinvolto). In pratica la richiesta potrebbe costituire una opportunità per discutere del concetto che loro hanno (o che per loro è significativo) di esistenza in matematica.

f) La richiesta è strettamente legata alla precedente e ne costituisce un ulteriore approfondimento dei temi coinvolti.

g) Come indicato, la risposta al punto c) presuppone la continuità delle funzioni coinvolte. Il teorema di riferimento, da questo punto di vista, è il teorema degli zeri applicato alla funzione $y=\ln|x|+x^2-2x+k$ relativamente agli intervalli $[a;b]$ (o $[b;a]$) individuati ai punti a) e b).

3.1.3.4. Attività: Disequazioni in RxR

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in evidenza gli ambiti in cui si utilizza implicitamente il concetto di continuità;
2) porre il problema di cosa comporti risolvere una disequazione in due variabili.

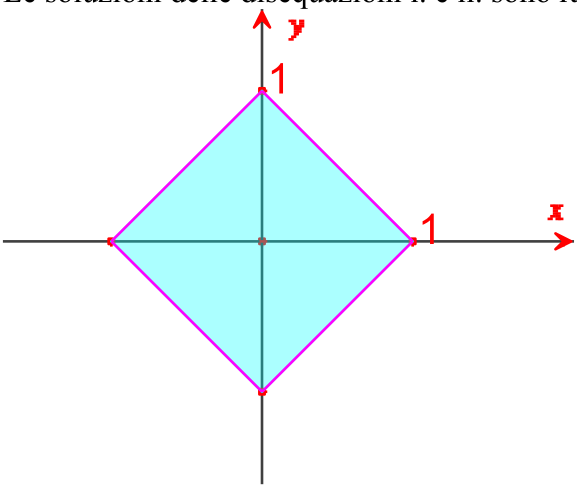
Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine. L'attività dovrebbe essere proposta a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

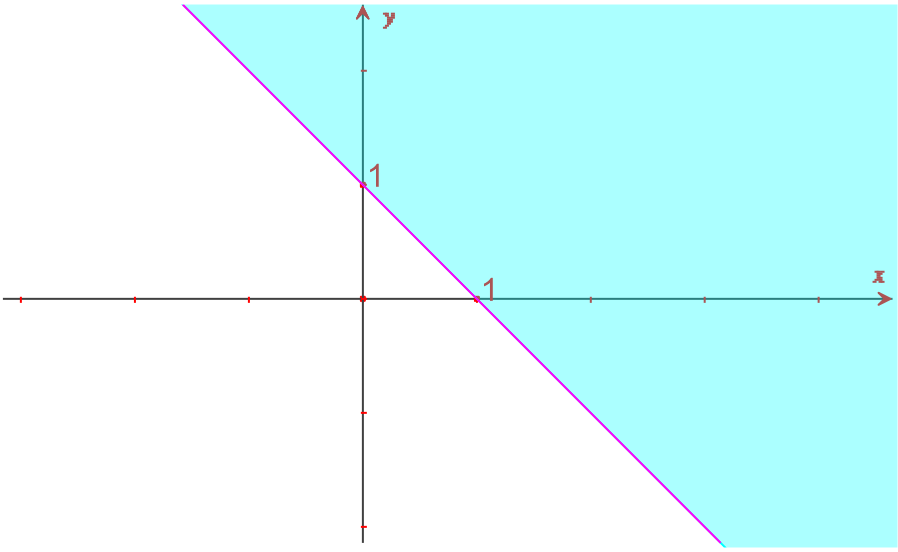
Risolvi le seguenti disequazione in **RxR** e rappresenta l'insieme delle soluzioni in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:
i. $|x|+|y|<1$ ii. $x+y>1$
a) In riferimento al punto ii. considera il punto O(0,0) e il punto $P(e^{\pi^{-1}},\pi^{e-\ln_\pi})$. Relativamente ai punti del segmento [OP], cosa puoi dire rispetto all'equazione $x+y=1$?
b) Indicato con Q il punto di intersezione tra la retta r di equazione $x+y=1$ ed il segmento [OP], cosa puoi dire delle coordinate dei punti del segmento [OQ] relativamente alla disequazione $x+y>1$?
c) E di quelle dei punti del segmento [QP]?
d) Chi garantisce questi risultati?
e) Come li giustificheresti?

Osservazioni sull'attività: vedi
La continuità globale implicita nella prassi didattica
Traccia di soluzione all'attività Disequazioni in RxR

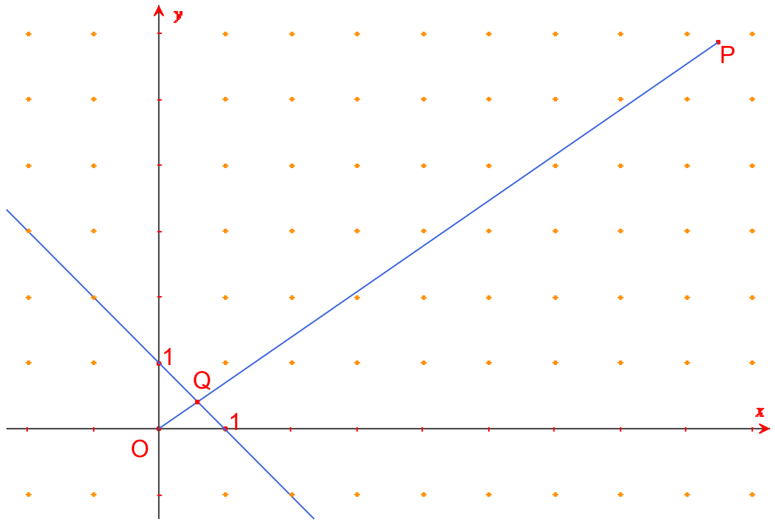
3.1.4.1.1. Traccia di soluzione dell'attività Disequazioni in RxR

Le soluzioni delle disequazioni i. e ii. sono rappresentate nei seguenti grafici:





a) I punti O e P si trovano in semipiani opposti rispetto alla retta x+y=1. Il segmento [OP] interseca quindi la retta. In questa affermazione si presuppone che la retta (e con essa l'insieme dei numeri reali) sia continua. Esiste quindi un punto Q del segmento [OP] le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione x+y=1.



b)-c) Il punto Q separa i punti del segmento [OP] le cui coordinate non sono soluzioni della disequazione x+y>1 (punti di [OQ]) da quelli le cui coordinate ne sono soluzioni (i punti di [QP]).

d) I risultati dei punti precedenti sono garantiti dalla connessione dei semipiani. Intuitivamente questo si traduce col fatto che il passaggio, attraverso un cammino continuo, da un punto le cui coordinate sono soluzioni di una disequazione in due variabili a quelle di un punto le cui coordinate non lo sono deve avvenire passando per un punto le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione ottenuta sostituendo il predicato > (o <) col predicato di uguaglianza (equazione associata alla disequazione). In questa supposizione si dà per scontato non solo la continuità del cammino che unisce i due punti, ma anche la continuità della curva corrispondente all'equazione associata alla disequazione.

e) Al di là delle considerazioni intuitive, si può dimostrare quanto affermato al punto precedente risolvendo il sistema:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x + y > 1 \\ y = \dfrac{\pi^{e-\ln\pi}}{e^{\pi-1}}x \\ 0 \le x \le e^{\pi-1} \end{cases}$$

che ha come soluzione i punti del segmento individuato dal sistema

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi^{e-\ln\pi}}{e^{\pi-1}}x \\ \dfrac{e^{\pi-1}}{\pi^{e-\ln\pi} + e^{\pi-1}} < x \le e^{\pi-1} \end{cases}$$

Ciò che è opportuno osservare è che il sistema (B) fornisce le coordinate di tutti e soli i punti del segmento [OP] che verificano la disequazione. Inoltre le soluzioni del sistema (B) richiedono solo la continuità della retta nel piano cartesiano.

3.1.3.5. Attività: Problemi geometrici di max-min risolvibile in modo elementare

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in evidenza gli ambiti in cui si utilizza implicitamente il concetto di continuità;
2) favorire un'analisi critica delle modalità didattiche proposte;
3) porre il problema di cosa si possa intendere per esistenza di una soluzione in ambito geometrico.

Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine, a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

(A) Si deve costruire un ponte, perpendicolare alle rive di un fiume, per congiungere due paesi, A e B, posti da parti opposte del fiume e a distanze diseguali dalle rive, ma non sulla stessa perpendicolare rispetto alle rive del fiume.
i. Dove deve essere costruito il ponte affinché il percorso da A a B sia minimo?
ii. Dove deve essere costruito il ponte affinché A e B siano alla stessa distanza dall'ingresso del ponte rispettivamente a loro più prossimo?
(Problematicamente 9-23 febbraio 2003)
a) Il problema ha sempre soluzione?
b) Cosa significa, per un problema di questo tipo, avere soluzione?
c) Quali sono le maggiori difficoltà che hai incontrato nel cercare la soluzione?
d) Chi ti garantisce l'esistenza della soluzione?

(B) Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza individua quello di area massima.
a) Il problema ha sempre soluzione?
b) Cosa significa, per un problema di questo tipo, avere soluzione?
c) Quali sono le maggiori difficoltà che hai incontrato nel cercare la soluzione?
d) Chi ti garantisce l'esistenza della soluzione?

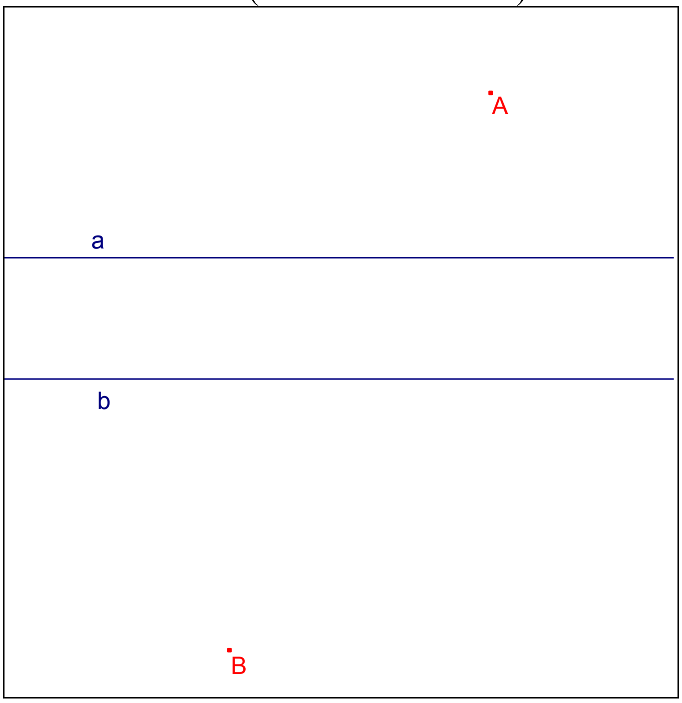
Osservazioni sull'attività: vedi
La continuità globale implicita nella prassi didattica
Proposta di soluzione ai problemi dell'attività Problemi geometrici di max-min risolvibile in modo elementare

3.1.3.5.1. Proposta di soluzione ai problemi dell'attività Problemi geometrici di max-min risolvibile in modo elementare

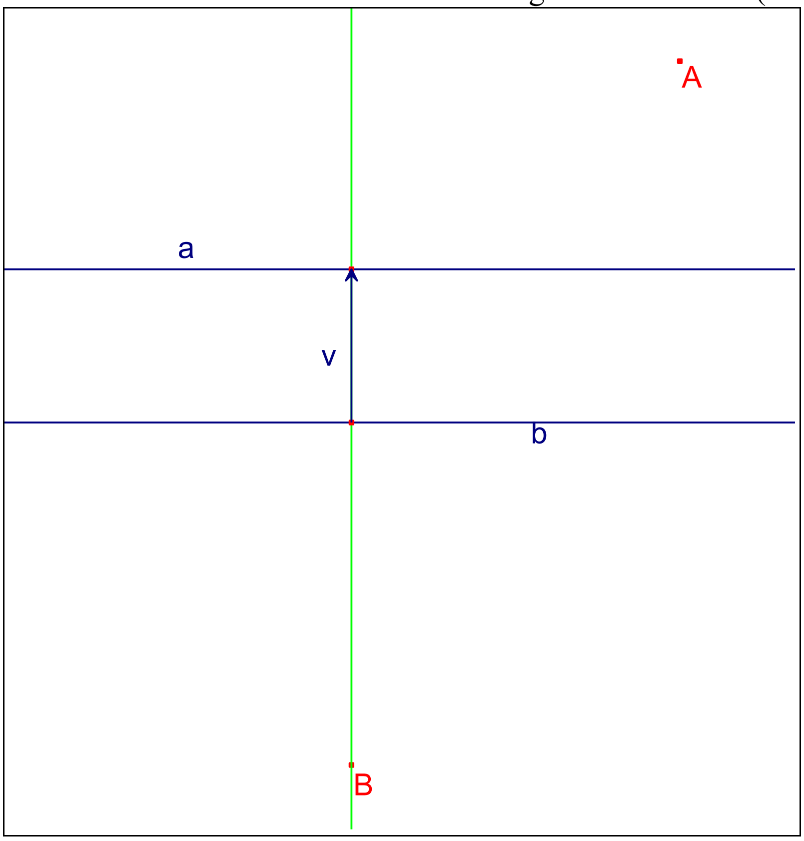
(A) Ci sono diverse modalità di soluzione. Quella proposta permette di rispondere rifacendosi a casi particolari di situazioni elementari.

i. Caso particolare: se il fiume avesse larghezza nulla, il tragitto più breve da A a B sarebbe dato dal segmento [AB]. Il "ponte" quindi dovrebbe essere costruito nel punto di intersezione del "fiume" col segmento [AB].
La considerazione relativa a questo caso particolare suggerisce anche che nel caso non banale di larghezza del fiume non nulla, i segmenti congiungenti i paesi con l'ingresso del ponte a loro più prossimo siano paralleli. L'idea, quindi, può essere quella di rendere "nulla" la larghezza del fiume mediante una traslazione di B (ottenendo B')e successivamente traslare con un vettore opposto il punto ottenuto dall'intersezione della riva più vicina ad A col segmento [AB'].

