UN ESEMPIO DI INTEGRAZIONE TRA LA MATEMATICA E LA FILOSOFIA: COMMENTO DI UN PASSO DEI "DIALOGHI" DI PLATONE.[1]

- Achille Maffini -

Come è noto, il sapere matematico e il sapere filosofico hanno diverse radici comuni che tuttavia spesso non sono riuscite a tenerli uniti soprattutto in contesto scolastico. La diffidenza che spesso gli insegnanti di una di queste discipline nutrono per l'altra impedisce di concretizzare, nella maggior parte dei casi, un possibile legame interdisciplinare tra le due materie. Ciò che risulta soprattutto difficile è vedere come gli strumenti tipici di ciascuna disciplina possano essere utilizzati dall'altra. Questo lavoro vuole essere un tentativo di lettura di un brano di filosofia con un "taglio" matematico, senza entrare quindi nel merito delle questioni filosofiche trattate.

Il passo che esaminerò è tratto dal dialogo platonico "Il Menone" ovvero "Della virtù". Il tema del dialogo è appunto quello relativo alla definizione di virtù e come la stessa possa essere appresa. A questo problema è strettamente legato quello dell'acquisizione del sapere che Socrate intende legato alla reminiscenza. Per dimostrare questo legame egli chiama un servo e gli pone alcune domande di geometria relative alla costruzione di un quadrato di area doppia a partire da un quadrato dato. Ciò che questo lavoro si propone è di fare un'analisi critica della "dimostrazione" di Socrate e di illustrare come i concetti geometrici che usa si inseriscano con i presupposti geometrici del tempo e con quelli attuali.

Ma qual è la geometria di cui parla Socrate e a cui fa riferimento Platone ? E soprattutto, perché Socrate usa un'argomentazione geometrica per parlare del concetto di virtù?

Prima di rispondere, è opportuno aprire una parentesi sulla situazione della matematica preellenica e preplatonica.

Un po' di storia (e un po' di filosofia)

Quando si parla di matematica preellenica ci si riferisce soprattutto agli Egizi e ai Babilonesi. Se si pensa ai risultati conseguiti da questi popoli circa 4000-5000 anni fa (cioè 2000-2500 anni prima dei Greci) si rimane veramente sorpresi: gli Egizi si occuparono soprattutto di geometria piana e solida, ottenendo risultati di cui opere come le piramidi sono la testimonianza più evidente. I Babilonesi sono ricordati soprattutto per ciò che hanno prodotto sul piano algebrico: oltre alla prima forma di numerazione posizionale a base 60 (di cui si conserva tuttora traccia nelle misure degli angoli e del tempo) possedevano regole per la risoluzione di sistemi di equazioni di secondo grado e avevano qualche conoscenza relativa alla relazione fra il quadrato dell'ipotenusa e i quadrati dei cateti di un triangolo rettangolo.

Seppure questi popoli non fossero immuni dal concetto di speculazione o, più propriamente, dalla capacità di stupirsi e di rimanere affascinati dagli eventi naturali al punto da studiarne le leggi (si pensi soprattutto agli studi in campo astronomico che sembrano essere antecedenti al loro successivo utilizzo nel campo della navigazione o della datazione delle piene del Nilo), la maggior parte dei risultati conseguiti furono frutto di risposte a problemi contingenti. Queste civiltà accumularono formule e tecniche e non si liberarono mai dal limite costituito dalla mancanza di generalizzazione.

Per la Grecia antica queste civiltà erano le naturali fonti di sapere e la maggior parte dei matematici greci apprese gli elementi dell'algebra e della geometria dagli Egizi e dai Babilonesi o perché provenivano dall'Asia Minore o perché andavano direttamente in Egitto a studiare. Sta di fatto comunque che quella era la cultura di riferimento. I Greci però non erano solo un popolo di commercianti: erano essenzialmente filosofi e come tali votati più a ragionare su concetti astratti e conseguenti generalizzazioni che sulla base di esperienze empiriche. Per i Greci le conclusioni matematiche dovevano essere stabilite solo col ragionamento deduttivo ed è questa la novità maggiore che caratterizza la loro cultura e, tramite essa, tutta la successiva cultura occidentale[2]. La matematica diventa astrazione e dai concetti matematici viene eliminata la componente empirica. Il vantaggio, malgrado questo comporti una maggiore difficoltà concettuale, è ovvio: la generalizzazione di un risultato ne comporta l'applicazione in qualunque contesto in cui si parli o si utilizzi quell'ente.

