# CONSIDERAZIONI DIDATTICHE SU PARTICOLARI FUNZIONI: LE FUNZIONI POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE

**Achille MAFFINI**[1]

**Sommario**

Il lavoro presentato si suddivide in due parti le quali hanno diversi punti di contatto, ma che possono anche essere viste anche separatamente. Nella prima parte (paragrafi 1-5) si esamineranno alcuni problemi relativi alle funzioni potenze con esponente razionale, mentre nella seconda (paragrafi A-D) si analizzeranno alcune caratteristiche di una particolare funzione.
Il lavoro nel suo complesso può essere ricondotto al problema di cosa sia il dominio di una funzione[2], ma più in generale si è cercato di porre l'accento su cosa sia una scelta didattica, aspetto spesso implicito nella prassi degli insegnanti.

## 1. IL PROBLEMA

La questione parte da una constatazione di "incongruenza" presente in molti libri di testo liceali: quando si dimostra la regola di derivazione delle potenze con esponenti reali, si pone ovviamente la base positiva, salvo poi utilizzare tale regola anche per funzioni irrazionali viste come funzioni potenze con esponente razionale nel loro insieme di definizione che può essere R (il caso tipico è quello della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ , citata spesso negli esempi). In sostanza c'è una differenza significativa tra il "dichiarato" (teorema di derivazione) e "l'agito" (calcolo di derivate e integrali).
A questo proposito, alla fine del presente lavoro è riportata una tabella in cui si analizzano alcuni testi liceali.
Il problema, di per sé, è strettamente legato alla definizione di funzione potenza con esponente razionale ed è su questo aspetto e sulle sue conseguenze didattiche che verterà il presente lavoro.

## 2. LE POTENZE CON ESPONENTE RAZIONALE

L'argomento è uno di quelli che si presta ad un'analisi di concetti matematici che pongono "dei bivi" e che lasciano aperti possibili sviluppi in funzione delle scelte che si ritiene opportuno fare, avendo presente i guadagni e le perdite che queste scelte comportano.
I libri di testo delle superiori in genere non si preoccupano molto di fare distinzioni particolari per funzioni ad esponente razionale. Alcune eccezioni vanno citate:

a) Zwirner G., Scaglianti L: 1998, *Analisi infinitesimale*, Cedam

---

[1] Liceo Scientifico G. Ulivi – Parma - Unità locale di ricerca didattica dell'Università di Parma
[2] In tutto il lavoro, col termine funzione si intenderà una relazione tra due insiemi ovunque definita e funzionale.

A pag. 25 definisce la potenza con esponente razionale, ponendo il problema del dominio. Successivamente a pag. 150 dimostra la regola di derivazione per la funzione potenza con esponente reale senza specificare il dominio della funzione. È comunque opportuno osservare come gli stessi autori nell'edizione precedente (Zwirner G., Scaglianti L., Brusamolin A., Mantovani M.: 1995, *Realtà e prospettive della matematica 3*, CEDAM) a pag. 142 trovino la derivata della funzione $y = x^{\alpha}$ con $\alpha$ reale e $x$ positivo col metodo della derivata logaritmica, metodo che poi applicano al calcolo della derivata della funzione $y = x^{1/n}$ senza specificare che il dominio può essere R (come da esempio a pag.189).

Un accenno al fatto che la funzione potenza possa essere definita in alcuni casi anche per numeri reali negativi e che la regola di derivazione vale anche in questi casi, si trova (senza dimostrazione) nei seguenti testi:

b) Lamberti L., Mereu L., Nanni A.: 1996, *MATEMATICA 3*, Etas

A pag. 33 dimostra la regola di derivazione della funzione potenza con esponente reale definita in $R^+$, specificando comunque che, se l'esponente è razionale espresso come frazione ridotta ai minimi termini con denominatore dispari, si può dimostrare che la regola vale anche per valori negativi della base, senza fornire una dimostrazione di tale affermazione.

c) Michelotti Venè M. (a cura di): 1998, *MATEMATICA* (per la classe quarta), Sansoni

A pag. 110 la regola di derivazione viene data per un esponente reale qualunque considerando come dominio $R^+$, specificando che tale regola vale anche per funzioni potenze definite su tutto R (a titolo di esempio viene riportata la funzione $y = x^{1/3}$)

d) Barozzi G.: 1989, *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli

La funzione potenza ad esponente reale viene definita a partire dalla funzione esponenziale, cioè (pag. 108) $x^c = \exp[\ln(x^c)] = \exp(c\ln x)$.

Con questa definizione $x$ assume valori strettamente positivi (viene riportato che se $c > 0$ la funzione può essere estesa per continuità[3] anche a 0). Nella pagina seguente l'autore pone il problema delle potenze ad esponente del tipo $^1/_n$ con $n$ numero naturale dispari per dare significato alle scritture del tipo $a^{1/n}$ (riconducibili ai radicali di indice dispari $\sqrt[n]{a}$ ) anche per $a < 0$; questo dopo aver dato la definizione di $a^{1/n}$ come

> "l'unica soluzione reale dell'equazione $x^n = a$, cioè …".

In seguito l'autore pone il problema sollevato dalla definizione precedente delle potenze ad esponente razionale con l'esempio $(-8)^{1/3}$ e $(-8)^{2/6}$ sottolineando la non invarianza del risultato dal rappresentante del numero razionale considerato. La conclusione, coerente con quanto verrà fatto nel resto del testo, è la seguente:

> "Per questa ragione è prudente limitare l'uso del simbolo $a^c$ ai casi illustrati in figura 2.38"[4]

L'autore quindi mette in guardia dai problemi che si possono presentare, invitando alla prudenza, ma di fatto non escludendone in modo categorico la possibilità di una definizione anche per valori negativi della base.

---

[3] È interessante osservare che la giustificazione dell'estensione coinvolge un concetto, quale quello di continuità, non strettamente riconducibile alla definizione della funzione. Questo aspetto, di cui ci occuperemo anche nella seconda parte di questo lavoro, mette già in evidenza quali siano le peculiarità di una funzione che possono interessare e che possono quindi guidare particolari scelte.

[4] I casi a cui si fa riferimento sono quelli delle funzioni con esponenti interi.

e) Maraschini W., Palma M.: 1996, *FORMAT SCI vol 1*, Paravia

Citiamo quanto riportato nel testo:

> "Le potenze sono state inizialmente introdotte, a partire dalla moltiplicazione, con esponente naturale. La definizione è stata poi estesa al caso di esponente intero e poi al caso di esponente razionale. Per considerare come esponente un numero intero qualsiasi (anche 0 o un numero negativo), la base deve però essere diversa da 0...
>
> Considerando poi esponenti razionali, abbiamo posto una ulteriore limitazione: la potenza $b^{m/n}$ è *sempre* definita solo se $b \geq 0$…"

Più avanti, in una delle note esplicative:

> "La potenza $b^n$ è definita per ogni esponente $n \in \mathrm{N}$ solo se la base $b$ è un numero reale diverso da 0 … La potenza $b^z$ è definita per ogni esponente $z \in \mathrm{Z}$ solo se la base $b$ è un numero reale diverso da 0…
>
> La potenza $b^{m/n}$ è definita per ogni esponente razionale $m/n$ solo se la base è positiva. Infatti
>
> se $m/n$ è intero, occorre escludere i casi precedenti;
>
> se $m/n$ non è intero, allora $b^{m/n}=\sqrt[n]{b^m}$ e questa radice non esiste in R se $b^m$ è negativo e $n$ è pari."

Nella posizione di Maraschini, si sottolinea che la potenza è definita per ogni razionale solo se $b$ è positivo, ma non si esclude (anche negli esempi) che possa essere definita, in alcuni casi, anche per basi negative. In particolare, implicitamente sembra parlare di frazioni ridotte ai minimi termini (vedi riferimento ai valori interi).

