DOV'È LA LOGICA? IL LINGUAGGIO COME BASE PER LA COSTRUZIONE DI UN CURRICOLO VERTICALE

Achille Maffini[1]

ABSTRACT

This essay is essentially splitted in two parts. In the first part is presented a course about the mathematical language (described as a precursor of mathematical logic) required to primary and secondary school teachers; in the second part, we propose examples of linguistic analysis related to some specific mathematical contents.

Parole chiave: Mathematical logic, morphologic, syntax, semantic, mathematical expression, equivalence relations, geometry.

INTRODUZIONE

Negli anni scolastici 2004/05 e 2005/06 l'Istituto D'Arzo di Montecchio Emilia ha organizzato, grazie alla Prof.ssa Garofani, un corso di 'logica' rivolto ad insegnanti della scuola dell'obbligo (Primaria e Secondaria di Primo grado) e della Scuola Secondaria di Secondo Grado. Tale corso faceva seguito ad analoghe iniziative, promosse dallo stesso Istituto negli anni scolastici precedenti, finalizzate a creare condizioni di collaborazione e di raccordo curricolare-metodologico tra le varie realtà scolastiche afferenti all'Istituto d'Arzo.
In particolare il corso di logica doveva costituire la premessa per un raccordo tra i linguaggi utilizzati e un modo per individuare, negli argomenti trattati, le connessioni curricolari e le modalità didattiche con cui erano presentate. L'idea di fondo era quindi non solo quella di 'far parlare' gli insegnanti tra di loro, ma soprattutto individuare quali potevano essere e a che livello potevano configurarsi eventuali ostacoli didattici nella verticalità del curricolo.
Agli incontri hanno partecipato complessivamente 35 insegnanti così suddivisi: 10 della Scuola Primaria, 11 della Secondaria di Primo Grado, 14 della Secondaria di Secondo Grado.
In relazione agli obiettivi del corso, più che un corso di logica in senso tecnico (e tradizionale) si è optato per un percorso tendente ad individuare le condizioni logico-linguistiche alla base dei concetti matematici. Tali concetti, quindi, sono stati analizzati soprattutto da questo punto di vista, utilizzando, allo scopo, le categorie proprie di un linguaggio: morfologia, sintassi e semantica. Il risultato finale è consistito in una pubblicazione dell'Istituto d'Arzo dal titolo «Dov'è la logica? Un tentativo di costruzione di 'occhiali' con cui vedere la logica nella didattica quotidiana».

---

[1] Insegnante presso il Liceo Scientifico G.Ulivi (Parma); collabora col Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma.
Indirizzo e-mail: a.maffini@achillemaffini.it

Al testo, che raccoglie la base teorica sulla quale è stato costruito e sviluppato il corso, è allegato un CD in cui sono inseriti dei materiali di supporto (articoli vari, mie pubblicazioni su altre esperienze di corsi legati al problema della verticalità, articoli di didattica della matematica, ecc.) utili alla comprensione delle problematiche trattate.
Tale volume è reperibile, per chi fosse interessato presso la scuola[2] stessa oppure può chiedere indicazioni direttamente a me.

1. STRUTTURA TECNICA DEL CORSO

Come detto, il corso si è sviluppato su due anni scolastici. Nel primo anno si sono tenuti quattro incontri di tre ore ciascuna suddivisi a loro volta in due parti distinte: la prima parte era dedicata alla trattazione di temi specifici sul piano teorico e con riferimenti sistematici ai libri di testo, mentre la seconda parte era dedicata ad una discussione-confronto sulla base delle consegne o delle sollecitazioni emerse durante la prima parte.
I temi dei quattro incontri ricalcavano le categorie di riferimento: nel primo incontro si è dato spazio soprattutto agli aspetti morfologici, nel secondo a quelli sintattici, nel terzo a quelli semantici mentre nell'ultimo si è proposta una sintesi volta a vederne le reciproche interazioni. Soprattutto nei primi due incontri, questa modalità di lavoro ha fatto fatica a decollare, dovendo vincere non solo le indubbie difficoltà legate ad un approccio per molti nuovo, ma anche le reciproche diffidenze e timori.
Nel secondo anno si sono svolti tre incontri sempre di tre ore ciascuno. Nella prima parte degli incontri agli insegnanti, riuniti a gruppi per ordini di scuole, sono state assegnate delle consegne nelle quali si chiedeva di analizzare, dal punto di vista linguistico, parti di libri di testo o loro specifiche modalità didattiche. Tali consegne sono state poi inserite nel testo prodotto nei punti in cui era esplicitamente trattato il concetto coinvolto e, dopo essere state raccolte per ordine di scuole, nel CD di supporto allegato al volume.
Nella seconda parte degli incontri a ciascun gruppo è stato chiesto di socializzare i risultati trovati (gli argomenti su cui ciascun gruppo doveva lavorare erano grosso modo gli stessi, ovviamente con le dovute differenze dovute ai diversi ordini scolastici), sollecitando quindi un confronto, anche in questo caso, con i colleghi di altri ordini scolastici.
La scelta di formare gruppi di insegnanti appartenenti allo stesso ordine di scuole era dovuta a due motivazioni principali:

1. evitare che il confronto fosse condizionato o inibito da timori, preclusioni o (pre)giudizi;
2. mostrare come anche tra insegnanti dello stesso ordine scolastico possa essere difficile capirsi quando si affrontano questioni riguardanti direttamente le proprie concezioni in campo matematico.