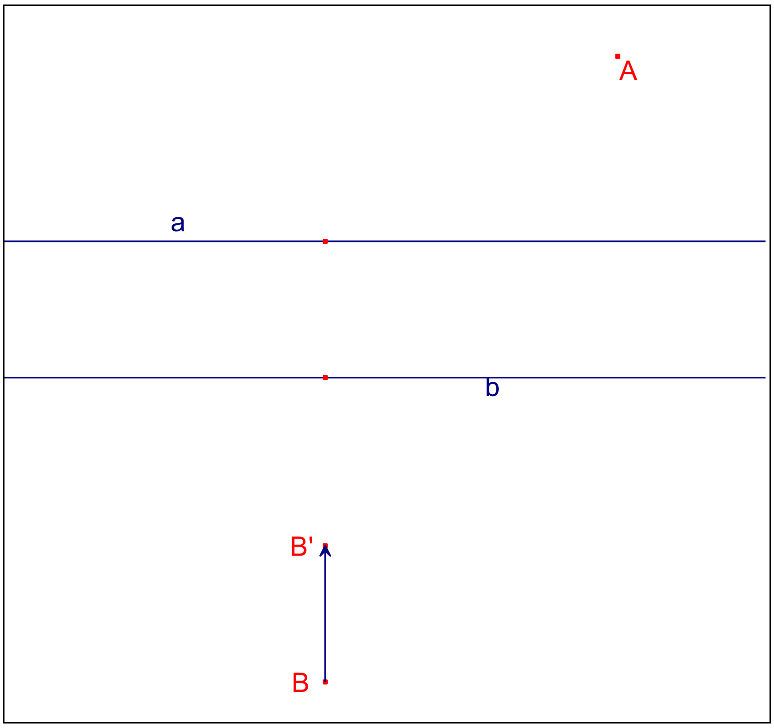
Nelle figure seguenti sono riportate le varie costruzioni.
Situazione iniziale (a e b: rive del fiume):



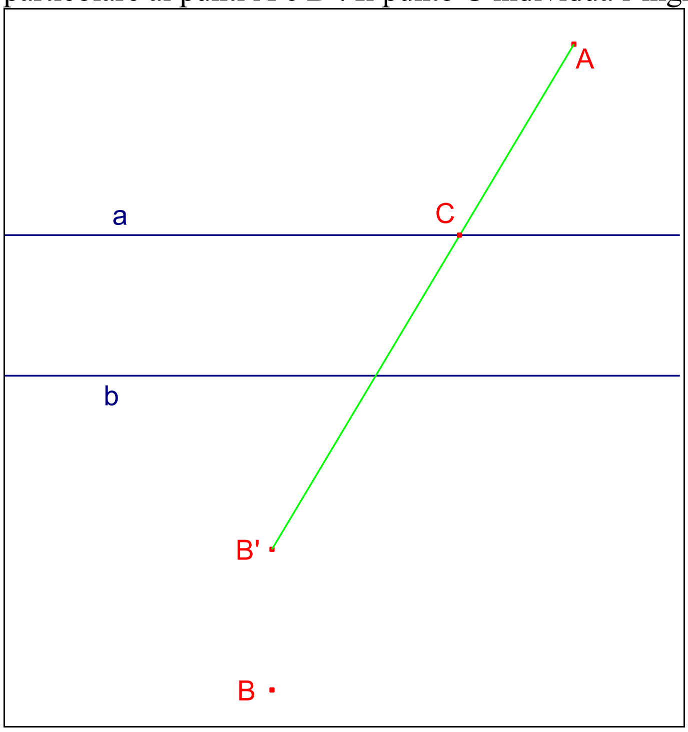
Costruiamo il vettore che individua la larghezza del fiume (da b ad a):



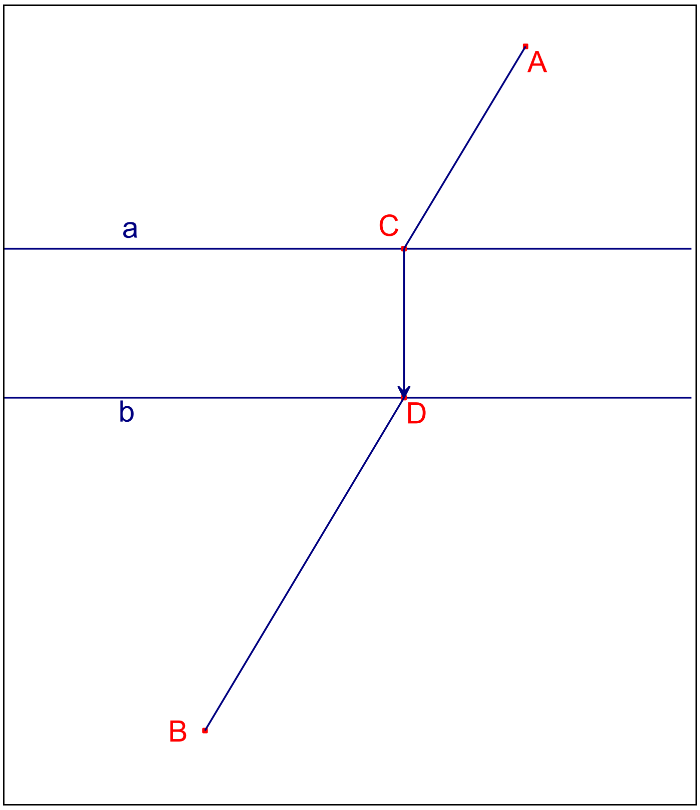
Applichiamo la traslazione di vettore v a B (otteniamo B'):



Con questa costruzione è come se avessimo annullato la larghezza del fiume. Applichiamo il caso particolare ai punti A e B’. Il punto C individua l’ingresso del ponte più prossimo ad A:

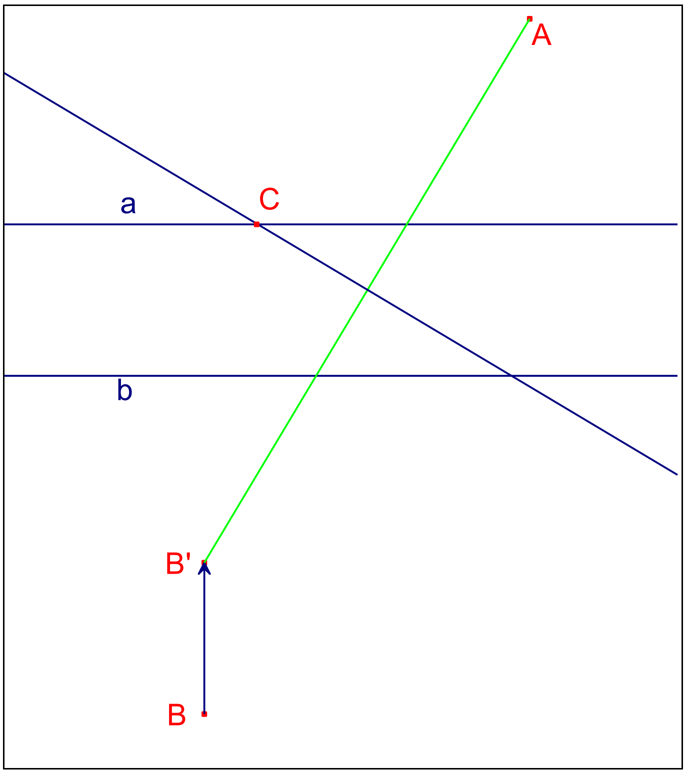


A questo punto è sufficiente applicare a C una traslazione di vettore –v per ottenere l’ingresso del ponte (D) più prossimo a B. Tale traslazione (che trasforma B’ in B) ha la caratteristica di rimettere “tutto a posto”:

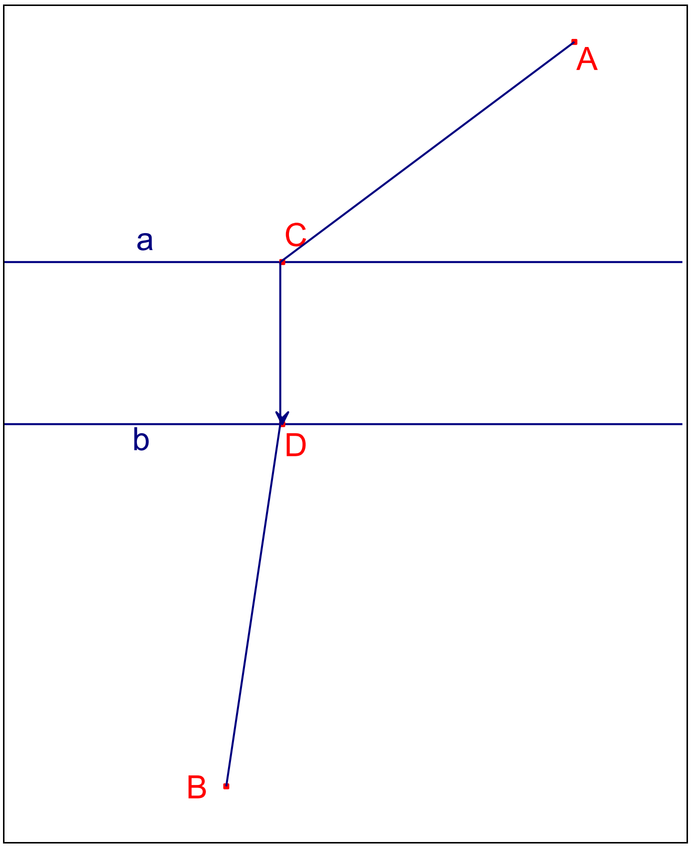


E’ facile dimostrare che AC e BD sono effettivamente paralleli (BB’CD è un poarallologramma)

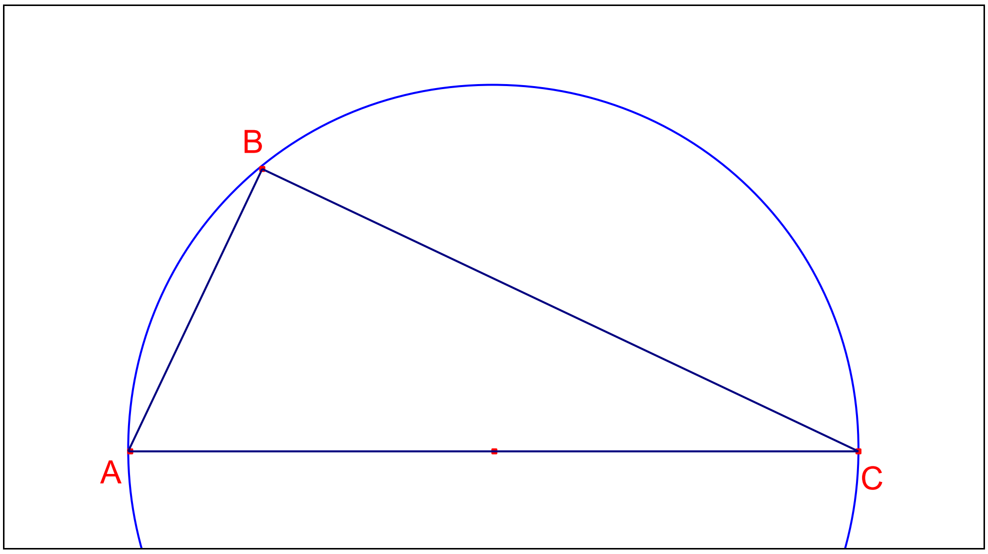
ii. Considerando sempre come caso particolare quello in cui la larghezza del fiume è nulla, la posizione del ponte sarebbe individuata dall’intersezione dell’asse del segmento [AB] (luogo dei punti equidistanti da A e da B) con la retta che individua il fiume (e le sue rive).
Procedendo come fatto in precedenza con una traslazione che di fatto annulli la larghezza del fiume, si ottiene:



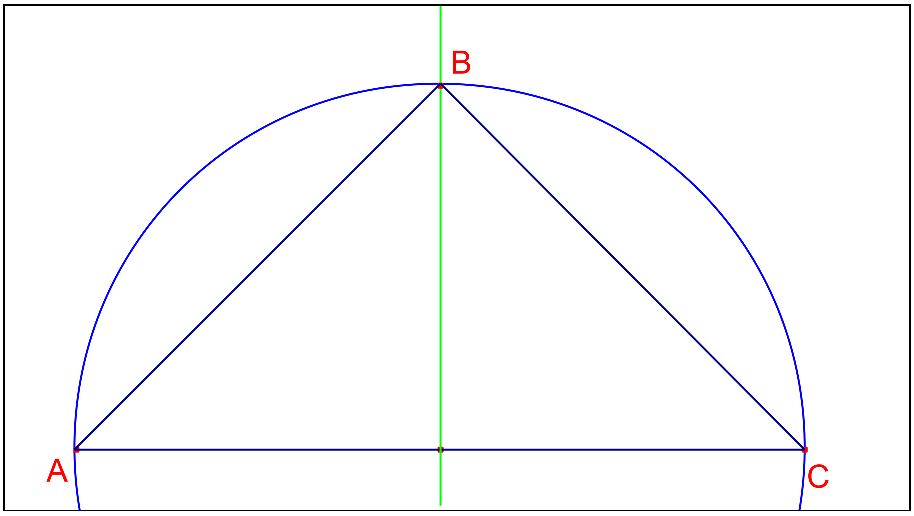
da cui, applicando a C la traslazione di vettore –v:



(B) E' un problema classico, facilmente risolvibile tenendo conto che ciascuna diagonale di un rettangolo inscritto in una circonferenza è un diametro della circonferenza stessa. E' sufficiente quindi trovare quando è massima l'area di un triangolo (rettangolo) inscritto in una semicirconferenza:



Poiché tutti questi triangoli hanno l'ipotenusa comune [AC], l'area sarà massima quando sarà massima l'altezza relativa all'ipotenusa. Questo si ha quando B è punto medio dell'arco AC, cioè quando la distanza di B da [AC] è uguale al raggio (misura massima di una semicorda di una circonferenza):



Il punto B si ottiene dall'intersezione della perpendicolare mandata da O al diametro [AC].