Questa condizione (di ambiguità) si ritrova anche su alcuni testi universitari:

a) Ghizzetti A., Rosati F.: 1980, *Lezioni di Analisi Matematica vol. I*, Veschi

"Si considerano poi potenze con esponente razionale, cioè del tipo $x^{m/n}$, con $m, n$ primi tra loro e $n \geq 1$. Si pone $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x}\,)^m$ ed è chiaro che questa potenza esiste sempre se $x > 0$…; invece se $x < 0$ esiste solo se $n$ è dispari ed è ad un sol valore…"

b) Richard U.: 1980, *Lezioni di Analisi Matematica* - Parte prima Tomo primo, CEDAM (pag. 63)

"Partendo da queste, si può convenire di prolungare la funzione $f(x)= x^{n/k}$, sopra definita per $x>0$, mantenendone anche la scrittura. Basta porre

$0^{n/k}=0$ per $n, k$ interi positivi,

e, per $a > 0$, $n$ intero, $k$ intero positivo dispari,

$$(-a)^{n/k}=(\sqrt[k]{-a}\,)^n=(-1)^n a^{n/k}$$

La convenzione di scrittura offre alcuni vantaggi formali…

Per contro, la convenzione di scrittura non è una vera definizione di potenza ad esponente razionale di un numero negativo; essa riguarda il simbolo $n/k$ come tale e non il razionale che esso rappresenta: per $x < 0$ non si può certo identificare $x^{1/3}$ con $x^{2/6}$."

La posizione di ambiguità espressa in (Richard, 1980) (l'aspetto simbolico di $n/k$ contrapposto al numero razionale da esso rappresentato) si ritrova anche in

c) Acerbi E., Buttazzo G.: 1997, *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora (pag. 3)

"… Con il simbolo $x^{m/n}$, se $m$ ed $n$ sono entrambi dispari, oppure se solo $m$ è pari, indichiamo $(x^m)^{1/n}$ oppure $(x^{1/n})^m$, che sono uguali. La stessa definizione vale anche se $n$ è pari ed $m$ è dispari: in tal caso $(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$ se $x \geq 0$, e nessuno dei due esiste se $x < 0$. La solita definizione, infine, vale anche se $m$ ed $n$ sono entrambi pari, ma solo se $x \geq 0$; invece, nel caso $x < 0$ ed $m$, $n$ entrambi pari, non è vero che $(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$, e pertanto $x^{m/n}$ non ha senso: infatti …"
Anche in questo caso si parla di simbolo, più che di definizione; in particolare non si fa esplicito riferimento a frazioni con numeratore e denominatore primi tra loro (si evidenzia solo che il caso critico è quello di numeratore e denominatore entrambi pari) se non che a pag. 130, nella dimostrazione della Proposizione 4.11, si legge
"Dalle proprietà finora viste segue in particolare che le potenze razionali positive di $x$ sono crescenti e positive su $R^+$, le potenze razionali negative sono decrescenti e positive su $R^+$; per le potenze razionali con esponente a denominatore dispari, la monotonia su $R^-$ dipende dalla parità del numeratore."

d) Geymonat G.: 1981, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Ed. Leprotto & Bella (pag. 232)
"… Per ogni $n > 1$ si può definire la funzione $\sqrt[n]{x}$ (indicata anche con $x^{1/n}$) di dominio $[0,+\infty[$…"
Più avanti (pag. 233)
"Osserviamo che la condizione $x \geq 0$ *non* può essere eliminata senza correre il rischio di gravi ambiguità; ad esempio per $m$ pari $\sqrt[n]{x^m}$ è definita anche per $x < 0$, ma $(\sqrt[n]{x})^m$ *non* è definita per $x < 0$ e quindi l'uguaglianza[5] asserita nel punto ii) del teorema 1 non avrebbe senso; in modo analogo $x^{2p/2q}$ è sempre definita per $x \in R$ ma $x^{p/q}$ è in generale definita solo per $x \geq 0$."

Le considerazioni sopra fatte mettono in evidenza, a mio avviso, la difficoltà, soprattutto in analisi, ad affrontare l'argomento.
Queste difficoltà sono riscontrabili anche dal punto di vista degli strumenti utilizzati per la rappresentazione dei grafici di funzione, come le calcolatrici grafiche o alcuni software didattici.
Ad esempio il grafico della relazione da R in R individuata da $y = x^{1/3}$ è rappresentato su tutto R dalla calcolatrice grafica TI-89 e dal software Graphmatica, mentre è rappresentato solo sui numeri reali positivi o nulli dalla calcolatrice grafica HP 48G e dai software Derive 6 e Maple 8. Ciò che allora può essere interessante chiedersi è perché e a cosa sono dovute queste diverse rappresentazioni. Ma non solo: più interessante sarebbe indagare se dietro queste diverse rappresentazioni ci sono differenze concettuali o di finalità. Infine, ma non meno interessante, quali sono gli ambiti numerici in cui questi "oggetti" svolgono i calcoli? Quale relazione, in pratica, tra l'ambito di visualizzazione dei risultati (di cui il grafico è l'espressione) e l'ambito numerico in cui si lavora[6]?
Come detto, sarebbe interessante cercare di dare risposte alle domande precedenti, ma non è lo scopo di questo lavoro.
A questo punto azzardiamo una possibile definizione.

[5] Si riferisce a $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$
[6] A questo proposito si vedano anche (Bagni, 1997) e (Marchini, 1998).

**Definizione 1 (per potenze ad esponenti razionali).**

Siano $q \in Q$ e $a \in R$; posto $q = \frac{n}{m}$, si definisce $a^q = \sqrt[m]{a^n}$ (1).

Tale definizione, che salvaguarda le proprietà delle potenze per esponenti razionali, merita ben più di un'osservazione. Se infatti ci si riferisce alla potenza razionale come radicale aritmetico, *a* dovrebbe essere positivo. Ma se si pensa, come è opportuno, alla funzione potenza *rispetto ad un'ottica analitica,* la variabilità di *a* va specificata in relazione all'esistenza della radice (e quindi della sua immagine)[7]. In quest'ottica, quindi, va precisata la natura di *q* e soprattutto il modo in cui è scritto. In sostanza, la domanda a cui si dovrebbe cercare di dare una risposta è: come e quando è definito esattamente $a^q$ con $a \in R$ e $q \in Q$?
Ripercorrendo i problemi e le esigenze viste in precedenza potremmo dare la seguente

**Definizione 2. Dati n ed m** numeri interi primi **tra loro con n positivo definiamo**

| | | |
|---|---|---|
| Se $n$ è pari, $a \in R^+_0$ | $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ | (2) |
| Se $n$ è dispari, $a \in R^+_0$ | $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ | (3) |
| Se $n$ è dispari, $a \in R^+_0$ | $(-a)^{m/n} = (-1)^m \cdot \sqrt[n]{a^m}$ | (4) |

Le proprietà delle potenze razionali, dedotte dalla definizione precedente, sono strettamente legate a quelle delle radici vistecome funzioni inverse delle funzioni potenze. D'altra parte, così come è opportuno applicare le proprietà dei radicali con radicandi positivi "dopo aver messo a posto i segni" (nel caso di argomenti negativi), è altrettanto opportuno lavorare con le potenze ad esponente razionale con basi positive (per le quali non è più indispensabile la precisazione del "primi tra loro"). Anche in questo caso quindi si tratta prima di mettere "a posto i segni", utilizzando la (4) in base alla parità del numeratore della frazione, e poi applicare le proprietà.