Questo secondo obiettivo ne nascondeva un altro implicito: una volta percepita la difficoltà di un confronto anche 'tra pari' era ancor più evidente quanto potesse essere difficile un confronto con insegnanti di altri ordini scolastici, vincolati ad altri obiettivi, portatori di una diversa preparazione e, soprattutto, di una diversa idea della matematica.

---

[2] Istituto Statale S. D'Arzo, Strada S. Ilario 28/C, Montecchio Emilia (RE); tel. 0522866198, e-mail posta@istitutodarzo.it; referente: Rossella Garofani.

Se, infatti, il problema della strutturazione di un curricolo verticale risiede soprattutto nella difficoltà di comunicazione, è anche vero che tale capacità non è facilmente acquisibile non per volontà quanto perché si devono 'fare i conti' con epistemologie (spesso implicite) profondamente diverse. Senza questa prioritaria consapevolezza ogni attività di questo genere rischia di arenarsi sulla convinzione (corretta, ma nella fattispecie inibente) che il proprio ordine di scuole richieda competenze specifiche di insegnamento non 'confrontabili' con quelle di altri.
Naturalmente una posizione di questo tipo ha delle significative controindicazioni. Su tutte, il non favorire un confronto diretto tra insegnanti di ordini scolastici diversi. In base ad altre esperienze analoghe e in accordo con la Prof.ssa Garofani (responsabile del corso), abbiamo convenuto che il processo richiesto dovesse essere necessariamente lungo e supportato anche da momenti di riflessione personale. Da qui l'idea del testo come supporto alla riflessione più che al corso in sé, visto che la sua pubblicazione sarebbe avvenuta a corso terminato e quindi ogni corsista l'avrebbe ricevuto 'a posteriori'.

2. STRUTTURA CONTENUTISTICA DEL CORSO

Il problema della logica, o meglio, della gestione in chiave 'logica' delle questioni matematiche, è ben sintetizzato nel seguente schema (fig.1) proposto dal Prof. Carlo Marchini agli studenti (futuri insegnanti) della Scuola di Specializzazione (SSIS):

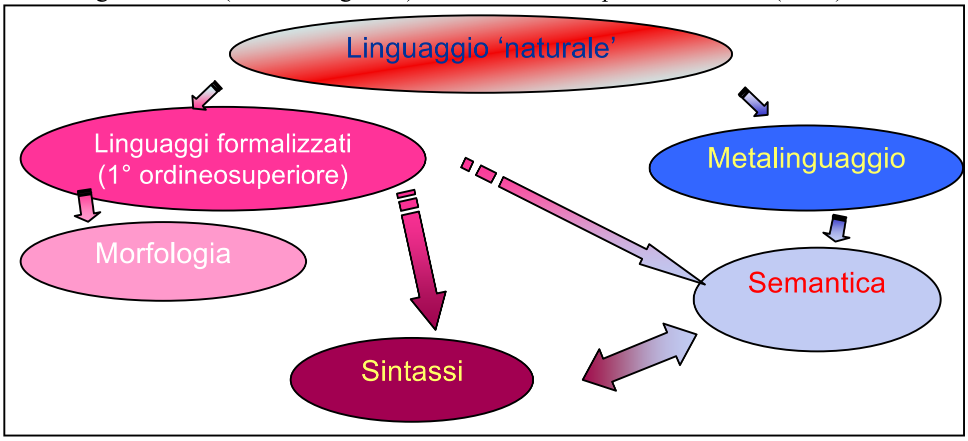


Figura 1

Tale schema ha costituito la mappa del percorso seguito, con l'intento principale di mostrare come si declinano queste condizioni linguistiche negli oggetti matematici trattati nella normale prassi didattica.
Innanzi tutto sono stati individuati alcuni concetti o temi fondanti i quali, oltre ad essere particolarmente significativi dal punto di vista matematico, fossero importanti anche per la loro verticalità. Successivamente sono state assegnate ai corsisti delle consegne (riprese ed approfondite, come detto, soprattutto nel secondo anno) il cui scopo era quello di favorire una riflessione critica su aspetti specifici della loro usuale attività didattica.