Traccia per le risposte

Per problemi di questo tipo, avere soluzione significa trovare una costruzione che permetta di individuare il punto (o i punti) che risolvono il problema. In questo caso quindi mentre si garantisce l'esistenza della soluzione, si illustra un procedimento (costruttivo) per trovarla, ponendosi quindi in un'ottica tipicamente euclidea. La situazione è quindi radicalmente diversa da quella vista in 3.1.3.3. in cui l'esistenza non garantiva un procedimento per individuarla.

Tali costruzioni di per sé, però, non garantiscono la soluzione. L'ipotesi di fondo è che "se esiste un punto che risolve il problema, tale punto si può ottenere in questo modo". Il fatto che la costruzione porti alla determinazione del punto, quindi, non dipende dalla costruzione, ma dalle proprietà degli oggetti in essa coinvolti. In particolare, se la retta non fosse continua (problema (A)) o la circonferenza non fosse continua (problema (B)) tali soluzioni non sarebbero garantite neppure dalla costruzione.

3.1.4. La continuità globale implicita nella prassi didattica

Come si evidenzia nelle attività nelle attività 3.1.3.1, 3.1.3.2., 3.1.3.3., 3.1.3.4., 3.1.3.5. la presenza della continuità nel percorso didattico della scuola media superiore è forte e significativa. Spesso vari aspetti sono trattati "nascondendo" la continuità. Didatticamente questo può essere funzionale alla prassi didattica, ma sarebbe opportuno che questi aspetti venissero poi esplicitati quando si tratta la continuità in senso tecnico.
Soprattutto però emerge come nei corsi pre-analisi ciò che interessa sia la continuità in senso globale più che quella puntuale.

Riprendendo quanto visto nell'attività segnalata, esempi di ambiti in cui la continuità globale (vista come intuitiva) viene utilizzata a livello didattico sono:

- **Rappresentazioni di grafici di funzioni (Attività: Continuità e grafici di funzioni)**
  A livello didattico è una delle motivazioni che possono essere utilizzate per giustificare l'introduzione dei numeri reali.
  Esempio. La funzione da **Q** a **Q** definita da $y= x+1$ non coinvolge (anche rispetto alla sua invertibilità) i numeri reali, ma una sua rappresentazione risulta impossibile nel momento in cui si osserva (in modo intuitivo: non si fa riferimento alla diversa cardinalità di Q e della retta) che non c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e l'insieme dei numeri razionali.

- **Invertibilità delle funzioni (Attività: Problema sul montante)**
  Il concetto di funzione costituisce una forte idea unificante di diversi argomenti che vengono trattati a livello di scuola media superiore. Tra questi vale la pena sottolineare la trattazione dei radicali (introducendo la funzione radice come inversa della potenza) e dei logaritmi (introducendo la funzione logaritmo come inversa della funzione esponenziale). Questa visione unificante permette, tra l'altro, di superare questioni didatticamente spinose come la distinzione tra radicali algebrici e radicali aritmetici.
  Nella invertibilità delle funzioni, però, è coinvolto un altro aspetto: la funzione deve essere suriettiva. Prendiamo ad esempio una funzione esponenziale $y=a^x$ con a numero reale positivo diverso da 1. Se la monotonia (e quindi la iniettività) di tale funzione può essere dimostrata facendo riferimento alla definizione di potenza ad esponente reale, come si dimostra che la funzione è suriettiva? La risposta è nel teorema di Weierstrass, a sua volta conseguenza del fatto che se una funzione è continua ed è definita su un insieme connesso, la sua immagine è un insieme connesso.
  In questo caso quindi si fa esplicito riferimento all'idea intuitiva di continuità che si pensa possano avere gli alunni come "esigenza" e che didatticamente può essere alla base dell'accettazione dei grafici di molte funzioni cosiddette "elementari". In caso contrario non si giustificherebbe l'idea che gli alunni possano accettare come numero reale (trascendente) una scrittura (formale) del tipo $\log_2 3$, vista come controimmagine di 3 attraverso la funzione $y=2^x$.
  Non è superfluo sottolineare come queste informazioni, che portano a loro volta al concetto di grafico "noto", vengano poi utilizzate per fornire una rappresentazione grafica di tali funzioni e successivamente per introdurre graficamente concetti quali il limite con evidenti rischi di circolarità.

- **Utilizzo di grafici per la risoluzione di disequazioni o risoluzione grafica di equazioni**
  Attività: Disequazioni in R

Anche in questo caso è la continuità globale che fa da sfondo teorico alla metodologia utilizzata, garantendo la presenza, anche quando non si riesce a trovarli esplicitamente, dei punti di intersezione.
Il teorema di riferimento è il teorema degli zeri.
Come nel caso precedente, in cui si è richiamato il teorema di Weierstrass, è opportuno ricordare che i teoremi che fanno riferimento alle funzioni continue, pur nella loro "ovvietà", non sono teoremi costruttivi, cioè garantiscono l'esistenza del punto, ma non forniscono procedure per trovarlo. Questo comporta educare i ragazzi all'idea che l'esistenza di un risultato non è strettamente legata alla possibilità di determinarlo, aprendo così significative modalità di lavoro anche nel contesto sempre delicato dei numeri reali e, più in generale, della logica soggiacente alla prassi matematica ordinaria, basata sostanzialmente sulla logica classica.

Vai all'attività: Il monaco tibetano.

Attività: Disequazioni in RxR
Un esempio che invece fa riferimento alla continuità geometrica, vista come modello algebrico, è relativo alle disequazioni in due variabili che portano a domini piani. Come convincere in effetti uno studente del fatto che la disequazione $x+y>1$ individua un semipiano nel piano cartesiano? L'idea intuitiva di partenza è che se i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $x+y=1$ sono tutti e soli quelli che individuano una retta, tutti e soli i punti le cui coordinate (x,y) soddisfano la disequazione $x+y>1$ devono stare "dalla stessa parte" rispetto alla retta e quindi individuare un semipiano. Se così non fosse, si afferma, se cioè ci fossero due punti nello stesso semipiano le cui coordinate fanno assegnare alla proposizione valori di verità diversi, sul segmento che li congiunge si dovrebbe trovare un punto le cui coordinate verificano la proposizione $x+y=1$. In pratica, "per passar dal negativo al positivo devo passare per lo zero", sottintendendo in questo modo il teorema degli zeri, visto però per funzioni da **RxR** ad **R**. L'ulteriore difficoltà è quindi quella di "contemplare" in modo implicito una terza dimensione, spostando così il problema dal piano allo spazio.
Questo aspetto è spesso evidenziato pensando alla disequazione lineare in due variabili come ad una disequazione parametrica, facendo assumere ad una variabile il ruolo di parametro.
E' da osservare che, parlando del semipiano, si è detto "tutti e soli". La motivazione precedente si riferisce al "soli". Per il "tutti" (cioè se si vuole dimostrare che non possono esserci punti in semipiani opposti rispetto alla retta di equazione $x+y=1$ che verifichino la disequazione $x+y>1$) occorre fare riferimento alle proprietà di connessione dei semipiani.

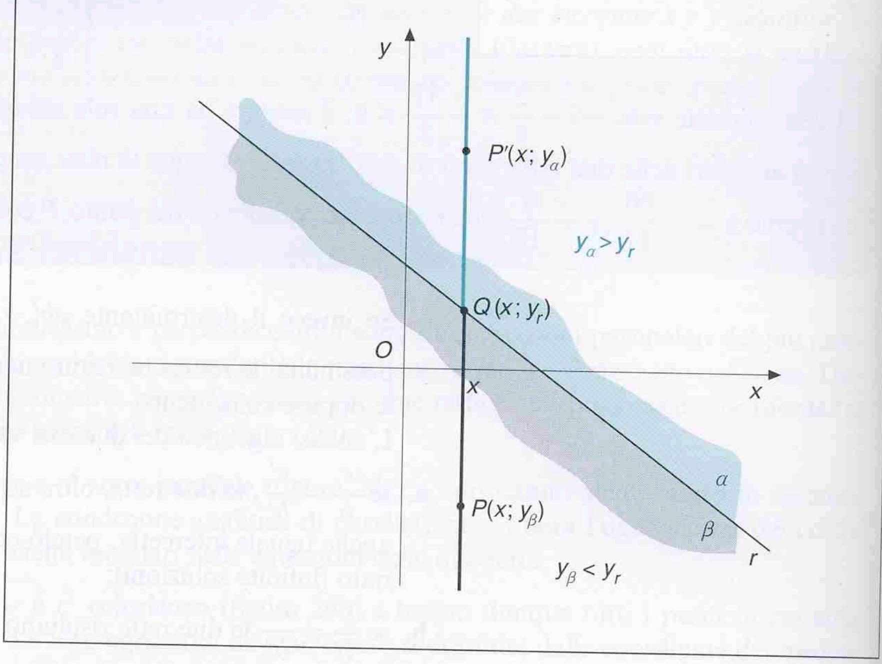
Riportiamo a titolo di esempio quanto indicato in
Andreini, Manara, Prestipino - Matematica controluce, Vol. 1 -McGraw Hill, 1999 (pag. 134)

6 Disequazioni lineari

6.1 Semipiani nel piano cartesiano

Una retta divide il piano in due semipiani distinti. Nel piano cartesiano sappiamo che una retta r è identificata da un'equazione di primo grado del tipo $ax + by + c = 0$; chiediamoci ora quale condizione algebrica caratterizzerà i punti di ciascuno dei due semipiani α e β che la retta r individua (figura 31).

Figura 31



La relazione che interessa sarà espressa da una **disuguaglianza**. Riferiamoci infatti alla figura 31: vediamo che il semipiano α è il luogo di tutti e soli i punti $P'(x; y_\alpha)$ la cui ordinata y_α, *in corrispondenza di un certo valore dell'ascissa* x, **supera** l'ordinata y_r del punto $Q(x; y_r)$ che sta sulla retta r.
Passando all'equazione in forma esplicita (supponendo $b \neq 0$), si ha:

$$y_r = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

da cui si ottiene la condizione:

$$y_\alpha > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

che caratterizza i punti del semipiano α.
Al contrario, i punti $P(x; y_\beta)$ del semipiano β hanno ordinata y_β **inferiore** a quella dei punti sulla retta:

$$y_\beta < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

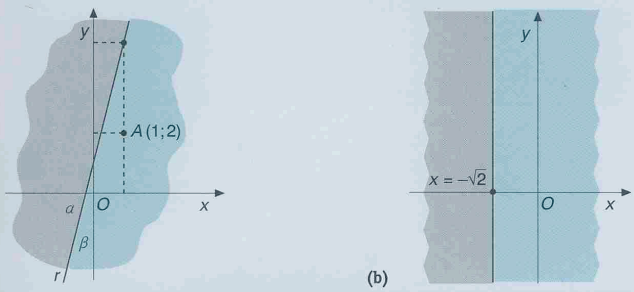
Nel **caso particolare** di rette parallele all'asse delle ordinate, di equazione $x = h$, i due semipiani sono individuati da una disuguaglianza sulle ascisse dei punti: il semipiano *a destra* della retta sarà caratterizzato dalla condizione $x > h$, mentre quello *a sinistra* dalla condizione opposta $x < h$.

ESEMPI

1. Data in un riferimento cartesiano la retta r di equazione $y = 4x + 1$ (figura 32a), i due semipiani che essa individua sono caratterizzati dalle condizioni α: $y > 4x + 1$, β: $y < 4x + 1$.
Dato il punto $A(1;2)$, una semplice sostituzione mostra che $y_A = 2 < y(1) = 5$ e permette di concludere che $A \in \beta$.

2. La retta di equazione $x = -\sqrt{2}$ identifica i due semipiani caratterizzati dalle disequazioni $x > -\sqrt{2}$, $x < -\sqrt{2}$ (figura 32b).