### 3. GUADAGNI E COSTI

Come si diceva in precedenza, nella definizione 2 data per valori negativi della base, ci sono alcuni vantaggi e alcuni costi, anche pesanti. È in questa fase che entra in gioco il problema della scelta e quindi la discussione sulla opportunità di certi percorsi didattici piuttosto che altri.
GUADAGNI

a) Vedere le potenze razionali come estensione delle potenze intere
b) Poter passare dalle potenze razionali alle funzioni irrazionali senza problemi di dominio e quindi usare le proprietà delle potenze per risolvere questioni inerenti le funzioni irrazionali

COSTI

a) Mancata invarianza della definizione di potenza ad esponente razionale dalla frazione utilizzata come rappresentante del numero razionale

---

[7] Detto meglio: fissato $q \in Q$ e considerata la relazione su RxR definita dalle coppie $\{(a,b) \in RxR / b = a^q\}$, si tratta di stabilirne l'insieme di definizione, cioè il più grande sottoinsieme di R da prendere come dominio *D* affinché la relazione definita dalle coppie $\{(a,b) \in DxR / b = a^q\}$ sia una funzione.

b) Distinzione, in termini di condizione sulla base, tra potenze reali razionali e reali irrazionali

Entrambi i costi evidenziati sono "pesanti":

a) una delle prerogative delle operazioni date su classi di equivalenza è appunto legata al fatto che tale definizione sia stata data indipendentemente dal rappresentante. Nel caso dei numeri razionali, la relazione di equivalenza proposta è sicuramente funzionale al fatto che i risultati delle operazioni elementari (somma, prodotto, risultati rispettivamente dell'addizione e della moltiplicazione) siano indipendenti dal rappresentante.
Per quanto riguarda le potenze ad esponente razionale, è possibile ridefinire Q in modo che non ci sia il problema del rappresentante scelto? In ogni caso, didatticamente può essere un utile esempio di distinzione tra frazioni e numeri razionali[8].
b) Il problema può essere espresso in questi termini: i numeri reali razionali possono non avere proprietà che i numeri razionali avevano? In sostanza, l'estensione ad R può far perdere delle proprietà ai numeri razionali?

La questione sollevata al punto b) verrà successivamente ripresa.

Come detto, le proprietà delle potenze razionali si dimostrano utilizzando le proprietà dei radicali e possono essere sintetizzate nel seguente

**TEOREMA 1**.
(i) Siano $p,q \in \mathrm{Q}$ e $a,b \in \mathrm{R}^+_0$ $(\mathrm{R}^+)$[9]. Valgono le seguenti proprietà:
*a)* $a^p \bullet a^q = a^{p+q}$
*b)* $a^p : a^q = a^{p-q}$
*c)* $(a \bullet b)^p = a^p \bullet b^p$
*d)* $(a^p)^q = a^{pq}$

---

[8] Un esempio di funzione in cui il ruolo del rappresentante scelto per i numeri razionali espressi sotto forma di frazione si ritrova a pag. 23 di (Gelbaum, Olmsted, 1964) e citata anche in (Bagni, 1994):
"Sia $f$ la funzione reale a variabile reale così definita:

$$f(x)=\begin{cases} n & \text{se } x \text{ è razionale, } x=m/n \text{ ridotta ai minimi termini e } n>0 \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale"} \end{cases}$$

L'autore (e Bagni) riporta questa funzione come esempio di funzione continua su tutti i numeri reali irrazionali e non continua sui numeri reali razionali, dopo aver sottolineato che è una funzione ben definita.
Si potrebbe invece osservare che in 0 non è ben definita, avendo 0 infinite immagini. Si dovrebbe quindi definirla in 0, ponendola ad esempio uguale a zero. Inoltre, anche se è una simbologia consolidata per indicare le funzioni definite a tratti, si potrebbe discutere dell'uso della parentesi graffa, utilizzata nei sistemi col significato di congiunzione, mentre nelle funzioni "a tratti" (sarebbe meglio dire, definite da più proposizioni) è utilizzata col significato di unione. Sarebbe opportuno che questo uso incongruente del simbolo "parentesi graffa" fosse rivisto (qualcuno usa una scrittura a linee, tipo y= $<$ ), ad esempio utilizzando un altro tipo di parentesi, come potrebbe essere la parentesi quadra.
[9] Il problema dello 0 si riferisce al segno dell'esponente. Nel seguito non si sottolineerà la questione quando il contesto non presenterà ambiguità. Inoltre utilizzeremo la notazione $\mathrm{R}^+_0$ per indicare, ad esempio, l'insieme $\mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

(ii) Siano $p,q\in Q$ espressi come frazioni con denominatore dispari ridotte ai minimi termini e $a,b\in R^+_0$ ($R^+$). Valgono le seguenti proprietà:

*a)* $(-a)^p\bullet(-a)^q = (-a)^{p+q}$
*b)* $(-a)^p:(-a)^q = (-a)^{p-q}$
*c)* $((-a)\bullet(-b))^p = (-a)^p\bullet(-b)^p$
*d)* $((-a)^p)^q = (-a)^{pq}$

**Dimostrazione**. Le proprietà di (i) discendono banalmente dalle proprietà dei radicali.
A titolo d'esempio dimostriamo invece la proprietà (ii).*a*:
siano $p = \frac{n}{m}$ e $q = \frac{r}{s}$ con $m$ ed $s$ dispari e le frazioni ridotte ai minimi termini, allora per la (4) della definizione 2:
$(-a)^p\bullet(-a)^q = (-1)^n\bullet(-1)^r\bullet a^p\bullet a^q = (-1)^n\bullet(-1)^r\bullet a^{p+q}$
a questo punto occorre procedere per casi su $n$ ed $r$:

- se sono entrambi pari, $(-1)^n\bullet(-1)^r = 1 = (-1)^{n+r}$, per cui $(-1)^n\bullet(-1)^r\bullet a^{p+q} = (-a)^{p+q}$, essendo il numeratore di $p+q$ (che, a meno di semplificazioni, è dato da $sn+mr$) pari;
- se sono uno pari e uno dispari $(-1)^n\bullet(-1)^r = -1=(-1)^{n+r}$, per cui $(-1)^n\bullet(-1)^r\bullet a^{p+q}$ =
- $(-a)^{p+q}$ essendo il numeratore di $p+q$ dispari;
- se sono entrambi dispari, $(-1)^n\bullet(-1)^r = 1 = (-1)^{n+r}$ per cui $(-1)^n\bullet(-1)^r\bullet a^{p+q} = (-a)^{p+q}$ essendo il numeratore di $p+q$ pari.

Per le funzioni le cose non sono così semplici, vista la presenza della variabile; in particolare la proprietà più delicata è la potenza di potenza. Esaminiamo al proposito i seguenti esempi:

$a)\, y = \left(x^2\right)^{\sqrt{2}} \qquad b)\, y = x^{2\sqrt{2}} \qquad c)\, y = \left(x^{\sqrt{2}}\right)^2$

In sostanza ci sono funzioni "potenze di potenze" che si possono semplificare (nel senso che si possono riportare ad un solo esponente), altre no. Vediamo di chiarire questo concetto con una definizione e un teorema:

**DEFINIZIONE 3**. Sia $y = f(x)$ una proposizione individuante una funzione[10] $f$ ottenuta come composizione di funzioni potenze, cioè del tipo $y = (((x)^r)^s)^k$ (essendo $r, s, k\in R$)
Diremo che $f$ è una **funzione potenza del primo tipo** se, applicando le proprietà delle potenze, la potenza è riducibile ad un solo esponente, del **secondo tipo** se è riducibile a due esponenti, ed in generale di tipo $i$ se, applicando le proprietà delle potenze, la potenza è riducibile a $i$ esponenti.

La domanda che a questo punto ci si pone è la seguente: dato un numero naturale $n$ qualunque, esiste sempre una funzione potenza del tipo $n$? Oppure, in alternativa, di quanti tipi possibili sono le funzioni potenze?
Il seguente lemma ed il successivo teorema risponderanno alle domande precedenti.

[10] Nel seguito, utilizzando un modo di esprimersi diffuso, capiterà di scrivere "la funzione da .. a … $y = f(x)$" (o anche "la funzione $f$ individuata da $y = f(x)$") in luogo della forma più appropriata "la funzione da… a… individuata da (o dalla proposizione) $y = f(x)$". Inoltre con Codominio (di una relazione) si intenderà il secondo insieme del prodotto cartesiano.

**LEMMA 1**. Siano $f$ e $g$ due funzioni tali che $D_f = D_g =$ R individuate da $y = x^{\alpha}$ e $y = x^{\beta}$. Allora $\forall x \in$ R$((x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta})$ cioè la funzione composta individuata da $y=(x^{\alpha})^{\beta}$ è del primo tipo.
**Dimostrazione**. Dalle ipotesi si deduce che $\alpha$ e $\beta$ sono frazioni con denominatore dispari (eventualmente uguale a 1) ridotte ai minimi termini. La tesi è quindi una banale conseguenza del Teorema 1.