Risulta allora evidente come mai Platone collochi la geometria e la matematica in genere al secondo grado della conoscenza (superata solo dalla filosofia), grado in cui la ragione tiene ancora presenti le immagini degli oggetti, apprese con i due gradi inferiori basati sui sensi, ma non contempla più tali oggetti in sé, bensì rispetto alle loro strutture matematiche. In questo senso la matematica non fa parte delle scienze empiriche, poiché quest'ultime risultano fondate

---

[1]Parte del presente lavoro deriva da una comunicazione tenuta dall'autore nel corso di incontri promossi dal Prof. F.Speranza del Dipartimento di Matematica di Parma al fine di favorire una interazione tra insegnanti di matematica e di filosofia.

[2]"La preferenza dei Greci per la deduzione era, sorprendentemente, un aspetto dell'amore ellenico per la bellezza.....Non stupisce dunque che i Greci considerassero la matematica un'arte, così come è un'arte anche l'architettura anche se i suoi principi possono essere usati per costruire magazzini". M.Kline-La matematica nella cultura occidentale-Feltrinelli, pag.38.

sulla mutevole esperienza e come tali non si basano su principi morali. La ragione ha soppiantato i sensi come strumento per garantire la correttezza di un risultato; e la matematica è il potente strumento con cui la ragione si esprime.

Da quanto detto emerge una conclusione importante per comprendere meglio lo spirito del dialogo platonico: se la matematica era nata come scienza per studiare la realtà "esterna" con i Greci e con Platone in particolare diventa strumento a disposizione della ragione per trascendere tale realtà ritenuta fallace ed arrivare così alla comprensione del Vero, del Bello e del Bene[3].

All'interno della matematica platonica un ruolo particolare viene rivestito dalla geometria, la disciplina cioè che studia le forme. Questo, ovviamente, non è un caso: poiché la materia ha importanza solo se possiede una forma, lo studio di tali forme diventa il mezzo per assolutizzare l'oggetto in sé, per ricondurlo a quel mondo delle idee a cui la filosofia platonica fa perennemente riferimento[4].

Accanto a questo fatto è anche opportuno sottolineare come la geometria si presti bene ad un ragionamento di tipo deduttivo; soprattutto si presta bene se si ha un'esigenza didattica non tanto sul contenuto, ma sul metodo. In sostanza la dimostrazione serve non solo per provare l'esistenza di idee innate nel servo, ma anche per fornire all'interlocutore un potente strumento d'indagine; per Platone non è importante solo acquisire la virtù, ma anche il metodo con cui tale acquisizione avviene e la richiesta al servo da parte di Socrate di una conoscenza di tipo geometrico ne è una naturale conseguenza.

Ma di quale geometria si parla?

La geometria in Platone

Platone visse tra il V e il IV secolo a.C., cioè in un periodo di transizione tra la matematica dei pitagorici basata soprattutto sulla teoria dei numeri e la sistematizzazione rigorosa della geometria da parte di Euclide che raccoglie e formalizza tutta una serie di risultati anche importanti ma spesso slegati tra di loro. La filosofia della matematica a cui Platone fa riferimento è quindi soprattutto quella di Pitagora, caratterizzata, sino alla scoperta delle grandezze incommensurabili, dalla non distinzione fra aritmetica e geometria. La conseguenza più evidente di questa non distinzione porta da un lato alla teoria sull'armonia dell'universo esprimibile attraverso i rapporti fra i numeri (interi) che caratterizzano la sostanza delle cose e all'atomismo democriteo, dall'altro ai paradossi di Zenone e alla scoperta dei numeri irrazionali.

L'influsso di Pitagora nella filosofia platonica è evidente nel *Timeo* che accanto all'esposizione del sapere fisico-matematico del suo tempo, sviluppa un tentativo di armonizzare le teorie pitagoriche ed empedoclee, considerando il concetto matematico di proporzione come mezzo per esprimere il tema dell'armonia.

Platone non è ricordato come un matematico ed in effetti non è certo passato alla storia per i contributi tecnici apportati a questa disciplina; quel che è certo, però, è che Platone si è reso conto dello stato insoddisfacente in cui si trovava la matematica soprattutto dal punto di vista epistemologico e per la prima volta cerca di costruire una filosofia della matematica (considerandone gli elementi algebrici e geometrici come enti intermedi tra il divenire della realtà e l'immutabilità delle idee[5]) e non, come avevano fatto i pitagorici, una filosofia matematica.