Figura 32



(a) (b)

Viceversa, ogni disequazione lineare in due incognite del tipo:

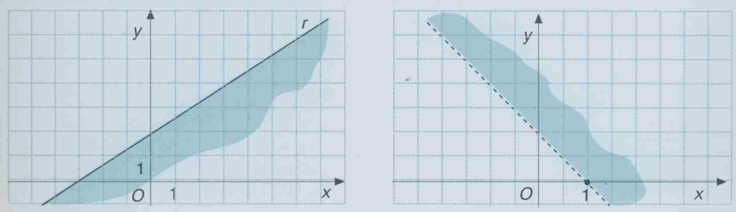
$$ax + by + c < 0 \quad \text{oppure} \quad ax + by + c > 0 \qquad (9)$$

identifica uno dei due semipiani aperti individuati dalla retta r di equazione: $ax + by + c = 0$. Se le disuguaglianze sono deboli ($\geq$ oppure $\leq$), conveniamo di intendere che viene compresa anche la frontiera del semipiano, cioè la retta r. Nella rappresentazione grafica adotteremo la convenzione di tratteggiare le parti di frontiera che non vanno comprese e di disegnare con tratto continuo le altre.

METTITI ALLA PROVA **8**

1. Stabilisci a quale semipiano appartiene il punto $P(3;2)$ rispetto alla retta di equazione $y = x$.
2. Rappresenta nel piano cartesiano i semipiani:
   a. $x > \sqrt{3}$ c. $y + 2x < 0$ e. $x - 2y < 1$
   b. $y \leq -1$ d. $y + 2x < 2$ f. $3x + 7y - 3 \leq 0$
3. Esprimi le disequazioni che individuano i semipiani rappresentati in figura 33.

Figura 33



E' da osservare come gli autori si riferiscono nella loro caratterizzazione al "tutti" (tutti i punti del semipiano hanno coordinate che verificano una determinata disequazione), mentre per il "soli" (viceversa...) la questione viene sfumata.
Questo aspetto dovrebbe evidenziare, anche in ambito didattico, la difficoltà nella motivazione, come espresso in precedenza.
Un'ultima osservazione riguarda il passaggio, sempre delicato, da un registro ad un altro per quanto riguarda le lettere coinvolte. Nell'esempio, x da variabile diventa parametro, cioè una variabile **sulla** disequazione e non una variabile **della** disequazione. Il conseguente cambio di registro va gestito con le dovute cautele.

Per approfondimenti su questi ultimi aspetti si veda [BI 2002].

- **Problemi di massimo e minimo risolti in modo elementare**
  (Attività Problemi di max-min risolti in modo elementare**)**
  I problemi di massimo e minimo risolti prima dell'introduzione degli strumenti dell'analisi, fanno riferimento o alla continuità delle funzioni che "descrivono" il problema o alla continuità degli enti geometrici coinvolti.
  Nei problemi riportati nella scheda (uno, il (B), classico, mentre l'altro, (A), con connotazioni non standard, in quanto richiede una modalità di costruzione, più che un risultato in termini di figura) ciò che si dà per scontato è l'esistenza della soluzione, cioè l'esistenza di determinati punti che la individuano. Com'è noto, nella Proposizione I degli Elementi di Euclide si dimostra, attraverso una costruzione, l'esistenza del triangolo equilatero. Euclide, nel suo procedere, si preoccupa che gli enti di cui parlerà "esistano" nell'ottica della costruzione con riga e compasso, cioè in relazione agli assiomi che ha precedentemente dato. Molti commentatori hanno contestato questa proposizione di Euclide, in quanto il geometra greco non si è preoccupato precedentemente di garantire l'esistenza del punto di intersezione delle due circonferenze che individuano il terzo vertice del triangolo (gli altri due sono i centri delle circonferenze, aventi raggi uguali alla distanza tra i due centri). In pratica Euclide, con i precedenti assiomi, non si preoccupa di garantire la continuità della circonferenza.
  Rispetto ad una prassi didattica ordinaria, riteniamo che il problema sia tuttora aperto.

Quasi tutti gli esempi precedenti (ma si invita il lettore a trovarne altri) fanno riferimento all'ambito grafico, cioè alla rappresentazione cartesiana del grafico di una funzione. Questo a sottolineare l'importanza che riveste il grafico di una funzione (quasi più della funzione stessa) in ambito didattico e, di conseguenza, di quanto sia ritenuta importante l'idea intuitiva di continuità globale, idea sulla quale tale prassi si fonda.

Per approfondimenti:
[BI 2002] Bazzini, Iaderosa - Approccio all'algebra - FrancoAngeli, 2002

3.1.4.1. Il monaco tibetano.

Ambito concettuale: Uso implicito della continuità in ambito didattico
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) mettere in evidenza problemi in cui si utilizza il concetto di continuità legato a grandezze fisiche;
2) porre il problema del concetto di esistenza di una soluzione per un problema;
3) individuazione dei dati utili e non all'interno di un problema
4) ricercare diverse modalità di soluzione, favorendo l'emergere di misconcetti o di soluzioni legate a condizioni implicitamente imposte dal solutore.

Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine, e a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

Analizza la seguente situazione:

"In una capanna ai piedi di un colle vive un monaco tibetano. Sulla sommità del colle è posto un tempio in cui si reca il monaco una volta al mese per trascorrere una notte di preghiera. Nel giorno stabilito, parte alle 8 di mattina e si incammina per l'unico sentiero lungo 30 km che collega la capanna al tempio, giungendovi dopo un faticoso cammino alle ore 20. Il mattino seguente, dopo una notte di preghiera, riparte alle ore 8 del mattino seguente. A causa della stanchezza, le soste lungo il percorso sono più frequenti e pertanto, malgrado il cammino più celere, arriva alla capanna alle ore 20.

Si dimostri che lungo il percorso esiste un punto in cui il monaco transita nello stesso istante in entrambi i giorni."

Rispondi alle seguenti questioni:
1) Le condizioni poste sono sufficienti per trovare una soluzione? Ci sono, viceversa, dati inutili?
2) Cosa significa, in questo caso, trovare una soluzione?
3) Per la determinazione della soluzione è indispensabile conoscere il tipo di moto del monaco?
4) Le grandezze fisiche coinvolte sono lo spazio e il tempo. Come devono essere supposte tali grandezze perché il problema abbia soluzione?
5) Dimostrare l'esistenza di una soluzione e trovare la soluzione sono concetti analoghi, secondo te?
6) Sapresti fornire una rappresentazione grafica del problema che evidenzi l'esistenza della soluzione?
7) A quale teorema di analisi (richiesta indirizzata solo alle classi quinte) fa riferimento la soluzione che proponi?

Per una proposta di soluzione all'attività vedi
Proposta per una soluzione del problema del monaco tibetano

3.1.4.1.1. Proposta per una soluzione del problema del monaco tibetano.

1) La prima parte della richiesta è volutamente ambigua. Si dovrebbe aprire una discussione su cosa significhi trovare una soluzione. Il contratto spesso implicito nella prassi didattica è che un problema abbia sempre soluzione (addirittura unica) e che tale soluzione si possa sempre trovare.
Se trovare una soluzione, nel caso specifico, significa trovare il punto in cui il monaco passerà alla stessa ora all'andata e al ritorno, nel problema mancano dei dati, visto che non sono esplicitate le leggi oraria dei due moti del monaco.

Se invece ci si limita a dimostrare che esiste una soluzione, ci sono dati superflui, come la misura della lunghezza del percorso (ma non solo…).
Questa domanda quindi potrebbe essere vista come una ulteriore occasione per discutere sul significato di soluzione ad un problema.

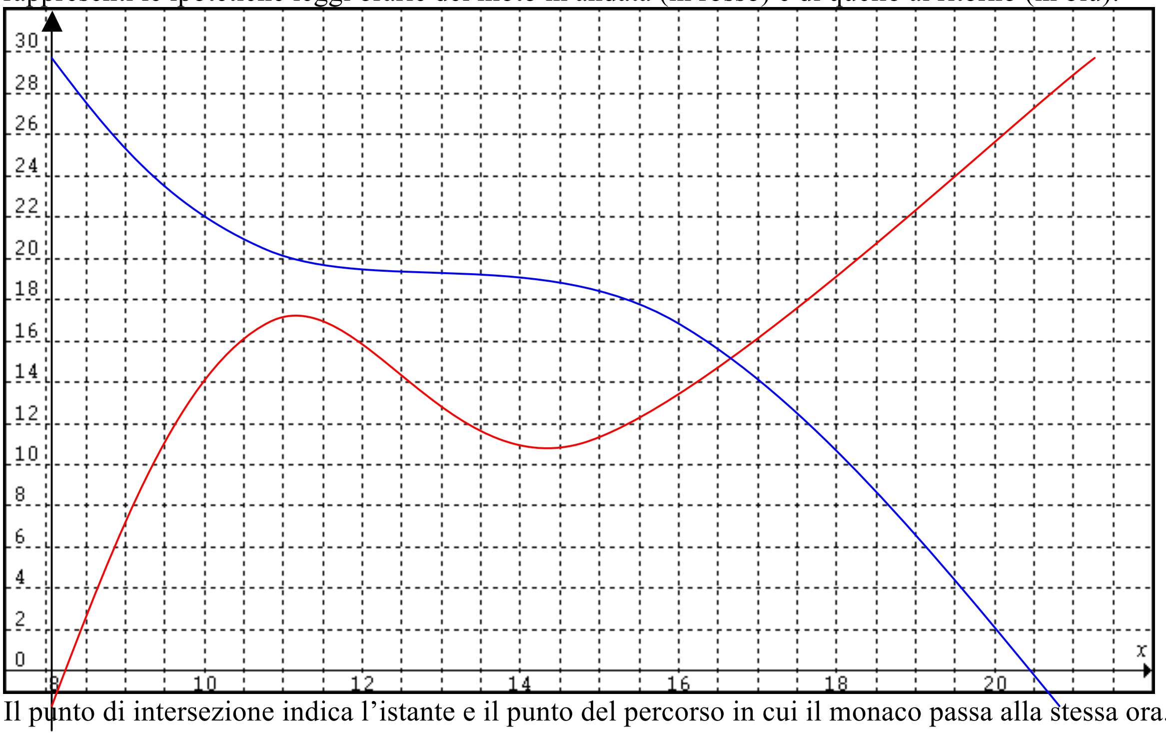
2) Ciò che alla fine dovrebbe emergere è che in questo caso trovare una soluzione significa garantire l'esistenza del punto e non, come si potrebbe pensare, indicarlo (o individuare un modo per trovarlo). Inoltre si dovrebbe osservare che rispetto ad una posizione costruttivista il problema non avrebbe soluzione.

3) Si è già risposto al punto 1).

4) Il modello a cui ci si riferisce è quello secondo cui spazio e tempo sono viste come grandezze continue. Si potrebbero ipotizzare condizioni in cui queste ipotesi vengano a mancare e che quindi non portino a soluzioni (ad esempio, in presenza di un teletrasporto, con la conseguente negazione della continuità dello spazio).

5) Per dimostrare che il problema ha soluzione, sempre nell'ipotesi che le grandezze coinvolte siano continue, basterebbe pensare a due monaci che partono contemporaneamente uno dal monastero e uno dalla casa e si dirigono rispettivamente verso casa e verso il monastero: prima o poi saranno costretti ad incontrarsi! Quello che emerge, da questa modellizzazione del problema, è che il dato veramente essenziale è che partano alla stesa ora (o, analogamente, che arrivino alla stessa ora), mentre l'orario di arrivo (o di partenza, nell'altro caso) è ininfluente. La risposta a tale domanda dovrebbe essere no, a meno che, come detto, si ragioni utilizzando una logica non classica.

6) L'idea di considerare il moto di due monaci può essere formalizzata con una rappresentazione grafica che rappresenti le ipotetiche leggi orarie del moto in andata (in rosso) e di quello al ritorno (in blu):



Il punto di intersezione indica l'istante e il punto del percorso in cui il monaco passa alla stessa ora.

7) Il teorema non può che essere uno dei teoremi sulle funzioni continue. In particolare, se indichiamo con s=f(t) la legge oraria del moto del monaco all'andata e con s=g(t) la legge oraria del monaco al ritorno (con s viene indicata la distanza del monaco da casa, trattando il moto come se fosse rettilineo), nelle ipotesi (essenziale!) che f e g siano funzioni continue in [8;20], la funzione
h(t)=f(t)-g(t) è continua in [8;20] e
h(8)=0-30=-30   e h(20)=30-0=30
Per il teorema degli zeri esiste quindi un tempo t_0 tale che $h(t_0)=0$, per cui $f(t_0)=g(t_0)$.

3.2.1. La definizione di continuità nei libri di testo.

Il problema del definire in matematica è un problema cruciale, vista la natura degli oggetti matematici. Non è improbabile trovare testi che definiscono in modo diverso un ente matematico. Questo anziché essere un limite può diventare una vera risorsa didattica: vedere come certe scelte comportino un diverso percorso didattico di cui la coerenza ne è l'aspetto peculiare può essere un modo per avvicinare gli alunni all'idea di una matematica "propria".
A volte però non è facile cogliere la reale struttura di una definizione matematica. La cosa non è banale, soprattutto nell'ottica in cui la definizione "vincola" le proprietà dell'oggetto definito (vedi trapezio o polinomio). Capire la strutta di una definizione comporta quindi il poter indagare in modo proficuo l'ente definito e caratterizzarne quindi in modo coerente le proprietà.
Nel seguito verrà descritta un'attività mirata a strutturare in termini di logica preposizionale la definizione di continuità riportata da diversi libri di testo di scuola media superiore o universitari. Lo scopo dell'attività è quello, una volta evidenziata la struttura della definizione, permetterne un'analisi, per gli scopi successivi, di importanti concetti quali continuità, non continuità e discontinuità.