L'analisi dei concetti trattati è stata fatta a partire da libri di testo utilizzati negli ordini scolastici coinvolti. Per predisporre il materiale necessario, ho così analizzato 10 testi della Scuola Primaria, 12 della Secondaria di Primo Grado, 21 della Secondaria di Secondo Grado (12 del biennio e 9 del triennio).
Partire dai libri di testo si è rivelata una scelta felice, in quanto da una parte ha permesso agli insegnanti di confrontarsi con il loro principale strumento di lavoro, dall'altra ha favorito una loro esposizione diretta nella discussione, potendosi riferire e avvalere dell'autorevolezza degli autori dei testi esaminati: in pratica, erano gli autori 'ad esporsi'.
Oltre ad analizzare alcuni oggetti matematici dal punto di vista linguistico, il corso si proponeva due obiettivi espliciti:

1. mostrare come spesso l'attività didattica, malgrado il dichiarato 'rigore' della matematica, si 'nasconda' dietro ambiguità linguistiche la cui interpretazione è poi lasciata agli studenti;
2. favorire l'acquisizione da parte degli insegnanti degli strumenti per una lettura critica del libro di testo e, indirettamente, del proprio modo di insegnare.

Il secondo obiettivo era sicuramente più sentito, ma per molti aspetti il primo, agli occhi dei più, è risultato particolarmente affascinante. Con l'emergere delle ambiguità linguistiche, aumentava il bisogno di porvi rimedio, di sapere 'come va detta' una certa cosa. La difficoltà dell'insegnante diventava, amplificata, percezione della difficoltà dello studente, il quale, oltre tutto, non ha i mezzi critici e contenutistici per 'capire' laddove il linguaggio utilizzato è vago o ambiguo. Il percorso linguistico diventava quindi, anche agli occhi degli insegnanti, un tragitto sulla strada della comprensione delle difficoltà degli alunni.

2.1. Alcuni temi trattati

A partire dalle categorie linguistiche sopra ricordate, sono stati individuati alcuni temi che potessero fungere da esempio specifico. Di seguito propongo una suddivisione rispecchiante, grosso modo, i capitoli e i paragrafi del testo finale:

1) Morfologia
- Espressioni
- Connettivi e quantificatori

2) Sintassi e semantica
- Il problema del senso e del significato
- Sintassi e logica; teoremi

3) Il ruolo dell'uguale
- Le equivalenze
- Uguaglianza e relazioni di equivalenza
- Equazioni
- Integrali

4) Tra sintassi e semantica: le relazioni (necessarie ma) pericolose
- Risoluzione problemi
- Di nuovo espressioni
- Equazioni e disequazioni
- La geometria tra sintassi e semantica
- Funzioni e relazioni

A parte i contenuti specifici, è da sottolineare come, oltre al linguaggio, il generale filo conduttore del lavoro fosse costituito dal concetto di funzione. Una delle finalità (ma non l'unica, come vedremo) era mostrare come tale concetto costituisca, al di là della sua gestione tecnica, un indispensabile strumento per stabilire relazioni e soprattutto 'legami' tra mondi diversi. In questo senso, in più parti si è sottolineato il ruolo specifico del concetto di 'interpretazione', visto a sua volta come base del normale percorso didattico di pressoché tutti gli ordini scolastici coinvolti.

2.2. Qualche esempio

Propongo di seguito alcuni esempi di argomenti trattati, con lo scopo di mostrare lo 'spirito' del lavoro e il senso delle richieste stesse. In questo paragrafo, in particolare, proporrò alcuni argomenti trattati, rilevanti sia come esempi in sé che per il riconoscimento della loro importanza da parte dei docenti di ogni ordine di scuola.

2.2.1. Morfologia: Espressioni

Il concetto di 'espressione' è ampiamente utilizzato nella prassi didattica, pur essendo difficile trovarne definizioni convincenti. Proprio per la sua trasversalità, è stato utilizzato come approccio al lavoro che intendevo fare.
L'analisi di tale concetto è partita da una consegna rivolta agli insegnanti presenti:
«*Indicare, a partire dalle definizioni presenti sui propri libri di testo o in base alla propria esperienza didattica, cos'è una espressione. Stabilire quale ruolo è svolto dal simbolo = nella semplificazione di un'espressione.* »
Le risposte dei docenti alla prima domanda sono sintetizzabili nelle seguenti proposte[3]:

- Catena (Successione) di operazioni
- Formula con lettere e numeri
- Enunciato
- Rappresentazione
- Scrittura di lettere e numeri con operazioni

Successivamente sono state proposte varie definizioni tratte da alcuni libri di testo di vari ordini di scuola e sono state confrontate con quelle fornite dagli insegnanti stessi.
L'analisi dei libri di testo ha evidenziato non solo come le definizioni date dagli insegnanti fossero riconducibili a quelle dei testi, ma anche come tali definizioni 'nascondano' concetti non definiti (come, ad esempio, *catena*, *rappresentazione*, *scrittura*) o impropri (come, ad esempio, *formula* o *enunciato*). La successiva analisi, sviluppata a partire dai piani linguistici coinvolti, ha permesso di articolare una riflessione critico-linguistica delle varie definizioni, volta soprattutto a valutare quali fossero gli aspetti che implicitamente gli alunni avrebbero dovuto conoscere e quanto questa conoscenza o non conoscenza potesse influire sui risultati da loro ottenuti e sui loro approcci futuri al concetto. Al termine di questo percorso, ho proposto la definizione ricorsiva di espressione, riconducendola in questo modo a quella (logica) di termine. Questo approccio ha così permesso di ricondurre il concetto di espressione su

---

[3] In questi anni ho tenuto un corso di Laboratorio di Didattica della Matematica presso la sezione di Parma della SSIS Emilia Romagna. Tra le attività proposte agli specializzandi durante il laboratorio c'era anche quella di fornire la definizione di alcuni termini matematici, tra i quali anche 'espressione'. Le risposte erano in genere riconducibili alle 1, 2 e 5 precedenti.