**TEOREMA 2**. Sia $f$ una funzione ottenuta come composizione di funzioni potenze. La funzione $f$ individuata da $y = f(x)$ è riducibile ad una funzione potenza del primo o del secondo tipo.
**Dimostrazione**. Per induzione sul numero di componenti della funzione $f$.
Il teorema diventa ovviamente significativo se la funzione $f$ ha almeno tre componenti, per cui $n = 3$ costituirà la nostra base induttiva. Sia quindi $f(x) = k(h(g(x)))$, essendo $g(x) = x^{\alpha}$, $h(x) = x^{\beta}$, $k(x) = x^{\gamma}$ con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ numeri reali (se razionali, espressi come frazioni ridotte ai minimi termini). Dividiamo in tre punti la dimostrazione della base induttiva $n = 3$:
(i) Se il dominio di $g$ è $R^+_0$ ($R^+$) allora la funzione $y = h(g(x))$ è riducibile ad una funzione del primo tipo per il Teorema 1 (i).d
(ii) Se il dominio di $g$ è R (R-{0}) allora $\alpha$ è una frazione con denominatore dispari. Consideriamo ora la funzione $h(x) = x^{\beta}$, seconda funzione componente. Si possono presentare le seguenti situazioni (per lo 0 vale quanto espresso nella nota 9):

a) $C_g =$ R e $D_h =$ R
b) $C_g =$ R e $D_h = R^+_0$
c) $C_g = R^+_0$ e $D_h =$ R
d) $C_g = R^+_0$ e $D_h = R^+_0$

Esaminiamo i vari casi:

a) la funzione individuata da $y = (x^{\alpha})^{\beta}$ è uguale a $y = x^{\alpha\beta}$ cioè è del **primo tipo** (vedi lemma 1)
b) In questo caso va rivisto il dominio della funzione $g$. Se la funzione potenza ha sia come dominio che come codominio R, mantiene il segno e, dovendo essere $x^{\alpha} \geq 0$, deve essere $x \geq 0$, per cui applicando le proprietà delle potenze (base positiva) si ottiene una funzione del **primo tipo** con codominio $R^+_0$. Esempi di funzioni siffatte sono individuati da

$$y = \left(x^{3}\right)^{\sqrt{2}} \qquad y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad y = \left(x^{-3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

c) In questo caso $\alpha$ è una frazione ridotta ai minimi termini con numeratore pari, mentre $\beta$ è una frazione ridotta ai minimi termini con denominatore dispari. Il loro prodotto è una frazione con denominatore dispari (eventualmente uguale a 1) e con numeratore pari. Questo determina una funzione di dominio R (R-{0}) e codominio $R^+_0$ ($R^+$), analogamente alla funzione $y = (x^{\alpha})^{\beta}$ che quindi risulta una funzione del **primo tipo** con codominio $R^+_0$ ($R^+$). Esempi di funzioni di questo tipo sono individuati da:

$$y = \left( x^{\frac{2}{3}} \right)^{-2} \qquad y = \left( x^{-4} \right)^{\frac{5}{7}}$$

d) In questo caso, potendo $x$ assumere anche valori negativi, non è possibile applicare le proprietà delle potenze in quanto $\beta$ non è un numero razionale (espresso come frazione ridotta ai minimi termini) con denominatore dispari. Si ottiene così una funzione del **secondo tipo** con codominio $R^+_0$. Esempi di funzioni di questo tipo sono individuati da:

$$y = \left(x^2\right)^{\sqrt{3}} \qquad y = \left( x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad y = \left( x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}$$

(iii) Consideriamo ora la funzione individuata da $k(x) = x^\gamma$ e sia $f(x) = k(h(g(x)))$. Da quanto emerso in precedenza si può dedurre che, qualunque sia $\gamma$, nei casi (b) e (c) si ottiene sempre una funzione del primo tipo; nel caso (d) si ottiene la funzione del secondo tipo individuata da $y = (x^\alpha)^{\beta\gamma}$, essendo l'argomento di $y = x^\beta$ positivo; infine nel caso (a) ci si riporta ad uno dei casi precedenti, osservando che l'unico caso che porta ad una funzione del secondo tipo si ha quando la funzione interna ha come dominio R e come insieme delle immagini $R^+$ ($R^+_0$) e la funzione esterna ha come dominio $R^+$ ($R^+_0$).
(iv) Supponiamo ora che il teorema valga per una funzione ottenuta come composizione di $n$ ($n > 3$) funzioni potenze (ipotesi induttiva). Dimostriamo che anche una funzione ottenuta come composizione di $n+1$ funzioni potenze è del primo o del secondo tipo.
Sia $f(x) = (j(x))^\delta$ essendo $j$, individuata da $y=j(x)$, una funzione ottenuta come composizione di $n$ funzioni potenze. Per ipotesi induttiva è del primo o secondo tipo. Vale allora quanto espresso al punto (iii) precedente, per cui il teorema risulta dimostrato anche per $n+1$.

Si osservi che il teorema precedente stabilisce, in sostanza, la non commutatività della moltiplicazione tra esponenti per funzioni del secondo tipo.

Conseguenza notevole: per determinare la derivata di una funzione potenza del secondo tipo occorre il teorema di derivazione della funzioni composte e il termine che ne fornisce la proposizione non è ulteriormente semplificabile.

## 4. PROPOSTA PER UNA DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE

Se si vuole quindi fornire una regola di derivazione per la funzione potenza non si può non tener conto delle considerazioni precedenti a proposito del dominio e della scrittura stessa delle funzioni.
Detto questo, l'approccio che suggerisco per la determinazione della derivata della funzione potenza, si articola secondo il seguente percorso:
a) derivata della funzione potenza con esponenti naturali;

b) derivata della funzione potenza con esponenti interi;
c) derivata della funzione potenza con esponenti del tipo $1/n$, con $n\in$ N;
d) derivata della funzione potenza con esponenti razionali espressi come frazioni ridotte ai minimi termini
e) derivata della funzione potenza con esponenti reali irrazionali.

Partiamo col punto a)[11].

**LEMMA 2**. La derivata della funzione da R in R individuata da $y = x^n$ con $n\in$ N è $y = nx^{n-1}$.
**Dimostrazione**. Per induzione su $n$.
Sia $n = 1$. Allora la funzione diventa $y = x$ la cui derivata è $y' = 1 = 1\bullet x^{1-1}$.
Supponiamo che la derivata di $y = x^n$ sia $y' = n\bullet x^{n-1}$ (ipotesi induttiva); dimostriamo che la derivata di
$y = x^{n+1}$ è $y' = (n+1)\bullet x^n$. Infatti
$(x^{n+1})' = (x\bullet x^n)' = x'\bullet x^n+x\bullet(x^n)' = 1\bullet x^n+x\bullet(n\bullet x^{n-1}) = x^n+n\bullet x^n = (n+1)\bullet x^n$

**LEMMA 3**. La derivata della funzione da R in R ($R_0$) individuata da $y = x^n$ con $n\in$ Z è $y = nx^{n-1}$
**Dimostrazione**. Se $n\in Z^+$, è sufficiente riferirsi all'immersione canonica di N in Z. Se $n\in Z^-$, basta considerare la derivata della funzione reciproca:
$(x^n)' = (1/x^{-n})' = (n\bullet x^{-n-1}/x^{-2n}) = n\bullet x^{n-1}$.

**LEMMA 4**. Sia $n\in$ N. La derivata della funzione individuata da $y = x^{1/n}$ nel suo dominio è $y' = (1/n)x^{(1-n)/n}$
**Dimostrazione**. Basta applicare il teorema di derivazione delle funzioni inverse; poiché $y = x^{1/n}$ è la funzione inversa di $x = y^n$ (definita in $R^+$ se $n$ è pari, in $R_0$ se $n$ è dispari), si ha

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{\left(y^n\right)'} = \frac{1}{n\bullet y^{n-1}} = \frac{1}{n\bullet x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$$

**LEMMA 5.** Sia $m/n$ una frazione ridotta ai minimi termini con $n > 0$; allora la derivata della funzione individuata da $y = x^{m/n}$ nel suo dominio è $y' = (m/n)\bullet x^{(m-n)/n}$.
**Dimostrazione**. Il fatto che per ipotesi la frazione sia ridotta ai minimi termini, permette di vedere la funzione come composizione delle funzioni $y = x^m$ e $y = x^{1/n}$ con $m\in$ Z e $n\in Z^+$. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte e per i lemmi 3 e 4 si ha

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = m\bullet x^{m-1}\bullet\frac{1}{n}\left(x^m\right)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$$

Non è superfluo osservare che nell'ultima uguaglianza è possibile applicare le proprietà delle potenze per il Teorema 1, qualunque sia il segno del valore assunto da $x$.