Questo modo di pensare si sviluppa in Platone in età matura (nei primi dialoghi[6] si può parlare di ammirazione o poco più) ed è trattato in modo esauriente nella *Repubblica* in cui si preoccupa di concetti come ipotesi, dimostrazione, analisi e sintesi. Ma in questi passi Platone è appunto filosofo. Il *Menone* costituisce la cerniera fra i dialoghi giovanili e quelli della maturità: qui la matematica viene trattata anche in modo tecnico ed in un certo senso potremmo dire che Platone "fa un esempio" del ruolo che può assumere questa disciplina come metodo dell'acquisizione del sapere

Il Menone

In questo contesto di conoscenze e di problematiche si inserisce il passo del Menone (82b - 85c) che esamineremo. Come dicevo all'inizio di questo scritto, ciò che mi premerà evidenziare saranno gli aspetti matematico-geometrici, preoccupandomi soprattutto di come si esprima il carattere di dimostrazione e quali informazioni possiamo dedurre rispetto alla concezione della matematica e agli influssi che la stessa ha avuto successivamente.

La struttura del dialogo è tipica delle disquisizioni socratiche: dopo una prima fase in cui si mette in evidenza l'erroneità dell'opinione comune, Socrate guida il suo interlocutore alla scoperta (o meglio riscoperta) della verità che è celata in lui.

---

[3]Secondo Platone "....essa [la geometria] nei confronti dell'anima è forza trainante verso la verità, è stimolo per il pensiero filosofico ad elevare ciò che ora in maniera sconveniente manteniamo terra terra". La Repubblica, libro VII, 527b. Trad. G. Reale. Ed. Rusconi.

[4]"Queste idealizzazioni, che costituiscono il nucleo della filosofia di Platone, sono esattamente allo stesso livello mentale dei concetti astratti della matematica". M. Kline, opera citata.

[5]Cfr Heath T., A history of Greek Mathematics, vol I, p.284, Claredon Press, Oxford, 1921.

[6]Ad esempio Eutifrone 7b-c, Gorgia 488d-489d, Protagora 356e-357a.

Risulta subito chiaro che non si potrà parlare di "dimostrazione" in senso euclideo[7] in quello che dirà Socrate, ma sarà interessante porre attenzione al concetto di *evidenza* che il procedimento socratico propone.

Il problema che Socrate pone al servo è quello di costruire un quadrato di area doppia rispetto a quella di uno dato. Nel dialogo che, da un punto di vista logico, procede secondo una confutazione di una tesi data per intuitivamente vera (ciò che Socrate chiama "opinione") si notano diverse imprecisioni dal punto di vista geometrico-matematico; questo fa presupporre che per Socrate alcuni degli argomenti trattati possano essere acquisiti intuitivamente e che tale evidenza li giustifichi sul piano deduttivo.

Una prima ambiguità si ha nella descrizione del quadrato stesso. Dice Socrate[8]:

Il quadrato è dunque una superficie[9] che ha uguali tutti questi lati, che sono quattro.

Un quadrilatero che soddisfa questa definizione è più in generale un rombo. Questo fa pensare che per Socrate la forma rettangolare sia la più intuitiva e che di conseguenza il quadrato, pur essendone un caso particolare, sia più immediato del rombo.[10]

La caratterizzazione del quadrato si ha successivamente:

E non ha forse uguali anche queste linee qui che lo attraversano nel mezzo?.

Come di consueto Socrate definisce innanzi tutto il genere prossimo e successivamente lo caratterizza attraverso la differenza specifica. Non tutti i commentatori, comunque, concordano su quali siano le linee uguali che lo attraversano nel mezzo; per alcuni (es. F. Acri[11], Pugliese-Carratelli) sono gli assi, per altri (ad. es. G. Reale[12]) le diagonali. Si osservi che se si trattasse degli assi, la dimostrazione della loro congruenza, necessaria per caratterizzare il quadrato, richiederebbe il quinto postulato di Euclide.

Nel testo platonico originale probabilmente non erano indicate figure che descrivessero quanto affermato e neppure i punti erano indicati con lettere, ma le varie costruzioni erano dedotte direttamente dal testo. Per comodità riporterò, come supporto, le figure così come si ritrovano nei testi commentati, figure che servono a fissare meglio i concetti espressi e che dovrebbero essere analoghe a quelle che Socrate disegna o fa disegnare al servo.

E non potrebbe esserci forse una superficie come questa e più grande e più piccola?

Socrate si riferisce alla possibilità di costruire figure simili al quadrato assegnato; i concetti di "più grande" o "più piccolo" sono ovviamente poco precisi in questi termini.

E non potrebbe darsi un'altra superficie doppia di questa,(ABCD), *ma tale da avere tutti i lati uguali come questa?*

Socrate, dopo aver fatto osservare che un quadrato con lato doppio non ha area doppia ma quadrupla, introduce il problema di trovare **la misura** del lato del quadrato di area doppia; il servo (e Socrate), intuitivamente, **presuppone che esista.**

La similitudine delle figure, citata da Socrate, ha fatto credere al servo che tra i lati dei quadrati e la loro area ci sia lo stesso rapporto.