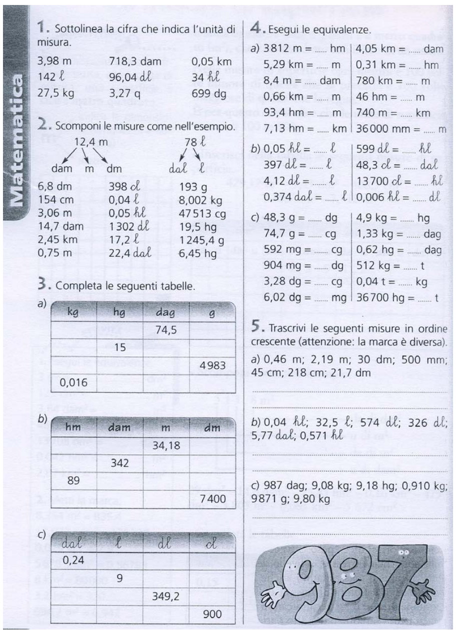
un piano morfologico e ha posto, contestualmente, il problema di come educare gli studenti a definizioni ricorsive. Come compendio, ho quindi suggerito attività e consegne, rivolte ad alunni di diversi ordini scolastici, atte a favorire una dimestichezza con definizioni o modalità procedurali di tipo ricorsivo, a loro volta viste come propedeutici alla definizione di espressione. Il ricondurre ad uno specifico ambito del linguaggio la collocazione naturale di un concetto ha permesso di focalizzare quali strumenti, conoscenze e abilità siano necessarie per una sua trattazione.

2.2.2. Sintassi e semantica: espressioni ed equivalenze

La richiesta sul simbolo di uguaglianza, presente nella consegna citata nel paragrafo 2.2.1., è stata affrontata e sviluppata nel capitolo in cui sono stati trattati gli aspetti sintattici e semantici relativi all'espressione, oltre che nello specifico capitolo dedicato all'uguaglianza. Da questo punto di vista l'oggetto 'espressione', proprio per la sua assoluta trasversalità, si è prestato bene ad analizzare la distinzione tra aspetti sintattici e aspetti semantici, attraverso, in particolare, l'analisi dei significati del simbolo '=' utilizzato nei due casi: procedurale e relazionale.

Sempre utilizzando il criterio della trasversalità per una valutazione dell'importanza dei temi, al simbolo '=' e al concetto di uguaglianza in senso lato ho ritenuto opportuno dedicare uno specifico capitolo. I principali strumenti utilizzati per l'analisi sono stati, anche in questo caso, quelli linguistici ed il concetto di funzione.

In particolare, l'idea di funzione soggiacente ad alcuni usi dell'uguaglianza si ritrova nelle equivalenze, argomento quanto mai importante nei programmi della scuola dell'obbligo, ma con significativi riflessi sulla padronanza e comprensione di importanti argomenti anche in ordini scolastici successivi. Un tipico testo che coinvolge le equivalenze è ad esempio il seguente, tratto da (*Quadrifoglio 4*, Theorema, 2002):



Matematica

1. Sottolinea la cifra che indica l'unità di misura.

3,98 m	718,3 dam	0,05 km
142 ℓ	96,04 dℓ	34 hℓ
27,5 kg	3,27 q	699 dg

2. Scomponi le misure come nell'esempio.

12,4 m → dam, m, dm

78 ℓ → daℓ, ℓ

6,8 dm	398 cℓ	193 g
154 cm	0,04 ℓ	8,002 kg
3,06 m	0,05 hℓ	47513 cg
14,7 dam	1302 dℓ	19,5 hg
2,45 km	17,2 ℓ	1245,4 g
0,75 m	22,4 daℓ	6,45 hg

3. Completa le seguenti tabelle.

a)

kg	hg	dag	g
		74,5	
	15		
			4983
0,016			

b)

hm	dam	m	dm
		34,18	
	342		
89			
			7400

c)

daℓ	ℓ	dℓ	cℓ
0,24			
	9		
		349,2	
			900

4. Esegui le equivalenze.

a) 3812 m = ... hm	4,05 km = ... dam
5,29 km = ... m	0,31 km = ... hm
8,4 m = ... dam	780 km = ... m
0,66 km = ... m	46 hm = ... m
93,4 hm = ... m	740 m = ... km
7,13 hm = ... km	36000 mm = ... m
b) 0,05 hℓ = ... ℓ	599 dℓ = ... hℓ
397 dℓ = ... ℓ	48,3 cℓ = ... daℓ
4,12 dℓ = ... ℓ	13700 cℓ = ... hℓ
0,374 daℓ = ... ℓ	0,006 hℓ = ... dℓ
c) 48,3 g = ... dg	4,9 kg = ... hg
74,7 g = ... cg	1,33 kg = ... dag
592 mg = ... cg	0,62 hg = ... dag
904 mg = ... dg	512 kg = ... t
3,28 dg = ... cg	0,04 t = ... kg
6,02 dg = ... mg	36700 hg = ... t