[11] Nel seguito si suppone di aver già dimostrato la regola di derivazione del prodotto di funzioni derivabili, della funzione inversa, della funzione composta e di sapere che la derivata di $y=x$ è $y'=1$.

**LEMMA 6**. Sia $\alpha$ un numero reale irrazionale. La derivata della funzione individuata da $y = x^{\alpha}$ in $R^{+}_{0}$ ($R^{+}$) è $y' = \alpha \bullet x^{\alpha-1}$.
**Dimostrazione**. È la classica dimostrazione, rintracciabile su pressoché tutti i libri di testo, che utilizza la funzione logaritmo come inversa della funzione esponenziale:

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\ln x^{\alpha}} \bullet \alpha \bullet \frac{1}{x} = \alpha \bullet \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha \bullet x^{\alpha-1}$$

Tale dimostrazione, com'è noto, utilizza pesantemente in fatto che $x$ assuma solo valori positivi. Come detto, in genere i testi, pur dimostrandola con $x > 0$, la utilizzano anche per funzioni definite per valori negativi.
Una dimostrazione analoga può essere fatta anche se $x$ potesse assumere valori negativi. In questo caso $\alpha$ dovrebbe essere un numero razionale (ma non solo!). Il procedimento non è dissimile da quello seguito in precedenza ed invito il lettore a cimentarsi.

I lemmi precedenti permettono infine di ottenere i risultati sintetizzati nel seguente

**TEOREMA 3** (regola di derivazione della funzione potenza).
La funzione individuata da $y = x^{\alpha}$ con $\alpha \in R$ ed espresso, se razionale, in frazione ridotta ai minimi termini, è derivabile nel suo dominio, escluso al più in zero, e la sua derivata è $y' = \alpha \bullet x^{\alpha-1}$.

**COROLLARIO.** Siano $f$ e $g$ due funzioni individuate da $y = f(x)$ e $g(x) = x^{\alpha}$ (con $\alpha \in R$ ed espresso, se razionale, in frazione ridotta ai minimi termini) derivabili nel loro dominio (escludendo al più lo zero per la funzione $g$). Allora la funzione $y = [f(x)]^{\alpha}$ è derivabile nel suo dominio (escluso al più $x_o$ tale che $f(x_o) = 0$) e $y' = f'(x) \bullet \alpha \bullet [f(x)]^{\alpha-1}$
La dimostrazione è una banale conseguenza del teorema di derivazione delle funzioni composte e del Teorema 3.

Un'importante applicazione del corollario precedente si ha per le funzioni potenze del secondo tipo. Infatti il Teorema 3 vale per funzioni potenze del primo tipo o riducibili a tali. Non vale invece per funzioni potenze del secondo tipo che devono essere viste come funzioni composte. Per tali funzioni vale il seguente

**TEOREMA 4**. Sia f una funzione potenza del secondo tipo individuata da $y = (x^{\alpha})^{\beta}$. La funzione è derivabile in R (escluso al più lo zero) e la sua derivata è

$$y' = \alpha \bullet x^{\alpha-1} \bullet \beta \bullet (x^{\alpha})^{\beta-1} \qquad \text{cioè} \qquad y' = \alpha \bullet \beta \bullet x^{\alpha-1} \bullet (x^{\alpha})^{\beta-1}.$$

La dimostrazione è una conseguenza del corollario precedente.

A proposito del teorema precedente è interessante osservare come il termine ottenuto non sia semplificabile e come (a meno dello zero) non venga modificato il dominio della funzione.
Come si è detto all'inizio del presente lavoro, un metodo interessante e apparentemente più semplice per dimostrare il Teorema 3 è quello fornito in (Zwirner, 1998) a pag. 150. Eccolo riportato di seguito:
" Se $\alpha \in R$, si ha: $D(x^{\alpha}) = \alpha \bullet x^{\alpha-1}$.
Infatti

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}\overset{(1)}{=}x^{\alpha}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{h} \qquad (*)$$

Da cui ponendo $t=h/x$ e ricordando il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{kx}=1$$

si ha

$$Dx^{\alpha}=\lim_{t\to 0}x^{\alpha}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{tx}\overset{(2)}{=}\lim_{t\to 0}x^{\alpha-1}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\alpha\bullet x^{\alpha-1}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{\alpha\bullet t}=\alpha\bullet x^{\alpha-1} \qquad (**)\text{''}$$

Le uguaglianze “incriminate” sono la (1) (nella (*)) e la (2) (nella (**)). Infatti in (1) è applicata la proprietà della potenza di una moltiplicazione, proprietà che vale, salvo diversa precisazione che l’autore non fa, solo se i fattori sono positivi (e $x$ potrebbe non esserlo). Stesso problema nella (2).

La dimostrazione è la stessa proposta anche in (Richard, 1980) il quale comunque distingue i casi $x > 0$ e $x < 0$.

Personalmente ritengo che il metodo "per approcci successivi" distinguendo gli insiemi numerici in cui varia l'esponente, sia più opportuno per

a) mostrare varie tecniche (via via più raffinate) di dimostrazione.
   Quando si introducono le “regole” di derivazione, l’aspetto pratico tende a prevalere su quello concettuale. Si è portati quindi a trascurare la dimostrazione ritenendola poco significativa rispetto agli aspetti più propriamente tecnici. La regola di derivazione della funzione potenza può risultare un buon esempio di utilizzo di “tecniche” di dimostrazione, mostrando come queste possano variare in relazione agli insiemi numerici coinvolti, fornendo così un ulteriore mezzo per conoscere meglio la struttura di tali insiemi;
b) per avere subito alcuni strumenti per il calcolo di derivate anche con teoremi semplici;
c) per far sentire ogni passo in successivi insiemi numerici come una generalizzazione del precedente.
   Questo aspetto può essere collegato ai presupposti che giustificano gli ampliamenti numerici. Se la motivazione didattica alla base di tali ampliamenti è riconducibile all’esigenza di trovare in altri “ambiti” risposte (a problemi specifici) che non si avevano nell’insieme fino ad allora considerato, queste diverse tipologie di dimostrazione possono servire per rafforzare, anche rispetto ad un argomento come quello della funzione potenza, l’aumento progressivo di generalizzazione e di “possibilità”.

## 5. PRIME CONCLUSIONI

Come spesso succede, nella pratica scolastica difficilmente si ha così tanto tempo da dedicare ad un aspetto del calcolo differenziale apparentemente banale come è il calcolo della derivata della funzione potenza. Al solito, però, ritengo sia il caso venga posto il problema, portando ad esempio le funzioni citate in precedenza, anche perché risultano una buona occasione per riprendere le proprietà delle potenze e dei radicali, proprietà che

spesso, per eccesso di confidenza, vengono impropriamente applicate. Come visto, poi, questo argomento è trattato in modo tutt'altro che esauriente anche dai libri di testo i quali, nella maggior parte dei casi, applicano regole in contesti diversi da quelli in cui erano state trovate, con comprensibile disorientamento da parte di un lettore attento.
Inoltre, come detto, il problema legato alle potenze razionali può essere un utile esempio per mostrare un caso in cui tra numeri razionali e le frazioni che li rappresentano possano esserci sostanziali differenze.
Si è parlato spesso di scelte didattiche e di considerazioni legate ai costi/benefici: credo che da questo punto di vista l'argomento costituisca una buona occasione per coinvolgere gli studenti nelle scelte fatte, rendendoli consapevoli delle ripercussioni che tali scelte avranno. A questo proposito è anche interessante sottolineare come le potenze ad esponente razionale vengano introdotte generalmente al secondo o terzo anno delle superiori, mentre gli aspetti ad esse connesse legati all'analisi si affrontano generalmente in quinta superiore; l'argomento pertanto si può prestare ad una riflessione sul ruolo di una programmazione (non necessariamente fatta dallo stesso insegnante, se l'argomento viene trattato prima al biennio) "a lungo" che tenga conto anche delle esigenze che si possono presentare successivamente.