---

[7]La geometria euclidea si caratterizza come una disciplina che fa del metodo ipotetico-deduttivo l'aspetto innovativo rispetto alla matematica precedente. Secondo tale metodo, da certe premesse (*hypotheseis*) è possibile deduttivamente arrivare a delle *theseis.* Ma chi garantisce le ipotesi? Come detto, questo tema è stato trattato da Platone nella Repubblica, ma già nel Menone (86 E e seguenti) per *ipotesi* Platone intende il punto di partenza di una deduzione geometrica e quindi un presupposto non riconducibile ad altro; in sostanza, un assioma. Tali presupposti, però, esigono una fondazione (contrariamente a quanto credono i matematici che li ritengono autoevidenti; crf Repubblica 510 C e seguenti) di cui la matematica da sola non è capace (sembra di ritrovare, circa 2500 anni prima, i risultati di Godel) a meno che non ricorra all'intuizione puramente intelligibile. Ma come pensare allora che la matematica si occupi di figure come immagini sensibili?
Rispondere a questa domanda equivale ad entrare nel merito della filosofia platonica, cosa che esula dal presente lavoro. Per una possibile risposta si veda ad esempio *V.Hösle: I FONDAMENTI DELL'ARITMETICA E DELLA GEOMETRIA IN PLATONE-Vita e Pensiero, 1994; pag.119-123.*

[8]Qui e nel seguito le affermazioni socratiche contenute nel dialogo saranno messe in corsivo.
Le citazioni sono tratte da Platone, "Menone" a cura di Giovanni Reale. Le illustrazioni usate come supporto al commento sono tratte dalla stessa fonte.

[9]In precedenza (76a) Socrate aveva dato il concetto di figura come "..[essa] è ciò in cui termina il solido; in breve potrei dire che la figura è il limite del solido". Questi termini si ritrovano ne "Gli Elementi" quando Euclide definisce le linee come estremi della superficie (Libro I, def. VI) e quando definisce la superficie come estremo, limite, del solido (Libro XI, def. II).

[10]Questo fatto risulta piuttosto importante sul piano della costruzione della soluzione, la quale, come vedremo poi, sarebbe stata più semplice se Socrate avesse pensato al quadrato come caso particolare del rombo e non del rettangolo.

[11]Platone:I Dialoghi - Einaudi, 1970

[12]La posizione di G. Reale è probabilmente giustificata dal fatto che per i greci la figura perfetta sia il triangolo, figura che si viene appunto a formare con le diagonali.

Dal passo 83a all' 83c si ha la verifica sperimentale-intuitiva dell'asserzione fatta dal servo e la dimostrazione della sua erroneità, da cui le conclusioni sul reale rapporto tra lato e area di un quadrato. Dal punto di vista geometrico la dimostrazione risulta complessivamente corretta in quanto frutto più di costruzioni che di asserzioni.

Termina così la prima parte della prova: il servo, grazie alla guida di Socrate, è arrivato al dubbio e quindi si trova nelle condizioni migliori per la ricerca del sapere, sapere che, secondo Socrate, il servo già possiede, ma che risulta latente in lui. Socrate si propone a questo punto di far riemergere questo sapere. Vediamo come.

E' opportuno riportare tutto il passo del dialogo relativo, le cui costruzioni geometriche sono riprodotte nella fig. 1.

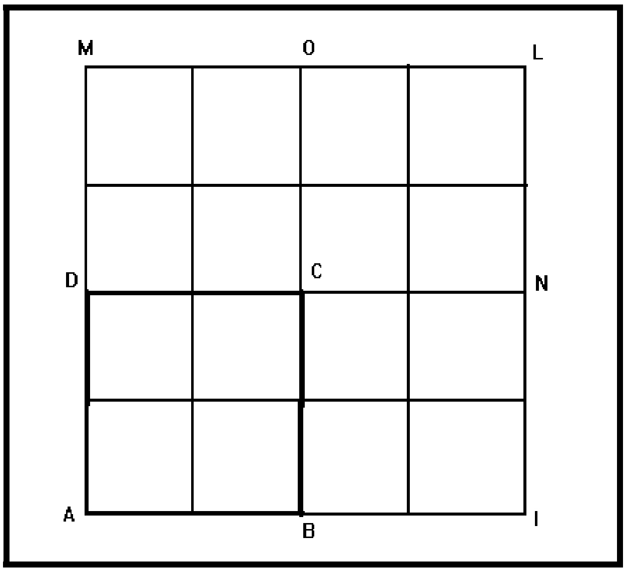

fig. 1

Socrate:Dunque, dal lato doppio, o ragazzo, non una superficie doppia ma quadrupla deriva.

....

E quattro volte quattro , fanno sedici , o no ?

....

E allora, quella di otto piedi da quale lato ? Non se ne ottiene da questa (AI) *una quadrupla?*

....