5. Trascrivi le seguenti misure in ordine crescente (attenzione: la marca è diversa).

a) 0,46 m; 2,19 m; 30 dm; 500 mm; 45 cm; 218 cm; 21,7 dm

b) 0,04 hℓ; 32,5 ℓ; 574 dℓ; 326 dℓ; 5,77 daℓ; 0,571 hℓ

c) 987 dag; 9,08 kg; 9,18 hg; 0,910 kg; 9871 g; 9,80 kg

Figura 2

Con gli insegnanti si è analizzato il testo a partire da richieste del tipo: *"Che ruolo hanno gli uguali nell'es. 4? E le frecce nell'es. 2?"*
Le conseguenti risposte, propedeutiche all'analisi richiesta, non hanno così potuto prescindere dal ruolo svolto dai vari simboli presenti nel testo. Nell'es. 4, ad esempio, si parla di *equivalenze* e questo ha consentito un naturale collegamento con le relazioni di equivalenza. Dal punto di vista morfologico, le scritture richieste sono chiaramente diverse (si pensi a 0,04 t e 40 kg). Il problema quindi si sposta sul piano del significato, riproponendo (come fatto in altre parti del lavoro) il problema del senso e dell'oggetto denotato e fornendo, contestualmente, un esempio 'sul campo' dell'applicazione del triangolo di Frege[4]. Utilizzando ancora una volta il concetto di funzione ho proposto una possibile sintesi del concetto di equivalenza per mezzo di un diagramma (fig. 3) utile, a mio avviso, per chiarire i concetti e le difficoltà coinvolte:

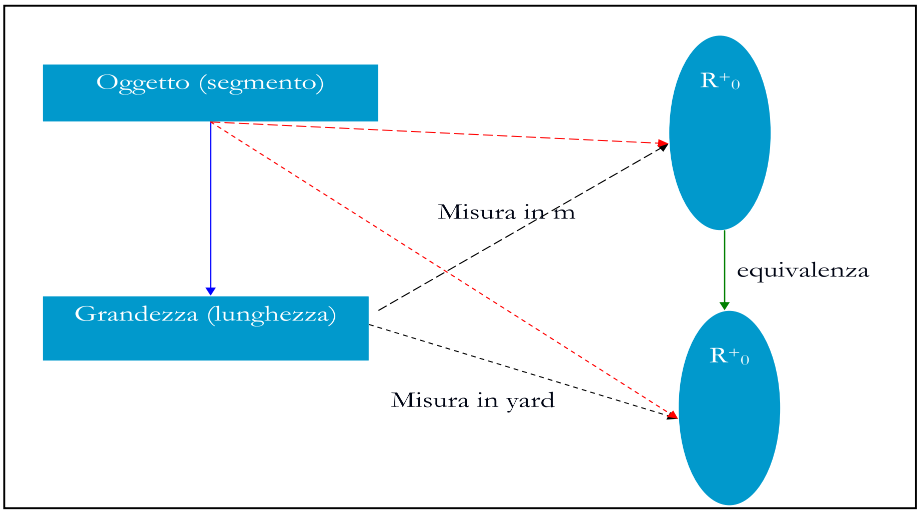


Figura 3

Ciò che si evidenzia, in particolare, è il passaggio dall'oggetto (segmento) alla grandezza (nel nostro caso la lunghezza) con la funzione individuata dalla freccia verticale a sinistra; le due funzioni rappresentate con le frecce 'a puntini' forniscono le misure (intese come numeri reali positivi o nulli) relative a due diverse unità di misura. L'equivalenza (freccia verticale a destra) esprime l'operatore che fa passare da una misura all'altra, individuato dal fattore di conversione (1,0936) tra le diverse unità di misura (in sostanza, la misura, nel caso considerato, del metro rispetto allo yard). La composizione delle funzioni 'Misura in metri' ed 'equivalenza' determina la funzione 'Misura in yard'; ed è quello che si fa quando si utilizzano i fattori di conversione tra diverse unità di misura. Quindi le uguaglianze dell'es. 4 del testo in fig. 3 sono relative alle lunghezze, le cui differenti misure, rispetto alle unità di misura indicate, sono espresse dai numeri dati o da quelli richiesti per completare l'uguaglianza.

---

[4] Il triangolo di Frege (nei cui vertici, ricordiamo, compaiono i termini 'senso', 'significato' e 'segno') sono è stato ampiamente usato sia durante il corso che nel testo finale come strumento utile ad una specifica lettura dei vari concetti e delle loro relazioni linguistiche.