## A. UN PARTICOLARE ESEMPIO DI FUNZIONE: $y = x^x$

Le considerazioni che si faranno sono strettamente legate alle scelte che sono state fatte nella prima parte, ma possono essere viste come un'ulteriore riflessione sui concetti di fondo che stanno alla base del lavoro: il concetto di funzione e il concetto di dominio di una funzione.

## B. IL PROBLEMA

Qual è il dominio della funzione individuata da $y = x^x$?
Sul concetto di dominio di una funzione si dovrebbe discutere, anche in base a quanto detto in precedenza; in effetti parlare di dominio di una funzione fa assumere alla legge un ruolo predominante nel concetto di funzione stessa (in sostanza allontana dal concetto di funzione come terna: il dominio "viene dopo" e non prima, come avviene se si parte dal prodotto cartesiano). Più correttamente si dovrebbe dire qual è il più grande sottoinsieme A di R per cui (A,R,f) costituiscano una funzione? Formalmente A sarebbe espresso da

$$\forall a(a\in \mathrm{A} \rightarrow \exists! b(b\in \mathrm{R} \wedge f(a) = b)) \wedge \forall x(x\in \mathrm{R} \wedge \exists! b(b\in \mathrm{R} \wedge f(x) = b) \rightarrow x\in \mathrm{A})$$

e potremmo chiamarlo "insieme naturale di definizione".
Tutti i libri delle superiori[12] e universitari (tranne in (Ghizzetti, 1971)) da me consultati a proposito del dominio di questa funzione indicano come risposta $\mathrm{R}^+$, in quanto impongono per funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$ la base strettamente positiva[13], senza porre nessuna precisazione sull'opportunità di tale scelta (come viene fatto in (Ghiz-

[12] Soprattutto testi per i corsi tradizionali e sperimentali del Liceo Scientifico, alcuni dei quali sono riportati in Bibliografia.
[13] A rigore gli eventuali valori che annullano la base dovrebbero essere accettati se fanno parte dell'insieme dei valori che rendono strettamente positivo l'esponente.

zetti, 1971)[14], pag. 39). Spesso anzi il problema del dominio della funzione non viene neppure posto e viene ripreso a margine per applicazioni come il calcolo della derivata di $y = [f(x)]^{g(x)}$ oppure lo studio di $y = (1+{}^{1}/_{x})^{x}$. È come se questo tipo di funzione fosse "scomparsa" per le questioni riguardanti il dominio dai libri di analisi.
Questa condizione è corretta?
In base a quanto detto nel paragrafo 2 sembra di no: ad esempio $(-3)^{-3}$ esiste per l'estensione ai numeri reali razionali delle definizioni date per i numeri razionali.
L'obiezione a questa posizione è che –3 dovrebbe essere pensato come numero reale, non come numero intero. Questo tipo di obiezione si riallaccia a quanto visto al punto b) dei COSTI del paragrafo 3. Nella prassi matematica è però normale considerare ambiti numerici diversi in cui muoversi utilizzando le immersioni (isomorfe) per trovare i risultati richiesti. Può essere opportuno citare (Richard, 1980):

> "1.543. Le regole di calcolo dei radicali valgono per basi positive; quando si esca da tale campo, esse non possono essere applicate senza controllo. Si veda l'esempio seguente: per $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $(x^2)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x^{2x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
> per $x = -\frac{1}{2}$ si ha $(x^2)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mentre $x^{2x^2}$ non esiste "

Nei calcoli proposti si è passati, quando è stato necessario, da un ambito numerico ad un altro. Questo comportamento, piuttosto discutibile, è strettamente legato al problema relativo all'ambito numerico in cui si opera per ottenere il risultato, se cioè tale ambito deve dipendere o meno dalla natura del risultato stesso. In senso più generale (e per noi più interessante) ambito numerico e risultato si ricollegano alle questioni più delicate del concetto di funzione: se la funzione è vista come oggetto, esistono solo le coppie (elemento e sua immagine); se è vista anche nel processo di costruzione, è coinvolto anche l'ambiente in cui si sviluppa tale processo (per considerazioni relative a questo problema si vedano i già citati (Bagni, 1997) e (Marchini, 1998)).
Come esempio più vicino alla prassi didattica, consideriamo la seguente equazione in N:

$$12x^2-1936x-4329=0$$

I coefficienti coinvolti (che non sono tra i peggiori) scoraggiano qualunque tentativo di utilizzo del teorema di Ruffini (e del criterio per l'individuazione delle radici razionali di un polinomio a coefficienti interi). Quindi si utilizza la formula risolutiva, che opera in R, per cui ha senso chiedersi se i coefficienti e i relativi risultati sono da vedere in R o in N.[15]

[14] "…In alcuni casi l'insieme E (*l'autore con E indica l'insieme di esistenza di una funzione*) così determinato può risultare troppo complicato, per le troppe precisazioni necessarie. Allora si conviene di definire la funzione mediante una *opportuna restrizione* ad un insieme $G \subset E$. Ad esempio la *formula* $x^x$ ha senso $\forall x > 0$, ma può averlo anche per $x < 0$ purché $x$ sia razionale $x = m/n$, con $m$ e $n>0$ *primi tra loro* ed $n$ dispari. Per convenzione **la funzione** $y = x^x$ viene definita solo in $(0, +\infty)$, che è una opportuna restrizione dell'insieme ove ha senso la formula $x^x$. Cioè in sostanza *si vuole operare per x reale*, senza dover precisare di volta in volta se è razionale o meno."
Quello che ci si potrebbe chiedere è "cosa teme" l'autore quando parla di opportunità di restrizioni…
[15] Un problema analogo si presenta nel caso in cui si risolva un'equazione di terzo grado utilizzando le formule di Cardano. È noto infatti che, anche nel caso in cui le soluzioni siano tutte e tre reali occorre passare dall'insieme dei numeri complessi.

In un certo senso la stessa cosa vale per $(-3)^{-3}$: tale valore si può "guardare" rispetto all'ambiente in cui si conosce il risultato, risultato da estendere poi in R, pensando a –3 come numero reale (razionale). Rispetto a queste considerazioni, se si considerano i numeri razionali negativi esprimibili con frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno denominatore dispari, questi appartengono al dominio della funzione individuata da $y = x^x$.

Sia infatti $q = -\frac{n}{m}$ un numero siffatto ($n$ ed $m$ interi positivi, $m$ dispari); allora $(-n/m)^{-n/m} = \sqrt[m]{(-m/n)^n}$ , valore che sarà positivo o negativo a seconda del fatto che $n$ sia pari o dispari.

D'ora in poi indicherò con $Q^-_d$ l'insieme dei numeri (reali) razionali negativi esprimibili con frazioni ridotte ai minimi termini il cui denominatore è dispari. È solo il caso di osservare che $Q^-_d$ contiene anche l'insieme dei numeri razionali isomorfo (rispetto alle operazioni aritmetiche e alla relazione d'ordine indotta da <) all'insieme dei numeri interi negativi.

Il dominio $D_f$ per la funzione individuata da $y = x^x$ è quindi uguale a $R^+ \cup Q^-_d$. Perché allora l'insieme $Q^-_d$ non è mai considerato? I motivi sono di varia natura, riconducibili ai seguenti presupposti:

a) la difficoltà e l'ambiguità (come si è visto) nei confronti delle potenze razionali;
b) tutti i calcoli notevoli che vengono fatti su questa funzione (limiti e derivate soprattutto) utilizzano pesantemente la funzione logaritmo di cui la base della funzione ne diventa l'argomento;
c) di una funzione reale a variabile reale interessa soprattutto il grafico e quindi "che si comporti bene" (o abbastanza bene) dal punto di vista della continuità e della derivabilità (si veda la nota 3).

Per trattare gli aspetti teorici della questione (soprattutto in riferimento al punto c) ci chiediamo:

a) Che tipo di punti sono gli elementi di $Q^-_d$ per la funzione?
b) Qual è l'insieme dei punti di accumulazione[16] del dominio $D_f$?