Vai all'Attività: Analisi di una definizione di continuità.

Per approfondimenti:

Bottazzini U.: 1977, Definizione di continuità, in Analisi Matematica, Pubblicazione del Liceo Vallisneri (LU), pag. 113-117
Hitt F.: 1994, Teachers' Difficulties with the conztruction of continuos and discontinuos function, Focus on learning problems in Mathematics vol 16, number 4, Fall Edition, pag. 10-20.
Maffini A.: 2003, Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione, L'educazione Matematica Serie VII Vol. 1, pag.38-46

3.2.1.1. Analisi di una definizione di continuità

Ambito concettuale: analisi di una definizione di continuità per individuarne la struttura logica
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) destabilizzare la fiducia dell'autorevolezza di un testo scritto;
2) destabilizzare l'idea dell'unicità della definizione di un concetto matematico;
3) spostare l'attenzione sugli aspetti impliciti presenti in un testo e sulle conseguenze delle scelte fatte.

Modalità di presentazione: agli studenti verrà somministrata una scheda con la definizione riportata (ma potrebbe essere anche la definizione del loro libro di testo) e successivamente, a gruppi, si chiede loro di analizzarla secondo le indicazione proposte.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

Il testo:
Dodero, Barboncini, Manfredi: 2001, "Lineamenti di Matematica, Modulo G; Ghisetti e Corvi "(pag. 96)

Definizione. Una funzione di equazione y=f(x), definita in un intorno di c, si dice continua nel punto c quando esiste il limite della funzione per x che tende a c e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, cioè quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Suggerimenti per la discussione
Cosa intende l'autore con la definizione fornita?
In particolare, che ruolo giocano le tre condizioni richieste (appartenenza di c al dominio della funzione, appartenenza di c al derivato del dominio, coincidenza del valore della funzione calcolata in c col limite) per la definizione locale di continuità?
Più avanti, nello stesso testo (pag. 185):

Come abbiamo visto nel cap. 3, una funzione f(x) si dice continua nel punto x=c (c punto di accumulazione del dominio della funzione) se risulta

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Dunque, affinché una funzione y=f(x) sia continua nel punto x=c, devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:
1) *esistenza del valore della funzione per x=c;*
2) *esistenza del limite l della funzione per x→c; cioè* $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$;
3) *il limite l deve essere uguale a f(c).*

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata, la funzione non è continua nel punto x=c; si dice che in tale punto la funzione è discontinua e che x=c è un punto di discontinuità per la funzione (o anche che è un punto singolare).

Dopo questa precisazione risulta più chiaro il pensiero dell'autore?
Come è strutturata, in termini logici, la definizione precedente?
Che definizione dedurresti, da quella proposta, di funzione non continua in un punto?

Osservazioni sull'attività: vedi Analisi definizioni sui libri di testo

3.2.2. Le definizioni emerse nei libri di testo

Prima di analizzare le definizioni di funzioni continue tratte dai libri di analisi considerati (il riferimento tra parentesi quadre rimanda al testo indicato in bibliografia), riportiamo alcune definizioni tratte da libri universitari.
Innanzi tutto, per parlare di funzioni continue, occorre considerare una funzione definita da un insieme X ad un insieme X' dotati di una struttura topologica. Per i nostri scopi, abbiamo trattato funzioni reali definite in sottoinsiemi di **R** con all'ordinaria topologia su **R**.

[CTV] *Siano X e X' due spazi topologici e sia f: X→X' un'applicazione di X in X'. Diremo che f è un'applicazione continua se l'immagine inversa* $f^{1}(A')$ *di ogni aperto A' di X' è un aperto di X* [pag. 21]

Più avanti [pag. 22], nello stesso testo, viene proposta una proposizione in cui si dimostra che una funzione tra spazi topologici è continua se e solo se la controimmagine di un chiuso è un chiuso. In questa definizione la "topologia ordinaria", definita ad esempio con gli intervalli, gioca un ruolo decisivo, nel senso della continuità di R.

[P] *Siano E, F due spazi topologici e sia f: E→F un'applicazione. L'applicazione f si dice continua in* $x_0 \in E$ *se, per ogni intorno V di* $y_0=f(x_0)$*, esiste un intorno U di* x_0 *tale che* $f(U)\subset V$*. Ciò equivale a dire: per ogni intorno V di* y_0*,* $f^{1}(V)$ *è un intorno di* x_0. [pag. 113]

[AB] *Se f:A→R (la scrittura sta per "f è una funzione da A ad R"), si dice che f è continua in* x_* *se*[1]

$\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ \forall x \in A \cap V\ f(x) \in U$ [pag. 281]

Più avanti (pag. 282) nello stesso testo si dimostra una proposizione in cui si afferma che la definizione di continuità è equivalente ad altre quattro così sintetizzabili:

a) $\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ f(A \cap V) \subset U$
b) la controimmagine di un intorno di $f(x_*)$ è un intorno di x_*
c) c1) x_* è un punto isolato di A oppure c2) $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$ [2]
d) la solita definizione ε-δ relativa al concetto di limite

Le tre definizioni precedenti non indicano tutte "la stessa cosa". In particolare [P] e [AB], prese da testi di analisi, si rifanno a condizioni locali (l'estensione di continuità ad un sottoinsieme del dominio viene data come continuità in ogni punto del sottoinsieme), mentre [CTV], presa da un testo di topologia, fa riferimento a condizioni globali.
Nella prassi didattica italiana, soprattutto a livello di scuola media superiore, la condizione di continuità viene data a livello locale, comportando non pochi problemi di significatività. E' indubbio infatti che in questo modo si tende a perdere non solo il concetto globale di continuità, ma anche, con esso, il suo senso intuitivo. Il guadagno che si può ricavare da questa perdita è quello di avere a disposizione un maneggevole strumento operativo per trattare il concetto di continuità e questo guadagno costituisce una buona motivazione di carattere didattico.

Vai all'attività: Intervallo di tolleranza.

Bibliografia

[AB] Acerbi E., Buttazzo G.: 1997, Primo corso di Analisi matematica, Pitagora
[CTV] Checcucci V., Tognoli A. , Vesentini E.: 1972, Lezioni di topologia generale, Feltrinelli.
[P] Prodi G.: 1970, Analisi Matematica, Boringhieri

[1] Con F_x viene indicata la famiglia degli intorni di x.

[2] E’ opportuno sottolineare che con in questo contesto con “oppure” si intende, in termini logici, l’aut.

3.2.2.1. Intervallo di tolleranza

Ambito concettuale: approssimazione, condizione locale di continuità
Livello: scuola superiore
Obiettivi:

1) ritrovare, in un problema di approssimazione, la struttura della definizione locale di continuità;
2) porre il problema dei modelli matematici sottesi ad alcune relazioni fra grandezze fisiche;
3) utilizzare diversi registri nella soluzione di un problema legato alla continuità;
4) interpretare gli intervalli di tolleranza come una delle possibili coppie di intorni richieste dalla definizione di continuità puntuale;
5) interpretare gli intervalli come insiemi di valori accettabili per una misura fisica.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere proposta a gruppi. A ciascun gruppo verranno forniti fogli di carta millimetrata su cui rappresentare i grafici delle funzioni coinvolte.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

(A) Rappresenta sul foglio di carta millimetrata la funzione che esprime l'area di un quadrato in funzione del lato, dopo averne individuato dominio e codominio e aver considerato opportune unità di misura.
Supponi di dover costruire un quadrato di lato 3 m: qual è l'errore massimo che possiamo commettere sulla misura del lato se sull'area vogliamo commettere al massimo un errore di 1 dm^2?
1) Rappresenta nel grafico cartesiano gli intervalli di tolleranza per l'area e per il lato.
2) Individua algebricamente gli estremi di tale intervallo.
3) Modifica uno od entrambi i dati e ripeti quanto richiesto al punto 2). E' sempre possibile rispondere alla questione posta al punto 2)? Sapresti individuare situazioni in cui la risposta non è possibile? Cosa ti permette di risponde alla precedente domanda? Qual è l'ambito concettuale di riferimento?
4) Cosa si suppone, relativamente alla misura di lunghezze e di aree, nella possibilità di rispondere alle domande precedenti?
5) Se la richiesta al problema fosse stata fatta in questi termini:
Supponi di dover costruire un quadrato di area di misura 9 m^2: qual è l'errore massimo che possiamo commettere sulla misura dell'area se sul lato vogliamo commettere al massimo un errore di 1 dm?
nelle risposte ai punti precedenti sarebbero stati coinvolti gli stessi aspetti o le richieste avrebbero avuto risposte in ambiti diversi?

(B) Una massa di 100 g di una resina, segue una legge di solidificazione del tipo
$m=100\bullet 2^{-t}$, dove m indica la massa della resina non ancora solidificata al tempo t (in minuti).
Rappresenta sul foglio di carta millimetrata la funzione individuata dalla legge precedente, dopo averne specificato dominio e codominio. Quali ipotesi fai sulle grandezze coinvolte (massa e tempo) per poter procedere?
Supponi di voler sapere quanto sarà la sostanza non ancora solidificata dopo 2 minuti. Qual è l'errore massimo che possiamo commettere sulla misura del tempo (la richiesta può essere posta chiedendosi quale dovrà essere la precisione o la sensibilità del cronometro utilizzato) se sulla massa vogliamo commettere al massimo un errore di 1 g?
Rispetto al problema (A) quale ulteriore problema devi affrontare sul piano algebrico?
Rispondi alle domande 1)-5) poste per il problema (A), con le ovvie modifiche del caso.

Commento:
(A) La misura x del lato che cerchiamo deve essere tale che $8{,}99<x^2<9{,}01$, cioè, trattandosi di numeri positivi, $2{,}9983<x<3{,}0016$ che individua un intorno di 3. Tale intorno indica l'intervallo di tolleranza in cui si può accettare una misura che risolve il problema. Inoltre da esso è possibile

individuare il massimo errore accettabile sulla misura del lato che risulta essere dell'ordine del millimetro.
Anche modificando i dati, la risposta è sempre possibile grazie al fatto che la funzione considerata ($y=x^2$ definita da $\mathbf{R_0}^+$ a $\mathbf{R_0}^+$) è continua in quanto coinvolgente misure in senso matematico.
Nella richiesta del punto 5) la formulazione viene fatta in modo rovesciato: da un errore (fissato) sul lato si vuole desumere l'intervallo di tolleranza sulla misura dell'area. Tale formulazione risulta invertita rispetto alla definizione di continuità e può essere espressa in questi termini:
comunque si prenda un intorno U di x_0 esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che per ogni $y=f(x)\in V$, $x\in U$.
Anche espressa in questi termini la cosa "funziona": infatti, nel caso particolare considerato, indicata con y la misura dell'area cercata, si ha che $2{,}9<\sqrt{y}<3{,}1$ da cui $8{,}41<y<9{,}61$ che individua un intorno di 9.
Questo aspetto, come evidenziato anche in 3.3.1., può forviare in quanto può sembrare che la definizione (puntuale) di funzione continua possa essere data in sintonia con l'intuizione (dalla variabile indipendente a quella dipendente). Ciò che invece è opportuno sottolineare, anche utilizzando attività come quella proposta, è che il risultato ottenuto (e la sua generalizzazione) è garantito dalla continuità della funzione inversa. E' questo, di fatto, l'ambito diverso a cui si fa riferimento nella richiesta 5) del problema (A).

(B) Rispetto al problema (A), oltre alle ipotesi sulla continuità delle grandezze coinvolte, il problema significativo è la risoluzione della disequazione $24<100\bullet 2^{-t}<26$, da cui $0{,}24<2^{-t}<0{,}26$ e quindi
$-\log_2 0{,}26<t<-\log_2 0{,}24$. Anche applicando la formula del cambiamento di base, il problema che si pone è quello di una approssimazione dei risultati ottenuti. Il grado di queste successive approssimazioni (riportandosi, ad esempio, al logaritmo naturale, occorre considerare a livello di calcolo le approssimazioni relative di ln(0,26), di ln2 e successivamente del loro rapporto) induce una incertezza sul risultato non facilmente controllabile. Questo aspetto dovrebbe porre il problema di come gestire, in contesto matematico, il passaggio dalla rappresentazione formale di un numero reale ad una sua rappresentazione quando, come in questo caso, è richiesta.

3.2.3. Analisi definizioni sui libri di testo.

L'analisi della definizione di continuità riportata sulla maggior parte dei libri di testo liceali ha mostrato che è di fatto deducibile dalla forma equivalente c2 a quella proposta da [AB] (cioè l'uguaglianza tra il limite e il valore della funzione calcolata nel punto x_*). E' qui però che l'analisi fatta utilizzando una schematizzazione di carattere logico evidenzia le varie differenze che portano poi al concetto di discontinuità.

Le condizioni che vengono esplicitate da c2 sono tre:

a) che la funzione sia definita in x_0
b) che x_0 sia un punto di accumulazione
c) che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Indicando con

C: la funzione f è continua in x_0

D: $x_0 \in D_f$

A: $x_0 \in D(D_f)$

L: $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$

le definizioni di continuità formalizzate possono essere espresse dalle seguenti proposizioni

(1) $C \Leftrightarrow (D \wedge A \wedge L)$ (vedi [BM], [CGV], [CM], [DBM], [PMA], [VB], [ZS])

oppure

(2) $C \Leftrightarrow (D \wedge A \rightarrow L)$ (vedi [AMP] [1], [B], [C], [CBM], [OCT])

In [B] la definizione è data nella forma (3) $D \wedge A \rightarrow (C \Leftrightarrow L)$; in questo caso sembra esplicitato il fatto che la condizione di continuità dipenda solo dal limite per valori del dominio che siano anche di accumulazione per il dominio stesso. E' il caso di osservare che, supposto C vero, la (2) e la (3) sono equivalenti.