Le frecce tratteggiate, infine, esprimono le funzioni che ad ogni segmento fanno corrispondere una misura (rispetto ad una fissata unità di misura), ottenute componendo la funzione indicata con la freccia a sinistra con le funzioni indicate con le frecce tratteggiate (Misura in…). In modo ovvio si possono poi considerare le composizioni della funzione 'equivalenza' rispettivamente con una 'tratteggiata' o una a 'puntini'.
Nelle intenzioni, e come esplicitato nel successivo confronto con gli insegnanti, il diagramma proposto non aveva solo uno scopo 'accademico', quanto piuttosto serviva per far cogliere come il tentativo di formalizzare le *equivalenze* portasse a capire quanto fossero complessi e profondi gli aspetti matematici e concettuali coinvolti. La complessità nell'organizzazione del concetto diventava quindi un mezzo per intuire le probabili difficoltà che incontreranno gli alunni nella sua comprensione e gestione.
Infine, come sottolineato, il termine *equivalenze* rimanda ad una relazione di equivalenza effettivamente presente: la relazione di equivalenza tra 'numeri' (e quindi in $R^+ \cup \{0\}$) è legata alle (diverse) misure della stessa lunghezza.

3. QUESTIONI DI SIGNIFICATI

La difficoltà maggiore riscontrata durante il corso è stata quella di cercare di far cogliere come alcuni concetti siano veramente 'fondanti', intendendo con questo termine la loro natura non di semplici contenuti, quanto piuttosto strumenti messi a disposizione della matematica per 'guardare' la realtà.
Come sottolineato in vari punti, il concetto di funzione è stato utilizzato in modo trasversale e proprio con questo intento, soprattutto sul piano più strettamente semantico. In diverse circostanze, infatti, ciò che ho voluto rimarcare è come le questioni riconducibili all'ambito 'del significato' si avvalgano implicitamente di funzioni.
Questa prospettiva ha permesso una successiva riflessione su cosa 'significhi' parlare di semantica in contesto matematico.
A titolo di esempio, riporto una parte del lavoro coinvolgente questi aspetti sviluppata a partire da frasi quali 'perdita di significato' o 'perdita di senso' facilmente riscontrabili in ambito didattico.
Il tentativo, partendo dall'analisi di equazioni fratte (e, in generale, di frazioni algebriche), era quello di indurre una riflessione sugli ambiti a cui sono riconducibili le modalità risolutive normalmente proposte. In particolare ci si è soffermati sulla locuzione 'perdita di significato' per evidenziare come tale questione non sia 'tipica' della Scuola Secondaria, ma riscontrabile anche nella prassi didattica della Scuola Primaria. A sostegno di questa affermazione ho riportato alcune parti tratte da testi della Scuola Primaria in cui emergevano tali condizioni, come ad esempio l'esercizio in fig. 4 tratto da (Panizzuti N., *Nel mondo della …Matematica 3*, ElMedi, 2001):