E quella di quattro, dalla metà (AB) *di questo qui* (AI) *?*

....

Ebbene, l'area di otto piedi non è doppia di questa qui (ABCD)*, e metà di quest'altra* (AILM)?[13]

....

Non deriverà, allora, da un lato maggiore rispetto a questo (AB) *ma minore rispetto a quest'altro* (AI) *?*

Si arriva così al punto cruciale: Socrate fa osservare che l'area richiesta è uguale a quella del rettangolo che abbia per lati il lato del quadrato di partenza ed il suo doppio. Dunque il lato del quadrato richiesto deve avere misura compresa tra queste due, cioè tra due piedi e quattro piedi. L'intuizione del servo arriva ad immaginare l'esistenza del quadrato di area doppia e quindi del suo lato individuato dal punto A e da un punto compreso tra B ed I; ma l'esistenza di tale punto non è scontata **se non si presuppone la continuità della retta.** Per i pitagorici la retta veniva raffigurata, sulla base della loro dottrina dei numeri che aveva anche una valenza geometrica, come una “serie di punti successivi”. Analogamente per le superfici e per i solidi. Una visione quindi “discreta” della retta e dello spazio in genere. Se Socrate richiede il segmento che risolve il problema come individuato dal punto A e da un punto intermedio tra B ed I, non è detto che tale punto esista. Come vedremo successivamente, il servo individua nella diagonale del quadrato il lato che risolve il problema; si potrebbe quindi pensare di trasportare tale lato sulla retta AI con un compasso puntato in A, ma la configurazione di una retta discreta non darebbe per scontata la sua intersezione con la circonferenza. Il modello di retta che rende possibile la soluzione necessita appunto dell’assioma di continuità[14], poiché l’assioma di densità (tra due punti distinti di una retta esista sempre almeno un punto) non basta[15].

---

[13]è da notare l'uso improprio delle unità di misura: trattandosi di area dovrebbe parlare di piedi quadrati

[14]Questo comunque non autorizza a concludere che la supposta esistenza di tale punto proietti il discorso in un’ottica euclidea. Com’è noto, la geometria euclidea è una geometria del finito; Euclide, pur avendo presente il problema dell’infinito, fa di tutto per evitarlo. Nella definizione XIV del libro I stabilisce che le figure sono al finito; nel postulato II afferma che “..una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta”. In sostanza le rette diventano segmenti comunque prolungati e se di infinito si deve parlare, si tratta di un infinito potenziale. Non è improbabile che lo scetticismo di Euclide nei confronti del quinto postulato nasca proprio dall’esigenza di dover richiedere il prolungamento illimitato di due rette. Tutto questo per dire come per Euclide il problema della continuità della retta, che

In questa parte, tra l'altro, risulta ambiguo l'uso dei termini: Socrate fa cercare al servo il lato del quadrato o la sua misura ? La risposta a tale domanda credo sia essenziale se si vuole prendere questo passo come confutazione della teoria democritea oppure come prova dell'esistenza degli irrazionali. Di fatto vedremo come Socrate arrivi all'esistenza del lato del quadrato e non alla sua misura.

La risposta che il servo fornisce è di fatto la più intuitiva, quella cioè secondo cui il valore richiesto per il lato sia la media aritmetica tra i due valori tra cui è compreso, cioè tre piedi. Si osservi che tale tipo di risposta è algebrica e non geometrica (solo successivamente viene costruito il segmento corrispondente) e che, con la media aritmetica, da valori razionali si ottiene un valore razionale.

Attraverso un'ulteriore verifica sperimentale-intuitiva basata anch'essa su costruzioni geometriche (e non su dimostrazioni), Socrate mette in evidenza l'errore commesso dal servo.

Nei passi dall' 84a all' 84d termina la parte in ci si affida solo all'intuizione immediata. Le certezze del servo, dovute a quelle che Socrate chiama opinioni (contrapposte alla vera scienza), sono ormai di fatto "distrutte".

Dalla coscienza dell'erroneità del proprio sapere nasce l'esigenza di conoscere la verità.