In quest'ottica si potrebbe allora sostituire la (2) con la (3) e più correttamente si dovrebbe parlare di $C \Leftrightarrow L$ come conseguenza tautologica di $\{D,A\} \cup \Gamma$ essendo Γ l'insieme degli assiomi dell'analisi.

Le strutture logiche precedenti meritano quindi qualche osservazione, soprattutto in riferimento a (2). L'implicazione che vi compare è da intendere, in senso logico, in modo non classico. Se del resto così fosse, una funzione risulterebbe continua anche in punti isolati (e questo non è visto come problema), ma anche in punti non appartenenti al dominio: quest'ultimo, invece, è un problema!

Non è improbabile che nella definizione riportata dai libri di testo spesso non sia chiaro ciò che l'autore intende veramente. Per chiarire veramente tale pensiero può essere allora opportuno vedere come viene definita la discontinuità, vista come negazione della continuità. In effetti alcune delle proposizioni precedenti sono state dedotte implicitamente dai libri di testo dalle condizioni di discontinuità, vista quest'ultima come negazione della continuità.

Un esempio specifico.

Riprendiamo e analizziamo la definizione proposta nell'attività Analisi di una definizione di continuità.

"Lineamenti di Matematica, Modulo G – Dodero, Barboncini, Manfredi; Ghisetti e Corvi 2001"

Definizione. Una funzione di equazione y=f(x), definita in un intorno di c, si dice continua nel punto c quando esiste il limite della funzione per x che tende a c e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, cioè quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (pag. 96)

Da un'analisi svolta con insegnanti (Maffini, 2003) , per alcuni tale definizione è della forma

$D \wedge A \rightarrow (C \leftrightarrow L)$, mentre secondo altri della forma $C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge L)$.

Dal testo in effetti potrebbe essere non chiaro o si potrebbe essere più propensi per la prima ipotesi (sembra che la condizione che la funzione sia definita in un intorno di c sia prioritaria; questo comporterebbe la priorità di D ed A rispetto ad L). In questi casi però non è tanto importante ciò che l'autore dice o come lo dice (ad esempio si potrebbe discutere dell'uso del termine equazione in questo contesto, aspetto che comunque esula dai nostri scopi), ma cosa intende. A questo proposito può allora essere utile riportare quanto indicato a pag. 185 dello stesso testo:

Come abbiamo visto nel cap. 3, una funzione f(x) si dice continua nel punto x=c (c punto di accumulazione del dominio della funzione) se risulta

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Dunque, affinché una funzione y=f(x) sia continua nel punto x=c, devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:

1) *esistenza del valore della funzione per x=c;*
2) *esistenza del limite l della funzione per x→c; cioè* $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$
3) *il limite l deve essere uguale a f(c).*

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata, la funzione non è continua nel punto x=c; si dice che in tale punto la funzione è discontinua e che x=c è un punto di discontinuità per la funzione (o anche che è un punto singolare).

Dopo questa precisazione (anche in questo caso sorvoliamo sulla terminologia usata in certi punti, come ad esempio "funzione f(x)" oppure "contemporaneamente", termine di connotazione temporale che presuppone invece il connettivo di congiunzione) il pensiero dell'autore sembra essere chiaramente orientato verso la forma $C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge L)$. Come detto, avere chiaro ciò che l'autore "ha in testa" permette di avere chiare quali saranno le proprietà dell'ente definito e le conseguenze di tale definizione.

Ritornando infatti all'analisi delle due formulazioni precedenti, osserviamo come le condizioni (1) e (2) non siano equivalenti, cosa ancor più evidente se si passa alle proposizioni (equivalenti rispettivamente a (1) e (2) nella logica classica, ma anche formulazioni che meglio possono far comprendere il ruolo degli antecedenti nella (2))

(1') $\neg C \leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$
oppure
(2') $\neg C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$ o, meglio, $D \wedge A \rightarrow (\neg C \leftrightarrow \neg L)$

Nella (1) e (1') in particolare le tre condizioni che caratterizzano la continuità sono poste sullo stesso piano (evidenziato questo dalla congiunzione); è sufficiente quindi che una delle tre non venga verificata per parlare di funzione non continua in un punto.

L'analisi delle definizioni in questa forma permette di far emergere una serie di questioni: funzione non continua equivale a discontinua (ovviamente sempre in senso puntuale)? Nella lingua italiana il prefisso dis esprime una negazione (esempio: disaccordo, discorde, disonesto, ecc.); si tratterebbe di vedere, dal punto di vista linguistico, la connessione tra negativo e negazione. Ad esempio, in "disequazione" il prefisso dis viene utilizzato con la stessa valenza con cui compare in "discontinuità" (vedi Dizionario Devoto-Oli) pur non indicato, nel caso specifico, la negazione del termine "equazione".

Vai all'attività: Quali discontinuità?

Riprendiamo quanto presentato nell'attività.
Consideriamo la funzione di dominio **D**=]-5;0[∪]0;5[a valori in **R** definita da

$$y = \frac{1}{x\sqrt{25 - x^2}}$$

Nell'attività ci si chiedeva se è significativo stabilirne la discontinuità in 10 e a quale scopo. La condizione (1') rende di fatto legittimo il problema, con evidenti dubbi sulla significatività. Non solo; in un punto isolato, secondo questa definizione, una funzione non sarebbe continua.
Per contro la (2') richiede che si possa parlare di funzione non continua solo in punti del dominio e di accumulazione per lo stesso.
In [CBM], parlando della discontinuità (pag. 64), si mette in evidenza in nota come non abbia senso parlare di discontinuità (intesa come negazione della continuità) in valori non appartenenti al dominio, per la definizione data dagli autori; la scelta fatta, viene detto, *è seguita dalla maggior parte dei testi di Analisi ad indirizzo più moderno*.

[Maffini 2003] Maffini A.: 2003, Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione, L'educazione Matematica Serie VII Vol. 1, pag.38-46

Libri di testo utilizzati per l'analisi:
[AMP] Andreini M., Manara R., Prestipino F.: 1999, Matematica controluce per i programmi sperimentali, McGraw Hill, pag.158
[B] Bagni G.T.: 1996, Corso di Matematica 3, Zanichelli, pag.1371
[BM] Battelli M., Moretti U.:1992, Corso di matematica sperimentale e laboratorio, Le Monnier, pag.184
[C] Cedrazzi F.:1985, Analisi Matematica, Zanichelli, pag.79
[CBM] Cateni L., Bernardi C., Maracchia S.: 1987, Analisi matematica, Le Monnier, pag.63
[CGV] Castelnuovo E., Gori Giorni C., Valenti D.: 1988, Elementi di analisi matematica, La Nuova Italia, pag.85
[CM] Ciolli M., Michelassi L.:2000, Corso di matematica 3, Principato, pag.44
[DBM] Dodero N., Barboncini P., Manfredi R.: 1991, Elementi di Matematica 5, Ghisetti e Corvi, pag.101 e 115
[OCT] Oriolo P., Coda A., Tess L.:1996, Matematica, Bruno Mondatori, pag.144
[PMA] Progetto Matematica Archimede :1999, I matemoduli F, Archimede edizioni, pag.52
[VB] Venè M., Betti F. (a cura di) :1998, Matematica, Sansoni, pag.30
[ZS] Zwirner G., Scaglianti L.: 1998, Analisi Infinitesimale, CEDAM, pag.94

---

[1] La condizione è esplicitata nelle discontinuità in cui però mantiene la classificazione classica (I, II e III specie) e solo nella discontinuità di III specie suppone che il punto possa non appartenere al dominio della funzione.

3.2.3.1. Quali discontinuità?

Ambito concettuale: Discontinuità e sua caratterizzazione
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) porre il problema di quali valori possono essere significativi nell'ottica della discontinuità;
2) Individuare delle condizioni di scelta in relazione alle definizione poste sugli enti coinvolti in funzione delle
esigenze di significatività.
Modalità di presentazione: L'attività può essere proposta anche in classi di diverso ordine, selezionando eventualmente le richieste più significative per quella classe. L'attività dovrebbe essere proposta a gruppi con registrazione degli aspetti emersi dalla discussione.
Fruitori: gli insegnanti e/o gli studenti per discussione in gruppo.

Considera la funzione di dominio **D**=]-5;0[∪]0;5[a valori in **R** definita da

$$y = \frac{1}{x\sqrt{25 - x^2}}$$

Rispondi alle seguenti questioni:
1) Per quali valori parleresti di discontinuità?
2) Con quale obiettivo?
3) Secondo te, è significativo stabilirne la discontinuità in 10?
4) A quale scopo?
5) Secondo la classificazione della didattica usuale (I, II, III specie) in quale categoria rientrerebbe?

Osservazioni sull'attività: vedi Analisi definizioni sui libri di testo

3.3. Dalla continuità alla discontinuità

Come visto nella parte 3.2., le condizioni che fanno riferimento alla definizione puntuale di continuità non sono trattate in modo univoco. Il problema allora che ci si pone nel considerare il rapporto continuità-discontinuità si sposta nello stabilire il "peso" da dare alle varie condizioni che definiscono la continuità.
In pratica si tratta di decidere quanto è importante (se lo è) stabilire "qualcosa" relativamente a punti non appartenenti al dominio di una funzione. E' chiaro che questo "qualcosa" (chiamiamolo genericamente informazione) può essere stabilito per punti di accumulazione; cioè l'informazione è locale.

3.3.1. Non continuità e discontinuità.

Come visto nella sezione 3.2.3. (alla quale si rimanda per le notazioni utilizzate in questa sezione), se la condizione che il numero sia un punto di accumulazione è prioritaria rispetto alle altre (come del resto viene ampiamente confermato dalla usuale prassi didattica), anche la definizione (2) $C \leftrightarrow (D \wedge A \rightarrow L)$ presenta anomalie rispetto alla logica classica. Infatti la proposizioni $D \wedge A \rightarrow L$ è equivalente a $A \rightarrow (D \rightarrow L)$ ma anche a $D \rightarrow (A \rightarrow L)$. Mentre la prima esprime una condizione legittima anche sul piano premesse-ipotesi ("mi preoccupo che x_o sia di accumulazione, poi del resto…"), non così si può dire della seconda, in cui il fatto che $x_o \in D$ nulla dice sulla possibilità di calcolare il limite. In sostanza la prima mette meglio in evidenza la priorità dell'essere punto di accumulazione per il dominio della funzione.

Come detto, nella prassi didattica usuale, generalmente si parte dal concetto di limite (la cui introduzione intuitiva utilizza le continuità delle funzioni) per arrivare alla continuità (in termini formali, ma dopo!). Un percorso inverso probabilmente sarebbe più intuitivo (è chiaro che quando si parla di continuità intuitiva la si intende in senso globale) per arrivare poi a giustificare il limite come "ripristino" delle continuità (quando è possibile, ad esempio per la terza specie) o per la classificazione dei punti in cui tale continuità non è ripristinabile; parleremo in questo caso di discontinuità (I e II specie).

La classificazione delle discontinuità non è ritenuta da tutti i libri di testo significativa. Questo vale soprattutto per i testi universitari. In questo caso (come del resto in altri casi della prassi didattica) si confondono a volte gli obiettivi con le opportunità. Un obiettivo significativo è quello di ridefinire una funzione in un punto con continuità. Nel caso in cui questo obiettivo non venga raggiunto, può essere opportuno classificare i risultati ottenuti, chiamandoli in un qualche modo.

Questo tipo di percorso porta a criticare entrambe le formulazioni canoniche della discontinuità: nella (1') (cioè $\neg C \leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$ le tre condizioni non hanno lo stesso peso: in particolare non si contempla il caso che x_0 debba essere un punto di accumulazione; nella (2') $\neg C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$ o, meglio, $D \wedge A \rightarrow (\neg C \leftrightarrow \neg L)$) si parlerebbe solo di discontinuità per punti del dominio. Quest'ultima, ovviamente, potrebbe essere una scelta, ma se il problema è "ripristinare" (dove è possibile) la continuità, come fare a sapere, a priori, in quali punti? Come interpretare un risultato che non porti allo scopo?

La conclusione a cui si può arrivare è che la discontinuità sia, in un certo senso, "altra cosa" rispetto alla continuità.

Tale posizione la si ritrova in [B] in cui la definizione è data in questi termini:

" *Sia f una funzione definita e continua in un intorno di x=c, ad eccezione eventualmente, di x=c stesso; se la funzione f non è definita per x=c o se essa, pur essendo definita per x=c, non è continua in x=c, allora il punto x=c si dice punto di discontinuità per la funzione f.*"

Di fatto la discontinuità può essere vista come una continuità potenziale che "a volte" si traduce in atto ed in questo senso può servire per comprendere meglio la continuità (puntuale) stessa.

Prima di procedere, sarebbe opportuno fosse fatta una proposta di definizione di continuità a livello locale con la conseguente gestione di concetti come non continuità e discontinuità, in relazione alle proprie esigenze didattiche.

Per fare questo si potrebbero proporre attività che mettano in luce, anche a livello grafico, cosa comporta per una funzione essere non continua.