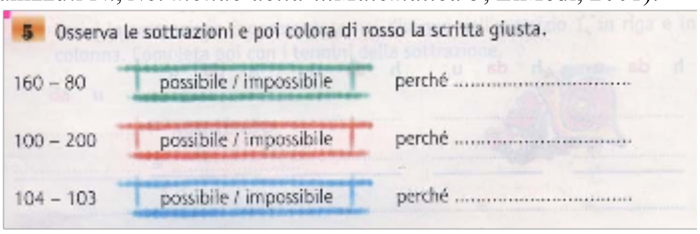


Figura 4

L'alternativa possibile/impossibile rimanda al processo conseguente all'operazione di sottrazione. Se ci si sofferma invece all'oggetto-numero individuato da tali scritture, tale oggetto esiste o non esiste e questa è la condizione primaria alla base di una successiva richiesta di possibilità/impossibilità nella sua determinazione.
Il parallelismo tra gli esempi algebrici della scuola secondaria e quelli aritmetici della scuola primaria ha permesso di evidenziare il percorso verso la conoscenza matematica: prima ci si chiede se esiste il risultato (problema semantico) e in seguito ci si pone la questione di come trovarlo (problema sintattico); in questo modo, si riporta la condizione di impossibilità alla conseguenza della non esistenza. In entrambi i casi, il problema si configura come un problema di significato: per il bambino della terza classe della Scuola Primaria il cui mondo numerico di riferimento è quello dei numeri naturali, la scrittura 100-200 'non ha significato', tanto quanto la divisione per 0 per gli alunni di classi superiori. La conseguente domanda è venuta così naturale: *"Chi dà significato alle 'cose' della matematica? E, quindi, qual è la semantica della matematica?"*
Se nella realtà, di cui il linguaggio è uno strumento per descriverla, parlare di significato di un termine comporta associare a tale termine un ente denotato, in matematica è difficile stabilire in quale 'mondo' trovare una corrispondenza (di significato) tra oggetti matematici. Ad una domanda esplicita, molti insegnanti del corso hanno risposto che la semantica per gli oggetti matematici sia da ricondurre a contesti di realtà fisica, confondendo in questo modo il significato degli oggetti matematici con la loro possibilità di essere modelli per descrivere e trattare fenomeni o oggetti reali.
Dagli esempi proposti relativamente all'esistenza di uno specifico risultato, si è potuto notare come la mancanza o la presenza di un significato sia legato alla presenza o meno dell'immagine di un particolare elemento in un altro insieme; ciò che dà significato è la presenza di una funzione che associa ad elementi di un insieme un elemento di un altro insieme. In pratica, per dare o non dare significato ad un oggetto si tratta di vedere se ad esso si riesce ad associare qualcosa 'in un altro mondo'; formalmente si tratta di una relazione funzionale. Il codominio diventa quindi il mondo che dà significato (o che fornisce informazioni), chiaramente sul piano matematico, agli oggetti del dominio. Nell'esempio fatto in precedenza, potremmo dire che la coppia (100;200) non ha significato per la sottrazione poiché non si riesce, nel mondo dei numeri naturali, ad associarle nessun numero.
Queste considerazioni hanno favorito una discussione sul concetto e sulle modalità di ampliamento degli insiemi numerici, discussione e confronto che hanno permesso, tra l'altro, di far conoscere ad insegnanti di diversi ordini scolastici le modalità di lavoro dei loro colleghi. È superfluo sottolineare l'importanza di questo confronto sia dal punto di vista didattico che della strutturazione verticale dei curricoli; oltre a ciò, è stato un valido esempio di quale ruolo possa effettivamente svolgere il concetto di funzione nella costruzione di un curricolo verticale[5].
La successiva consegna è stata quella di ricercare, nei testi in proprio possesso, esempi di funzioni che collegassero 'mondi diversi', in cui cioè ad alcuni termini ne fossero associati altri che ne forniscano un significato. Gli insegnanti sono stati così costretti a

5 Il percorso legato agli ampliamenti numerici, ad esempio, si configura come una ricerca di 'mondi' in cui relazioni funzionali possano diventare funzioni.

guardare i testi sotto un'altra luce: non relativamente ai contenuti, ma rispetto alle condizioni (implicite o esplicite) per presentarli. Questo tipo di attività ha portato, come corollario, a riflettere sull'uso e abuso delle 'frecce' e a porsi domande tipo: *"Quando individuano funzioni, quando implicazioni e quando invece sono usate in modo assolutamente arbitrario?"*
Poiché questi usi non sono mai esplicitati, la loro analisi ha permesso di cogliere le difficoltà nelle possibili interpretazioni, frutto a loro volta dei presupposti culturali su cui si basano.
Anche in quest'occasione, le difficoltà degli insegnanti presenti sono diventate cartine tornasole delle difficoltà degli studenti i quali, oltre a tutto, hanno un bagaglio culturale 'ristretto' e, naturalmente, in formazione.
Strettamente collegato agli insiemi numerici e ai loro ampliamenti, sono state poste questioni e attività riguardanti le operazioni e le loro proprietà. Com'è noto, le operazioni e le relative proprietà risentono di retaggi linguistici dovuti a periodi precedenti la loro formalizzazione in termini strutturali; così si va da concezioni profondamente diverse del termine 'operazione' ad interpretazioni sui termini che designano le proprietà (l'esempio più eclatante è forse quello della proprietà associativa). Sorprendentemente, però, questa diversa impostazione non è nota ad insegnanti di altri ordini, per cui si prospetta una incomunicabilità che inevitabilmente passerà attraverso gli studenti, ai quali si imputeranno conoscenze errate, senza capire che 'nella loro testa' i termini hanno un altro significato.
Per mostrare un esempio di questa 'frattura' ho posto l'attenzione degli insegnanti sul concetto di operazione in generale e sulla proprietà associativa in particolare; anche in questo caso il materiale di lavoro erano le loro definizioni (chieste a priori) e quanto riportato dai libri di testo.
Le risposte, sia degli insegnanti che dei testi analizzati, hanno evidenziato la diversa concezione della proprietà associativa (ad esempio dell'addizione) tra la scuola dell'obbligo e la Scuola Superiore di Secondo Grado: nella prima, la proprietà permette di associare in modo diverso gli addendi, vedendo l'operazione come 'multipla'[6]; nella seconda, l'operazione è binaria e la proprietà permette di scegliere come abbinare gli addendi[7]. La mancanza di conoscenza di come sono stati o come saranno appresi dai propri studenti tali concetti (operazioni, proprietà, ecc.), induce spesso gli insegnanti ad imputare alcuni errori tipici a cause completamente diverse e non riconducibili, invece, ad ostacoli didattici. La sorpresa degli insegnanti presenti al corso di fronte a questo semplice confronto con colleghi ha portato qualcuno ad esternare l'avvenuta comprensione di alcuni errori 'incomprensibili' fatti dai propri studenti.