Dal passo 84d all' 85b Socrate guida il servo alla costruzione della soluzione corretta (vedi fig. 2)

---

presuppone un infinito attuale, non sia sentito, anche perché la retta euclidea non è esplicitamente "un insieme di punti", ma un ente in cui i punti compaiono come risultati di costruzioni. Verrebbe allora da credere che per Euclide la retta sia "naturalmente" continua.
Il problema si pone e viene trattato nell'ottocento quando prima Cantor e poi Dedekind, occupandosi della definizione dei numeri reali, si imbattono nella struttura della retta geometrica utilizzata da Cartesio come modello per questo insieme numerico nella sua geometria analitica.
Le formulazioni più usuali dell'assioma di continuità sono dovute proprio a questi due matematici.
La formulazione di Dedekind può essere espressa in questi termini:
"Dati due sottoinsiemi a e b di una retta r se tutti i punti di a precedono tutti i punti di b (in simboli: $\forall A \in a \wedge \forall B \in b$ A precede B), esiste un punto P compreso tra a e b".
La formulazione di Cantor:
"Data una famiglia di un'infinità numerabile di segmenti A_i ,$i \in N$, tali che se $k<j$ $A_k \subset A_j$, l'intersezione di tutti i segmenti della famiglia non è vuota".
Le due formulazioni non sono equivalenti; in particolare la formulazione di Cantor equivale a quella di Dedekind se vi si aggiunge l'assioma archimedeo ("Dati due segmenti [AB] e [CD] tali che $|AB|<|CD|$, esiste un numero naturale n tale che $n|AB|>|CD|$).
In piena ottica formalistica, D.Hilbert in *Grundlagen der Geometrie* (1899) cercherà di rendere rigorosa la geometria euclidea individuando in cinque gruppi di assiomi le proposizioni fondamentali che regolano i tre sistemi di "oggetti" (punti, rette e piani) che la costituiscono. In particolare il quinto gruppo è formato dagli assiomi di continuità di cui fanno parte l'assioma archimedeo e l'assioma di completezza lineare ("Il sistema dei punti di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi I-III ed anche V1". E' utile far notare come l'assioma III 1, noto come assioma del trasporto di segmenti, garantisca l'esistenza di un punto su una semiretta che individui con l'origine della semiretta un segmento congruente ad uno dato).
Nel Libro V degli Elementi di Euclide si trova però la seguente definizione I:
"Una grandezza minore è parte di una grandezza maggiore se (la minore) misura la maggiore", dove "misura" è da intendere in senso aristotelico. Questa formulazione ricorda molto l'assioma archimedeo, il che fa pensare ad un tentativo di risposta euclidea all'esistenza di punti che risolvono determinati problemi (ad esempio individuare su una retta un punto che determini con uno dato un segmento di lunghezza assegnata). Come visto, però, questo non basta per avere il modello di retta a cui i matematici dell'ottocento (e noi con essi) pensavano e che avrebbe garantito l'esistenza del punto richiesto.
[15]D'altra parte, se bastasse, avremmo una retta che come modello algebrico sarebbe espressa dall'insieme dei numeri razionali.

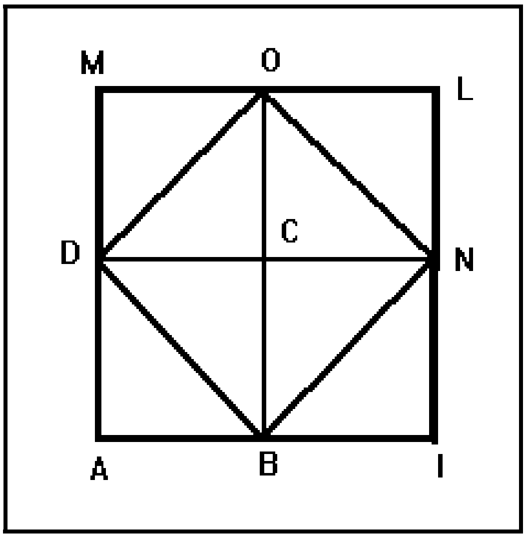

fig. 2

Tale costruzione, apparentemente fatta con passaggi evidenti, di fatto richiede delle dimostrazioni geometriche semplici ma non scontate. Sentiamo Socrate:
E questa linea tracciata da un angolo all'altro (BN, DB, NO, OD) *non viene forse a dividere a metà ciascuna di queste superfici* (ABCD,BINC,CNLO,DCOM)*?*

Per confermare questa affermazione, bisogna dimostrare la congruenza dei triangoli utilizzando il primo criterio di congruenza (o le proprietà dei parallelogrammi).
Non si ottengono dunque queste quattro linee uguali racchiudenti quest'area qui (DBNO)*?*

La congruenza della diagonali è dedotta dall'isometria dei triangoli che si vengono a formare. Inoltre la figura ottenuta con le quattro diagonali porta ad un quadrilatero di area doppia (come fa dedurre Socrate al servo), ma potrebbe essere un rombo: occorre dimostrare che è un quadrato (ad esempio attraverso la congruenza delle diagonali OB e DN).

Infine si arriva alla conclusione richiesta:
SOCRATE: E di quanti piedi è questo spazio [16]*?*
SERVO: Otto.
SOCRATE.: E di quale linea esso è nato?
SERVO: Di questa (BD).
SOCRATE: I dotti chiamano questa linea diagonale; sicché essa ha nome diagonale. Dalla diagonale, come tu dici, o ragazzo di Menone, si può ottenere l'area doppia.