## C. I TENTATIVI DI RISPOSTA

Prima di cercare una risposta a queste domande, dimostriamo un teorema che ci risulterà molto utile nel seguito:

**TEOREMA 5**. L'insieme $Q^-_d$ è denso in $R^-$.

**Dimostrazione.**

Sia $r \in R^-$ e sia $I = (r-a, r+a)$ un suo intorno[17] ($a \in R^+$). Si tratta di dimostrare che $I \cap Q^-_d \neq \varnothing$.

Consideriamo $A_r = \{x / x \in Q^-_d , x \leq r\}$. Per la proprietà archimedea dei numeri reali $A_r$ non è vuoto; infatti considerati $-r$ e 1 esiste un numero naturale $n$ tale che $n \bullet 1 > -r$, da cui $-n < r$ .

---

[16] Insieme derivato di $D_f$ che indicheremo con $D(D_f)$

[17] Nei teoremi che seguono, utilizzeremo intorni aperti della base canonica.

Essendo $A_r$ un insieme di numeri reali limitato (da $r$), ammette estremo superiore finito. Poniamo $\sup A_r = b$.
Se $b \in I$ la tesi è banalmente dimostrata dalla seconda proprietà dell'estremo superiore[18] poiché esiste $x \in Q^-_d$ tale che $x > r-a$ per cui $x \in I$. Sia quindi $b \notin I$ (ovviamente $b < r-a$) e sia $k = r-b$ ($k$ è positivo essendo $r > b$). Consideriamo la successione $s = \{1/3^n\}_{n\in N}$. Poiché inf s=0, sia $m$ il più piccolo naturale tale che $1/3^m < r-b$. Per la proprietà (ii) dell'estremo superiore (vedi nota 18), esiste un $x \in A_r$ tale che $x > b-1/3^m$ da cui $x+1/3^m > b$. Quindi il valore $\alpha = x+1/3^m$ non appartiene ad $A_r$, pur essendo un elemento di $Q^-_d$ (infatti il suo denominatore è dispari in quanto, tutt'al più, prodotto di numeri dispari) minore di $r$ poiché, essendo $x \le b$, $x+1/3^m \le b+1/3^m < r$.
Questo porta ad un assurdo, per cui questo secondo caso non è possibile.
Per la generalità di $a$ il teorema è dimostrato.

Questo teorema risponde alla seconda domanda che ci siamo posti: $D(D_f) = R$
Il teorema precedente esclude pure che i valori di $Q^-_d$ individuino punti isolati. Sia infatti $q \in Q^-_d$ e sia $(q-a,q+a)$ un suo intorno ($a \in R^+$). Per la densità di Q in R, esiste un numero reale $r \in (q-a,q+a)$. Posto $m = \min(r-(q-a),(q+a)-r)$, in $(r-m,r+m)$ cadono punti di $Q^-_d$ ed essendo tale intervallo contenuto in $(q-a,q+a)$ si ottiene l'asserto.

Si tratta di vedere, a questo punto, se in tali valori la funzione è continua.
Riportiamo, nella formalizzazione di Weierstrass, le condizioni di continuità e di non continuità (cioè la negazione della precedente) che scriveremo, anziché in modo tradizionale, in una forma logicamente più appropriata:

$$\forall \varepsilon(\varepsilon \in R^+ \rightarrow \exists I(I \in F_{xo} \wedge \forall x(x \in (I-\{x_o\}) \rightarrow |f(x)-f(x_o)| < \varepsilon))) \qquad (a)$$

$$\exists \varepsilon(\varepsilon \in R^+ \wedge \forall I(I \in F_{xo} \rightarrow \exists x(x \in (I-\{x_o\}) \wedge |f(x)-f(x_o)| \ge \varepsilon))) \qquad (b)$$

avendo indicato con $F_{xo}$ la famiglia di intorni di $x_o$.
I seguenti teoremi permettono di dare finalmente una risposta:

**TEOREMA 6**. Sia $q \in Q^-_d$.
a) Se il numeratore di $q$ è dispari, in ogni suo intorno si trovano elementi di $Q^-_d$ con numeratore pari.
b) Se il numeratore di $q$ è pari, in ogni suo intorno si trovano elementi di $Q^-_d$ con numeratore dispari.
**Dimostrazione.**
È analoga alla dimostrazione del teorema 5 e la faremo relativamente al punto a).
Sia $q \in Q^-_d$ con numeratore dispari e sia $A_q = \{x/x \in Q^-_d, x \text{ ha numeratore pari e } x < q\}$. $A_q$ non è vuoto, poiché posto $q = -\frac{n}{m}$, il numero razionale $q' = -\frac{n+1}{m}$ appartiene ad $A_q$[4]. Po-

18 Ricordiamo che, indicato con $a$ l'estremo superiore di un insieme di numeri reali A, $a$ gode delle seguenti proprietà:

$(i) \qquad \forall x(x \in A \rightarrow x \le a)$

$(ii) \qquad \forall a'(a' < a \rightarrow \exists x(x \in A \wedge a' < x))$

[4] È opportuno osservare che $q'$ potrebbe non essere ridotto ai minimi termini. Se così non fosse, numeratore e denominatore potrebbero essere semplificati per un fattore dispari e, dopo tale semplificazione $q'$ sarebbe comunque un elemento di $Q^-_d$ minore di $q$.

niamo $b = \sup A_q$. Sia $I = (q-a,q+a)$ un intorno di $q$, essendo $a\in R^+$. Si possono presentare due casi:

1) $b\in I$;
2) $b\notin I$

Nel caso (1), per la proprietà (ii) dell'estremo superiore (vedi nota 18) esiste $x\in A_q$ tale che $q-a < x \leq b$, da cui la tesi.
Supponiamo che $b\notin I$. Poniamo $k = q-b$. Consideriamo la successione $s = \{2/3^n\}_{n\in N}$. Poiché inf s = 0, sia $m$ il più piccolo naturale tale che $\frac{2}{3^m} < q-b$. Per la proprietà dell'estremo superiore, esiste un $x\in A_q$ tale che $x > b-\frac{2}{3^m}$. Consideriamo il valore $c = x+\frac{2}{3^m}$ ; $c$ è un elemento di $Q^-_d$ con numeratore pari (in quanto somma di due frazioni con denominatori dispari e numeratori pari); inoltre è minore di $q$, ma maggiore di $b$, contro la definizione di estremo superiore. Questo secondo caso non si può dunque presentare. Per la generalità di $a$ il teorema è dimostrato.
La dimostrazione del punto b) del teorema è del tutto analoga.

Il teorema precedente ci permette finalmente di dimostrare il seguente

**TEOREMA 7**.
La funzione di dominio $R^+\cup Q^-_d$ individuata da $y = x^x$ non è continua nei punti di $Q^-_d$.
**Dimostrazione.**
Sia $q\in Q^-_d$ e supponiamo abbia numeratore dispari; poniamo $\varepsilon = \frac{|q^q|}{2}$. Per il Teorema 6, comunque si prenda un intorno di $q$, esiste in tale intorno un elemento $p$ di $Q^-_d$ con numeratore pari; poiché $p^p$ è positivo, mentre $q^q$ è negativo, $|p^p-q^q| = |p^p|+|q^q| > \frac{|q^q|}{2} = \varepsilon$. La funzione non è quindi continua in $q$.
Dimostrazione analoga si avrebbe nel caso in cui $q$ avesse numeratore pari.

Dal Teorema 7, oltre alla non continuità della funzione $y = x^x$ nei punti di $Q^-_d$, si deduce la non esistenza del limite quando $x$ tende ad un numero reale negativo.

Al di là dei problemi legati al dominio, quello proposto può essere un esempio da portare in classe per mostrare funzioni con infiniti punti di discontinuità, senza ricorrere sempre alla funzione di Dirichlet.