A tale proposito, riteniamo opportuno sottolineare alcuni aspetti peculiari che rendono il concetto di non continuità di più immediata comprensione rispetto a quello di continuità:

1) è visivamente "chiaro" anche a livello grafico;

2) tra gli ostacoli epistemologici riconosciuti al concetto di limite (Artigue 2000, Invernizzi 1994, Maffini 2001) c'è quello, come più volte detto, della sua formulazione, controvariante rispetto alla intuizione. Potremmo dire che questo è lo scotto da pagare per poter operare nell'ambito dell'infinito potenziale. In generale infatti non solo si ha a che fare, nella usuale prassi didattica, con funzioni continue, ma anche localmente invertibili e con inversa continua. Questo rende indifferente , per quanto riguarda la continuità, il fatto che il quantificatore universale all'inizio della definizione si riferisca agli intoni di x_0 o di $f(x_0)$, con le conseguenti difficoltà degli alunni. Se invece si parte dalla non continuità, più legata al carattere puntuale, il diverso uso dei quantificatori modifica radicalmente la questione: affinché una funzione sia non continua, è infatti sufficiente trovare un intorno di $f(x_0)$ che non permetta di verificare la condizione.

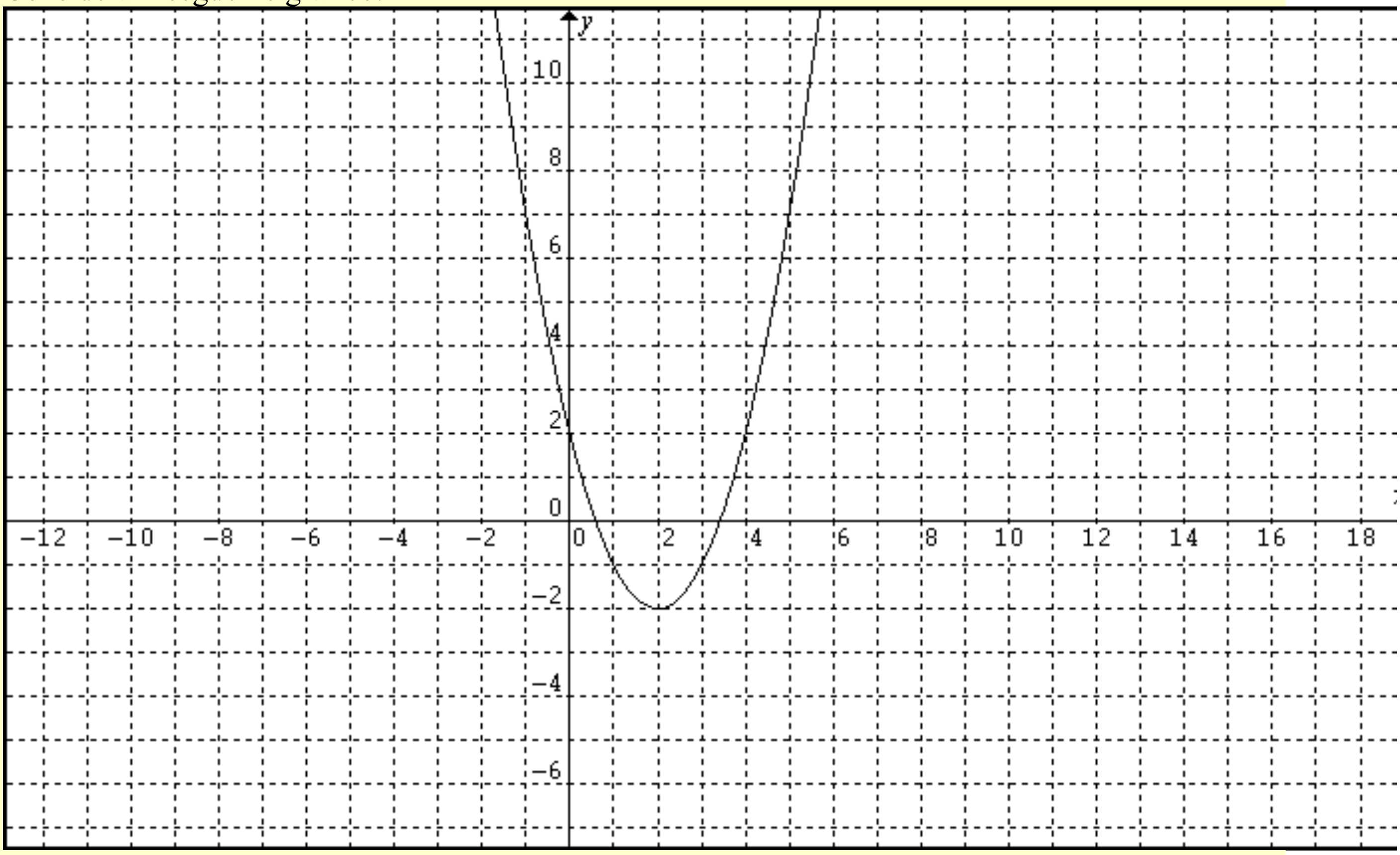
Vai all'attività Individuazione di intorni

Bibliografia
Artigue M.: 2000, 'L'evoluzione delle problematiche nella didattica dell'analisi', La Matematica e la sua didattica, n.4, 380-402
[B] Bagni G.T.: 1996, Corso di Matematica 3, Zanichelli, pag.1371
[CTV] Checcucci V., Tognoli A. , Vesentini E.: 1972, Lezioni di topologia generale, Feltrinelli.
Hitt F.: 1994, Teachers' Difficulties with the conztruction of continuos and discontinuos function, Focus on learning problems in Mathematics vol 16, number 4, Fall Edition, pag. 10-20.
Invernizzi S.: 1994, Limiti e visualizzazione: un approccio alla nozione di limite per funzioni da R ad R basato sulla struttura d'ordine, in Funzioni, limiti, derivate – Atti del 4° Incontro Internuclei, a cura di B. Piocchi; Siena 10-12/03/1994, pag. 83-88
Maffiini A.: 2001, Le basi dell'analisi non-standard, Atti delle conferenze su l'analisi non-standard, Quaderno 1, Mathesis Sezione Picena
Maffini A.: 2003, Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione, L'educazione Matematica Serie VII Vol. 1, pag.38-46

3.3.1.1. Individuazione di intorni

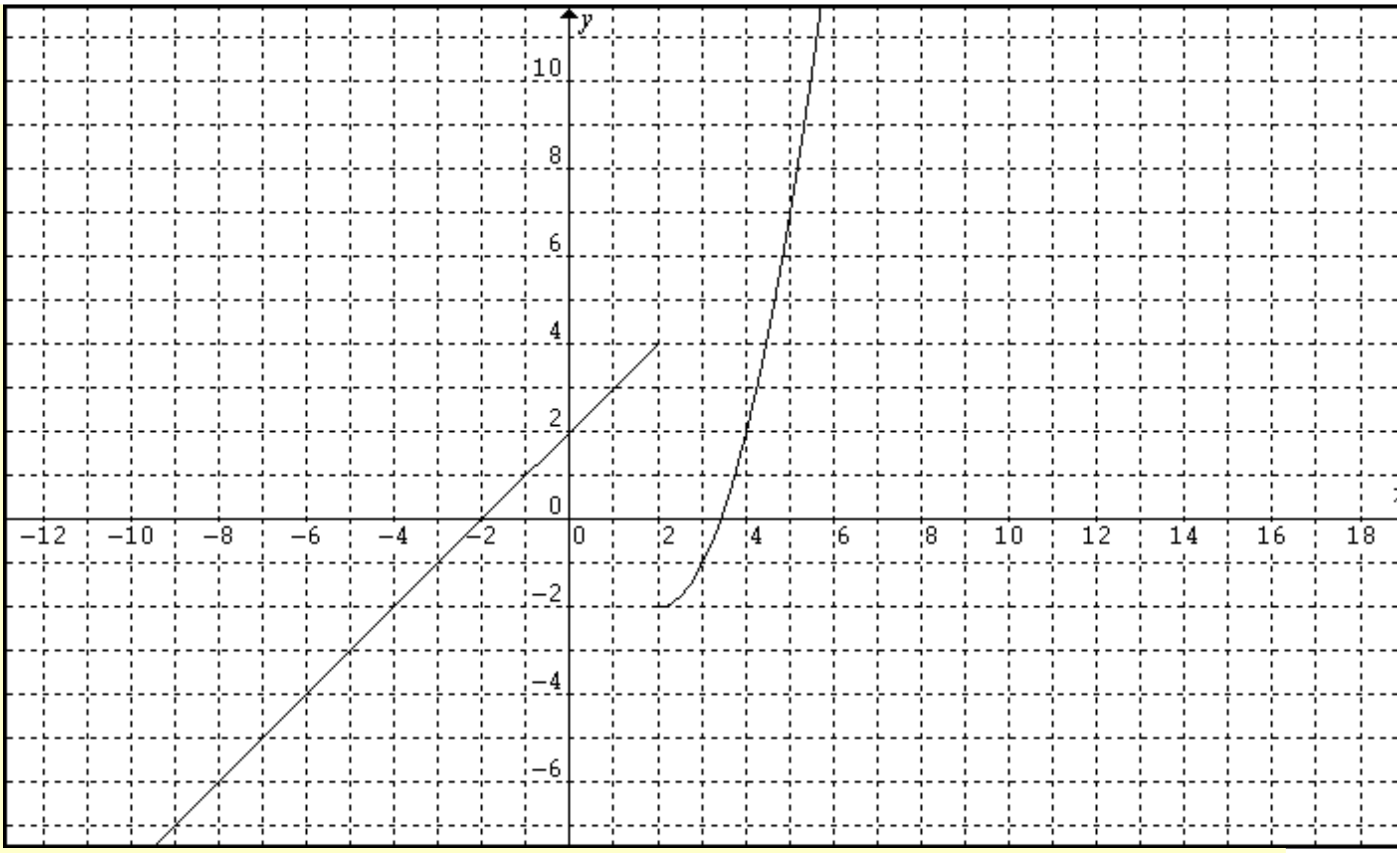
Ambito concettuale: definizione di continuità
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) mostrare, in termini grafici, la definizione di continuità;
2) porre il problema delle motivazioni alla base di tale definizione in relazione alla non continuità;
Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere proposta a gruppi.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

Dalla definizione di continuità che conosci, sai che una funzione è continua in x_0 se e solo se
(1) Comunque si prenda un intorno U di $f(x_0)$ esiste un intorno V di x_0 tale che ogni x appartenente a V (escluso x_0) ha l'immagine f(x) appartenete a U.
Dal modo con cui si parla di limite ("la funzione tende a L quando x tende a x_0) sembrerebbe più intuitivo il contrario cioè che
(2) Comunque si prenda un intorno U di x_0 esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che ogni x appartenente a U (escluso x_0) ha l'immagine f(x) appartenete a V.
Considera il seguente grafico:



Sapresti applicare la definizione (2) al punto di ascissa 5? E a quello di ascissa 2? Perché, secondo te, in un caso funziona e nell'altro no?
Per quanto riguarda la definizione (1) cosa puoi dire?
Nell'applicazione delle due definizioni al punto di ascissa 5, quale "impone" condizioni più restrittive? Quindi quale ti sembra più significativa e perché?

Considera adesso il seguente grafico:



Come la definiresti la funzione in 2 (supponi che f(2)=4)?
Verifica graficamente che la definizione (2), relativamente a x=2, varrebbe anche in questo caso.
Cosa puoi concludere?

3.3.2. Una proposta didattica

In un percorso tradizionale che prevede l'introduzione del concetto di limite prima di quello di funzione continua, la ricerca delle discontinuità è funzionale, come detto, all'idea di analisi delle caratteristiche di una funzione. Si potrebbe allora pensare di scindere completamente il concetto di continuità da quello di discontinuità, evitando così forme di implicazione tipo quella messa in evidenza in precedenza. Un percorso che tenga conto di questa esigenza può essere il seguente, ricordando che tale definizione ne comporta inevitabilmente quella della sua negazione. Anche in questo caso per la terminologia utilizzata si rimanda a 3.2.3.

Definizione puntuale di funzione continua:
Data una funzione definita in D_f a valori in **R** definita da $y=f(x)$, sia $x_*\in D_f\cap D(D_f)$. Diremo che la funzione è **continua** in x_* se e solo se

$$\lim_{x\to x_*} f(x) = f(x_*)$$

Formalmente: $D\wedge A\rightarrow(C\leftrightarrow L)$

Definizione puntuale di funzione non continua.
Data una funzione definita in D_f a valori in **R** definita da $y=f(x)$, sia $x_*\in D_f\cap D(D_f)$. Diremo che la funzione è **non continua** in x_* se e solo se
non esiste

$$\lim_{x\to x_*} f(x)$$

oppure, nel caso in cui tale limite esista,

$$\lim_{x\to x_*} f(x) \neq f(x_*)$$

.
Formalmente: $D\wedge A\rightarrow(\neg C\leftrightarrow\neg L)$

Vedi attività: Individuazione di punti di non continuità.

Definizione puntuale di discontinuità.
Rispetto alla formulazione precedente ci si allontana decisamente dal concetto di continuità non prevedendo nessuna implicazione reciproca:

Data una funzione definita in D_f a valori in **R** definita da $y=f(x)$ e sia $x_o\notin D_f$. Diremo che la funzione è **discontinua** in x_o se e solo se $x_o\in D(D_f)\cap$**R**.