Tale conclusione, come detto, è di carattere geometrico: il quadrato richiesto è quello che ha per lato la diagonale del quadrato di partenza; questo lato esiste come segmento congiungente due punti; nulla è detto relativamente alla sua misura[17]. In effetti Socrate usa indifferentemente i concetti di segmento e di misura del segmento come se indicassero la stessa cosa[18]. In questa parte, come in quella precedentemente messa in luce, l'influenza della scuola pitagorica in cui non si fa distinzione tra aritmetica e geometria è evidente. Ma qui emergono anche i caratteri che cominciano a distinguere Platone da Pitagora e che produrrà, come estrema conseguenza, l'opera di Euclide. Per i primi pitagorici contare e misurare erano sinonimi, ma, come è noto, parlare di misura della diagonale del quadrato comporta l'introduzione delle grandezze incommensurabili e quindi l'inadeguatezza dei numeri razionali per la loro misura. Platone era a conoscenza di tali problemi che vedeva come esempio di verità percepite dal pensiero e non acquisite con l'esperienza. Se per i pitagorici la geometria era una "visualizzazione" dell'aritmetica (aritmo-geometria), con Platone comincia a porsi il problema (riscontrabile anche in questo brano) fra la discontinuità "naturale" e la continuità "concettuale"[19], problema che porta alla distinzione tra la geometria (studio del continuo) e l'aritmetica (studio del

---

[16]Il quadrato BNOD.

[17]"Il filo della discussione passa bruscamente dall'aritmetica alla geometria: *se preferisci non fare calcoli allora mostra!!.* Socrate bara, chiaramente. Egli ha chiesto la lunghezza del lato. Lo schiavo, leale, risponde quattro o tre piedi. Gli si chiede una misura ed egli fornisce una quantità. Ma quando viene la diagonale del quadrato come lato del quadrato raddoppiato, si parla soltanto di qualità....Interrogativi e dimostrativi hanno ormai lasciato la quantificazione per qualificare ciò che si mostra. Nessuno chiede al richiedente: quale lunghezza? Egli interroga l'ignorante su un contenuto a proposito del quale nessuno, di rimando, lo disturba. Egli ha sì trovato il lato, ma non l'ha misurato. Socrate bara: egli sa che non troverà la lunghezza cercata" M. Serres-Le origini della geometria-Feltrinelli, pag230-1.

[18]In effetti i greci non parlavano di misure; i cenni precedenti sono probabilmente un aiuto alla comprensione.

[19]Platone aveva cercato una soluzione alle difficoltà derivate dall'esistenza di grandezze irrazionali, incorporandole negli elementi ultimi (i triangoli) di cui è costituito il mondo. In particolare aveva considerato due tipi di triangoli

discontinuo)[20]. Occorrerà attendere Cartesio, nel XVII secolo, perché questo solco venga rimarginato ed occorrerà soprattutto attendere l'ottocento per scoprire che la risoluzione geometrica del problema stimolata da Socrate presenta le stesse difficoltà della soluzione algebrica.

Dal punto di vista geometrico la deduzione della tesi procede in modo piuttosto approssimativo, con diverse questioni che andrebbero dimostrate in modo rigoroso. La critica più naturale che viene da fare a questo passo è che questo modo di procedere risulta poco lontano da quel concetto di opinione che Socrate vuole superare.

Un'ultima osservazione riguarda l'opportunità di affrontare il problema in altro modo per dedurne più facilmente la conclusione.

Come si è detto, Socrate descrive il quadrato considerandolo come un caso particolare di rettangolo. Se la costruzione fosse partita dal considerarlo come caso particolare del rombo, la conclusione sarebbe stata più diretta, in quanto avrebbe sfruttato la proprietà del rombo di avere area metà di quella del rettangolo che ha come lati le sue diagonali. Questo però presupporrebbe il lavorare in un contesto tipo "Elementi di Euclide", cioè al di fuori da una logica socratica. Quanto affermato è evidenziato dalla fig. 3:

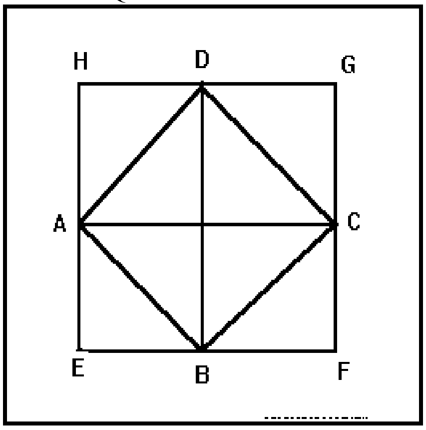

fig. 3

Conclusione

A commento finale, alcune considerazioni.