## D. CONCLUSIONE

Ciò che si è proposto non vuole configurarsi come un percorso didattico (il tipo di argomento non permette di dedicarvi così tanto tempo), quanto piuttosto un invito alla riflessione su questioni quali dominio di una funzione e scelte didattiche. In particolare non sempre è sufficientemente chiarito, in contesto didattico, qual è l'ambito in cui si ritiene legittimo muoversi non tanto per l'esistenza dell'immagine, quanto per la determinazione dell'immagine. Se infatti uno degli obiettivi è quello di far acquisire agli studenti il

concetto di funzione passando dal processo all'oggetto (si veda (Bagni,2002)) secondo un obiettivo di reificazione (Sfard, 1991) (Sfard, 1992) (Tall,1981), ciò che spesso non è esplicitato è in quali condizioni è possibile effettuare tale processo.
A titolo di esempio citiamo un esercizio, largamente presente al biennio, in cui si chiede, ad esempio, se la relazione da N in N definita da $y = \frac{x+1}{3}$ è una funzione e magari, in caso contrario, stabilirne l'insieme di definizione (su cui eventualmente restringere il dominio della relazione affinché sia una funzione).
In questo esempio è evidente come l'ambiente di calcolo sia Q, anche se il risultato (e quindi l'immagine) deve essere riportato in N. Inoltre sembra che la distinzione tra ambito "del processo" e ambito "dell'oggetto" (gli elementi della relazione sono coppie di numeri naturali) non disturbi. Perché allora questo succede per funzioni reali a variabile reale? Perché anche i programmi che stanno alla base degli strumenti per la rappresentazione dei grafici di funzione (calcolatrici grafiche o software specifici) non si muovono all'unisono?
La seconda riflessione proposta è relativa al concetto di funzione e alle relative scelte didattiche.
Come ricordato in (Maffini, 2001), non tutti i matematici hanno la stessa idea di funzione; o meglio, le specifiche finalità (del logico, del geometra, dell'analista, ecc.) portano a privilegiare proprietà specifiche e a richiedere specifiche condizioni. Per un analista, per esempio, sono importanti proprietà quali la continuità e (probabilmente) la derivabilità, per cui chiedersi in quale insieme è definita la relazione individuata da $y = x^x$ può essere scarsamente significativo se sugli eventuali numeri reali negativi in cui la relazione potrebbe essere definita la corrispondente funzione non è continua (e quindi non è rappresentabile).
Il tipo di percorso proposto in questo lavoro, oltre agli aspetti evidenziati, può quindi favorire una riflessione più generale su un concetto come quello di funzione quanto mai importante, ma altrettanto complesso.

**BIBLIOGRAFIA**

I testi delle superiori consultati sono riportati nella tabella allegata.
Acerbi E., Buttazzo G: 1997, *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora
Adams R.A.: 1992, *Calcolo differenziale 1*, C.E. Ambrosiana
Apostol T.M.: 1969, *Calcolo. Vol. 1°;* Analisi, Boringhieri
Bagni G.T.: 1997, 'Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore', *La matematica e la sua didattica*, 3
Bagni G.T.: 2002, Considerazioni che riguardano l'intervento di conoscenze del III ordine nelle fasi di generalizzazione dell'apprendimento del concetto di funzione, Atti dei Seminari da Sfida-17 a Sfida 20, vol. V 2001-2003 a cura di L. Bazzini
Barozzi G.: 1989, *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli
Gelbaum B. R:, Olmsted J. M. H.: 1964, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day
Geymonat G:1981, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Ed. Leprotto & Bella
Ghizzetti A.: 1971, *Lezioni di Analisi Matematica*, Virgilio Veschi,

Ghizzetti A., Rosati F.: 1980, *Lezioni di Analisi Matematica vol. I*, Veschi
Gilardi G.: 1991, *Analisi Uno*, McGraw Hill
Giusti E.: 1985, *Analisi Matematica 1,* Bollati Boringhieri
Lamberti L., Mereu L., Nanni A.: 1996, *MATEMATICA 3*, Etas
Maffini A.: 2001 'Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore', Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)", Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000
Marchini C.: 1998, 'Analisi "logica" della funzione', Gallo E., Giacardi L., Roero C. S. (Eds) *Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis* 1997/98, pag.137-153
Michelotti Venè M. (a cura di): 1998, *MATEMATICA* (per la classe quarta), Sansoni
Picone M., Fichera G.: 1972, *Corso di Analisi Matematica 1*, Veschi
Richard U.: 1980, *Lezioni di Analisi Matematica*, CEDAM
Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as differents sides of the same coin', Educational Studies in Mathematics, 22, n. 1, 1-36.
Sfard, A.: 1992, 'Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 59-84.
Vinti C.:1986, *Lezioni di Analisi Matematica*, Galeno
Tall, D., Vinner, S.: 1981, 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
Zwirner G., Scaglianti L: 1998, *Analisi infinitesimale*, Cedam.

TABELLA 1

| TITOLO ED AUTORE | DEF. POTENZA | REGOLA DER. | ESEMPIO | NOTE (se ne riporteranno solo per alcuni testi) |
|---|---|---|---|---|
| Speranza F., Rossi dell'Acqua A.: 1974, *Matematica 5* – Zanichelli | Pag. 229 vol.3 e 73 vol.4 (per potenze razionali, nulla viene detto sui termini della frazione) | Pag. 233 | Pag. 239 | |
| Maraschini W., Palma M.: 1996, *ForMat, SCI* - Paravia | Pag. 378 vol. 1 Vengono distinti i casi in cui vale la potenza a esponente razionale, senza fare precisazioni sulla 'forma' della frazione che esprime il numero razionale | Pag. 85, pag. 91 | Pag. 90 | Gli autori trovano prima la derivata per potenze ad esponente intero e poi per potenze ad esponente reale e razionale, non facendo le opportune distinzioni sul dominio. In particolare non si capisce se la generalizzazione fatta per potenze ad esponente razionale vale per $x < 0$. |
| Bellipanni, Rinaldi, Tramontano: 1993, *Matematica per il triennio,Vol.2* Liguori, | | Pag. 129 I risultati per esponente reale sono riportati senza nessuna dimostrazione | | Nello specchietto proposto sembra che ci sia differenza tra esponente reale ed esponente del tipo $1/n$, come se per reale si intendessero solo gli irrazionali |
| Citrini L.,Castagnola E. Impedovo M.: 1995, *LA MATEMATICA, vol. II* - Einaudi Scuola | | Pag. 404, 415 Funzioni con esponente intero Pag. 427 funzioni con esponente 'reale' | Pag. 463 | A pag. 427 gli autori mettono un'osservazione in cui evidenziano la differenza di dominio per le funzioni ad esponente intero e ad esponente reale (non intero, suppongo), senza citare il caso razionale, utilizzato poi nell'esempio citato con dominio R. |
| Ferrauto R., Campitelli M.: 1992, *LA NUOVA ANALISI INFINITESIMALE* - Dante Alighieri | | Pag. 178 | | Nella regola di derivazione viene messo tutto assieme (con $n$ viene indicato 'un numero qualunque, intero o fratto, ecc.' dove con fratto, si scopre poi, non si intende neppure un generico numero razionale) senza |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | fare distinzioni di dominio o di ambito di validità. |
| Zwirner G.: 1975, *ISTITUZIONI DI MATEMATICHE* (Testo universitario)- CEDAM | Pag. 44 (base positiva anche per esponenti razionali non meglio identificati) | Pag. 414 | Pag. 457, n°1 | Secondo quanto detto in precedenza, il dominio della funzione dell'esempio dovrebbe essere dato da $x^2$-1 > 0 |
| Cateni L., Bernardi C., Maracchia S. *ANALISI MATEMATICA* Le Monnier, 1987 | | Pag. 108 | Pag. 160 | |
| Progetto Matematica Archimede: 1999, *I MATEMODULI F*- Archimede | | Pag. 93 | Pag. 126 | |
| Oriolo P., Coda A., Tess L.: 1995, *MATHEMATICA*- Ed. Bruno Mondadori, | | Pag. 210 | Pag. 210, 267 | |
| Adams R. A.: 1992, *CALCOLO DIFFERENZIALE 1* C.E. Ambrosiana | Pag.127, senza condizioni tra numeratore e denominatore per potenze razionali e base sempre positiva | Pag. 64 per esponenti del tipo 1/n e pag. 134 per esponenti reali (base positiva) | Pag. 191, esempio 4.4.13 | |
| Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 1991, *Nuovo corso di Analisi*- Ghisetti e Corvi | | Pag. 163 e 171 per esponenti interi. Pag. 176 per esponente 'reale' | Pag. 185 esempio 6 | |