E' interessante osservare che le classiche suddivisioni delle discontinuità (I, II e III specie) si ritrovano sia per la non continuità che per la discontinuità così come sono state precedentemente definite. Nella successiva tabella sono riportate le 6 condizioni che si generano. La tabella va letta in senso orario (ad esempio: "Non continuità di seconda specie", ecc.) e si riferisce ad un punto x_o opportunamente preso in relazione alle condizioni

di	**I specie**	**II specie**	**III specie**
Non continuità	Limiti destro e sinistro finiti e diversi e, almeno uno, diversi da $f(x_o)$	Almeno uno dei due limiti destro o sinistro non esiste o è infinito	I limiti destri e sinistri esistono finiti e sono uguali, ma diversi da $f(x_o)$
Discontinuità	Limiti destro e sinistro finiti e diversi.	Almeno uno dei due limiti destro o sinistro non esiste o è infinito	I limiti destri e sinistri esistono finiti e sono uguali.

Nella tabella sottostante vengono invece riportati alcuni esempi di funzione classificabili secondo questa casistica:

di	**I specie**	**II specie**	**III specie**
Non continuità	$y = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ 2x-3 & x < 2 \end{cases}$	$y = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x < 2 \end{cases}$	$y = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$
Discontinuità	$y = \dfrac{x^3 - 3\|x\|}{x}$	$y = \log(x-1)$	$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

3.3.2.1. Individuazione di punti di non continuità

Ambito concettuale: definizione di non continuità
Livello: scuola superiore
Obiettivi:
1) individuare, in termini analitici, punti di non continuità di una funzione;
2) legare il registro algebrico al registro grafico;
3) saper riconoscere la significatività di alcune condizioni.

Modalità di presentazione: l'attività dovrebbe essere proposta a gruppi.
Fruitori: gli studenti per discussione in gruppo.

Indica quali tra le seguenti funzioni sono continue e quali presentano punti di non continuità.

Da **R** in **R** considera le funzione definite dalle proposizioni

$$a)\, y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases} \quad b)\, y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Da $\mathbf{R_0}$ in **R** considera le funzioni definite dalle proposizioni

$$c)\, y = \frac{1}{x} \quad d)\, y = \frac{senx}{x}$$

Quando ti è possibile, rappresenta i grafici delle funzioni proposte. Nel caso di punti di non continuità individua un intorno di $f(x_0)$ per il quale non sia possibile individuare il richiesto intorno di x_0.

Esercizio 1.

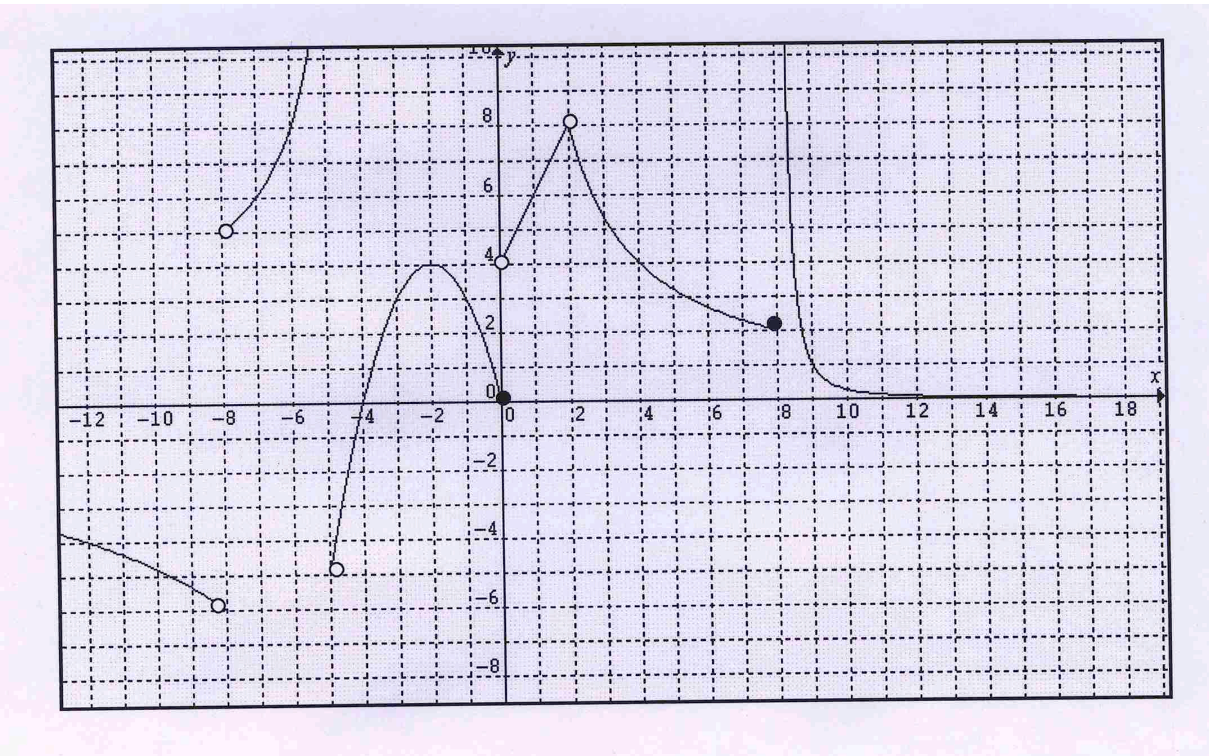
Proponi altre funzioni secondo la classificazione proposta in 3.3.2., sia in forma analitica che grafica. Quali tipologie risultano didatticamente più significative?

di	I specie	II specie	III specie
Non continuità			
Discontinuità			

di	I specie	II specie	III specie
Non continuità			
Discontinuità			

Esercizio 2

Individua, nel grafico sottostante, quali sono punti di non continuità e quali quelli di discontinuità, dopo aver definito le due tipologie di punti (tieni conto che x=-5 e x=8 sono asintoti verticali)



Bibliografia

Acerbi E., Buttazzo G.: 1997, Primo corso di Analisi matematica, Pitagora

Alberti, N., Andriani, M. F., Bedulli, M., Dallanoce, S., Falcade, R., Foglia, S., Gregori, S., Grugnetti, L., Marchini, C., Molinari, F., Pezzi, F., Rizza, A., Valenti, C.: 2000, 'Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite', Riv. Mat. Univ. Parma, (6) 3*, 1-21

Andreini M., Manara R., Prestipino F.: 1999, Matematica controluce, Vol 3-I; McGrawHill

Andriani, M.F, Dallanoce, S., Grugnetti, L., Molinari, F., Rizza, A.: 1999, 'Autour du concept de limite' in F. Jaquet (ed.) *Proceedings of CIEAEM 50,* Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335

Artigue M.: 2000, 'L'evoluzione delle problematiche nella didattica dell'analisi', La Matematica e la sua didattica, n.4, 380-402

Borga, M. and Palladino, D.: 1997, Oltre il mito della crisi - Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo, La Scuola, Brescia.

Bagni G. T.: 1994, Continuità e discontinuità nella didattica dell'analisi matematica, in Funzioni, limiti, derivate – Atti del 4° Incontro Internuclei, a cura di B. Piocchi; Siena 10-12/03/1994, pag. 27-32

Bagni G.T.: 1996, Corso di Matematica 3, Zanichelli

Bagni G.T., 1999, 'Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22B, 4, 353-372

Battelli M., Moretti U.: 1992, Corso di matematica sperimentale e laboratorio, Le Monnier

Bazzini L., Iaderosa R.: 2002, Approccio all'algebra, FrancoAngeli
Bottazzini U.: 1977, Definizione di continuità, in Analisi Matematica, Pubblicazione del Liceo Vallisneri (LU), pag. 113-117

Brousseau G. 1976: 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', Actes CIEAEM « *La problematique de l'enseignement des mathématiques* », (Louvain-la-Neuve, Belgique), 101-117

Calame J.A. - Jaquet F.: 1993, Mathématique 7-8-9, *Méthodologie et Commentaires*, Office du matériel scolaire, Neuchâthel
Castelnuovo E., Gori Giorni C., Valenti D.: 1988, Elementi di analisi matematica, La Nuova Italia

Cateni L., Bernardi C., Maracchia S.: 1987, Analisi matematica, Le Monnier

Cedrazzi F.: 1985, Analisi Matematica, Zanichelli

Checcucci V., Tognoli A. , Vesentini E.: 1972, Lezioni di topologia generale, Feltrinelli.

Ciolli M., Michelassi L.: 2000, Corso di matematica 3, Principato
Cornu B.: 1991, 'Limits', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, 153-166

Cremaschi C.: 2001, Matematica per problemi, Vol. 1, Zanichelli

Dapueto C.: 1992, La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica, Atti del II Internucleo della Scuola Secondaria Superiore, Genova 1992

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 1991, Elementi di Matematica 5, Ghisetti e Corvi

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 1999, Lineamenti di Matematica, Vol. 1, Ghisetti e Corvi

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 1999, Lineamenti di matematica vol.4, Ghisetti e Corvi

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 2001, Lineamenti di Matematica, Modulo G, Ghisetti e Corvi

Dubinsky E.: 1991, 'Reflective abstraction in advanced mathematical thinking', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers, 95-126

Falcade R., Rizza A.: 2001,'Dalla parabola al concetto di limite: un'esperienza con Cabri', L'Educazione Matematica, Anno XXII, serie VI, Vol.3, n.2, 66-71

Falcade, R., Rizza, A.: 2003, 'Approccio intuitivo al concetto di limite', L'Educazione Matematica, Anno XXIV, serie VII, Vol.1, n.2, 15-37

Gallo E.: 1991, La Matematica, Vol. 1, SEI

Grugnetti, L: 1994, 'Il concetto di funzione, difficoltà e misconcetti', L'educazione Matematica, Anno XV - Serie IV - Vol. I, n.3, 173 - 183.

Grugnetti L.,Marchini C., Maffini A.:1999, Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique , Louvain, pag. 421-444

Grugnetti, L., Rizza, A., Bedulli, M., Foglia, S., Gregori, S.: 1999, 'Le concept de limite: Quel rapport avec la langue naturelle?' in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50 , Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318

Grugnetti, L., Rizza, A., Dallanoce, S, Foglia, S., Gregori, S., Marchini, C., Molinari, F., Piccoli, A., Vannucci, V.: 2002, 'Piccole intuizioni crescono: alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo', in Malara N.A., Marchini, C., Navarra, G., Tortora, R. (eds.) *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna, 127-138

Hitt F.: 1994, Teachers' Difficulties with the construction of continuos and discontinuos function, Focus on learning problems in Mathematics vol 16, number 4, Fall Edition, pag. 10-20.

Leonelli A.: 1990, Continuità e connessione, Archimede, Novembre 1990.

Leozun D., Amit M., Ceaushu C., et al.: 2000, 'Pratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différentes entre enseignants et enseignés dans la formation permanente', in *Cultural diversity in mathematics (education) Proceeding of CIEAEM 51*, Horwood Publishing

Mac Lane, S.: 1986, *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg

Maffini A.: 2001 'Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore', Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)", Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000

Maffini A.: 2000, 'Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria', Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3*

Maffini A.: 2001, Le basi dell'analisi non-standard, Atti delle conferenze su l'analisi non-standard, Quaderno 1, Mathesis Sezione Picena

Maffini A.: 2003, Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione, L'educazione Matematica Serie VII Vol. 1, pag.38-46

Maraschini W., Palma M.: 1996, *ForMat CPL*, Paravia

Marchini C.: 2002, 'Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione', SFIDA 18, 3 maggio 2002

Marchini C.: 1998, 'Analisi "logica" della funzione', Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (Eds) Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis 1997-1998, p. 137-157

Maschietto, M: 2002, 'L'enseignement de l'analyse au Lycée : les debuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices', Tesi di dottorato, Université Paris 7

Nordon N.: 1995, 'Le continu quand il n'etait qu'attribut', *Actes de l'Universitè d'été: Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, Besançon

Oriolo P., Coda A., Tess L.: 1996, Matematica, Bruno Mondatori

Palladino, Scotto, Frixione: 2000, Matematica, Vol. 1, Principato

Paola D., Romeni C.: 1997, Manuale di Algebra Geometria Informatica, Vol. 1, Archimede

Piochi, B. (Ed): 1995, Funzioni, Limiti, Derivate, Atti 4° Incontro Nuclei di Ricerca didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore, Siena, 1994, IRRSAE Toscana.

Prodi G.: 1970, Analisi Matematica, Boringhieri

Progetto Matematica Archimede: 1999, I matemoduli F, Archimede edizioni

Scaglianti L.: 1989, Appunti di Geometria, CEDAM

Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as differents sides of the same coin', Educational Studies in Mathematics, **22**, n. 1, 1 - 36.

Sfard, A.: 1992, 'Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 59 - 84.

Sierpinska A.: 1985, 'Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite', *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble, vol. 6(1), 5-67

Sierpinska, A.: 1992, 'Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 23 - 58.

Speranza F., Dall’Acqua Rossi A.: 1981, Il linguaggio della Matematica, Vol. T, Zanichelli

Venè M., Betti F. (a cura di): 1998, Matematica, Sansoni

Youschkevitch A.P.: 1981, ‘Le concept de function jusqu'au milieu du XIX siècle’, Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.) *Fragments d'histoire des mathematiques*, Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 7 – 68

Zaccagnini A.: 2003, ‘Formato A4: aritmetica e geometria con un foglio di carta’, L’Educazione Matematica, Anno XXIV, Serie VII, Vol.1, n.1, 47-53

Zwirner G., Scaglianti L.: 1998, Analisi Infinitesimale, CEDAM