Nella lettura del passo sopra esaminato, si enfatizza solitamente la componente filosofica, mentre si trascura, ritenendolo forse accessorio, l'aspetto matematico.

Come detto, la figura di Platone risulta una sorta di spartiacque nel contesto delle questioni algebriche e geometriche della Grecia antica e questo aspetto non è trascurabile se si pensa come il pensiero del filosofo ateniese abbia condizionato l'evoluzione della matematica (soprattutto dal punto di vista filosofico) nei secoli a venire. Questo emerge, come visto, anche nel passo considerato che quindi risulta importante non solo come esempio di visione platonica della virtù e della corrispondente filosofia della reminiscenza, ma anche dal punto di vista delle problematiche che presenta sul piano matematico, specchio dei dubbi e delle contraddizioni del tempo.

Un'altra considerazione riguarda lo scopo specifico e l'ambito in cui questo lavoro è stato fatto, che, ricordo, era un tentativo di interazione fra la matematica e la filosofia.

Quando si parla di interdisciplinarità è facile cadere in luoghi comuni o, peggio, ricondurre il tutto a progetti ambiziosi, ma improponibili se non in condizioni molto particolari e sporadiche. Credo che uno dei limiti maggiori per un obiettivo di questo tipo, soprattutto nell'ambito della matematica e della filosofia, sia da ricercare nella tendenza di chi si occupa separatamente delle due materie di avvicinarsi all'altra con i propri mezzi, ma con la presunzione di perseguirne i fini. Un'analisi di tipo matematico (o meglio, fatta da una persona che si occupa di matematica) di un testo filosofico dovrebbe da un lato essere orientata, attraverso una critica di fatto epistemologica, a stabilire se la metodologia e la terminologia usata sono adatte per raggiungere lo scopo proposto e dall'altro a conoscere direttamente l'evoluzione della matematica attraverso la visione delle problematiche che si sono presentate anche in funzione degli sviluppi successivi.

---

rettangoli: i triangoli rettangoli isosceli (che ha in sé la radice di due) e i triangoli rettangoli metà del triangolo equilatero (che ha in sé la radice di tre). Nel Timeo Platone afferma che "Tutti i triangoli poi derivano da due triangoli, ciascuno dei quali si compone di un angolo retto e due acuti: e l'uno di questi triangoli ha da ogni parte una porzione uguale d'angolo retto diviso da lati uguali, e l'altro due parti diseguali d'angolo retto diviso da lati diseguali." Questo fa pensare a K.Popper in "*The open society and enemies*" che per Platone ciascun triangolo possa essere ottenuto combinando questi due, che è equivalente alla teoria, erronea, della commensurabilità relativa di tutti gli irrazionali come somme di razionali con le radici quadrate di due e tre.

[20]"D'improvviso, lo spazio mostra lunghezze che il calcolo non comprende più. Se non puoi calcolare, allora mostra: questa parola di Socrate, più abile e profonda di quanto non sembri, indica esattamente la biforcazione",.M.Serres, opera citata, pag.232.

Naturalmente non tutta la filosofia può essere esaminata in questo modo, ma quando questo è possibile ritengo che non sia un'occasione da perdere, anche per i matematici: ci sono stati travagli nella matematica che non sono evidenziati in genere nelle cose che si insegnano, ma che possono emergere indirettamente dal confronto con altre discipline e che risultano indispensabili per capirne a fondo le vie intraprese. Dal punto di vista didattico, credo che i vantaggi per i ragazzi siano evidenti : oltre ad uno strumento diverso per affrontare le questioni (filosofiche, ma non solo) potrebbero così avere una immagine meno monolitica della matematica e avvicinarla un po' di più alla concezione platonica che le assegnava la nobilissima funzione di "tirare l'anima da ciò che diviene a ciò che è".

BIBLIOGRAFIA

Platone: TUTTI GLI SCRITTI a cura di G. Reale-Rusconi, 1991
M. Kline: LA MATEMATICA NELLA CULTURA OCCIDENTALE-Feltrinelli,1976
M. Serres: LE ORIGINI DELLA GEOMETRIA-Feltrinelli, 1993
G. Sidoni (a cura di): FILOSOFIA E MATEMATICA-IRRSAE Lombardia, 1994
F. Enriquez: LE MATEMATICHE NELLA STORIA E NELLA CULTURA-Zanichelli, 1982
Euclide: GLI ELEMENTI a cura di A.Frajese e L.Maccioni-UTET, 1970
V. Hösle: I FONDAMENTI DELL'ARITMETICA E DELLA MATEMATICA IN PLATONE-Vita e Pensiero, 1994.