4. UN PO' DI GEOMETRIA

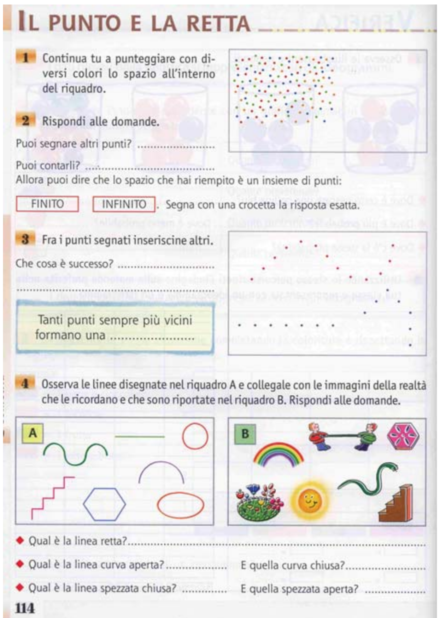
Infine segnalo, brevemente, un lavoro specifico sulla geometria, in cui si è tentato di mostrare come nei vari ordini di scuole ci fosse una persistente presenza di aspetti semantici. Se questo è ampiamente giustificato a livello di Scuola Primaria, la cosa è

[6] In pratica permette di 'mettere delle parentesi'.
[7] In pratica, permette di 'togliere delle parentesi'.

meno comprensibile a livello di Scuola Secondaria (di Primo e, soprattutto, Secondo Grado).

Si è inoltre fatto notare come certi approcci presenti nella Scuola Primaria possano costituire degli ostacoli didattici nella formazione futura delle conoscenze geometriche. A titolo di esempio ho proposto e commentato insieme a loro brani come quelli riportati in fig. 5, tratti da testi della scuola dell'obbligo (il primo della Scuola Primaria, il secondo della Scuola Secondaria di Primo Grado):

Zoi A. (a cura di), MEMO 3, La Scuola, 1996 ***Pellerey M., Algebra 1, SEI, 1998***



IL PUNTO E LA RETTA

1 Continua tu a punteggiare con diversi colori lo spazio all'interno del riquadro.

2 Rispondi alle domande.

Puoi segnare altri punti? ....

Puoi contarli? ....

Allora puoi dire che lo spazio che hai riempito è un insieme di punti:

FINITO INFINITO . Segna con una crocetta la risposta esatta.

3 Fra i punti segnati inseriscine altri.

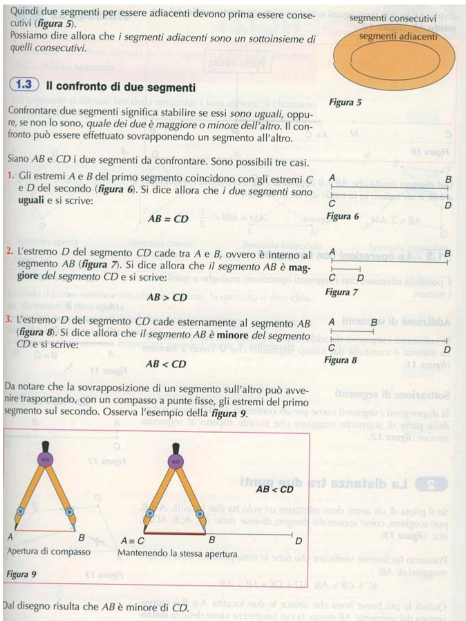
Che cosa è successo? ....

Tanti punti sempre più vicini formano una ....

4 Osserva le linee disegnate nel riquadro A e collegale con le immagini della realtà che le ricordano e che sono riportate nel riquadro B. Rispondi alle domande.

- Qual è la linea retta? ....
- Qual è la linea curva aperta? .... E quella curva chiusa? ....
- Qual è la linea spezzata chiusa? .... E quella spezzata aperta? ....

114



Quindi due segmenti per essere adiacenti devono prima essere consecutivi (**figura 5**).
Possiamo dire allora che *i segmenti adiacenti sono un sottoinsieme di quelli consecutivi.*

Figura 5

1.3 Il confronto di due segmenti

Confrontare due segmenti significa stabilire se essi *sono uguali*, oppure, se non lo sono, *quale dei due è maggiore o minore dell'altro.* Il confronto può essere effettuato sovrapponendo un segmento all'altro.

Siano AB e CD i due segmenti da confrontare. Sono possibili tre casi.

1. Gli estremi A e B del primo segmento coincidono con gli estremi C e D del secondo (**figura 6**). Si dice allora che *i due segmenti sono* **uguali** e si scrive:

$$AB = CD$$

Figura 6

2. L'estremo D del segmento CD cade tra A e B, ovvero è interno al segmento AB (**figura 7**). Si dice allora che *il segmento AB è* **maggiore** *del segmento CD* e si scrive:

$$AB > CD$$

Figura 7

3. L'estremo D del segmento CD cade esternamente al segmento AB (**figura 8**). Si dice allora che *il segmento AB è* **minore** *del segmento CD* e si scrive:

$$AB < CD$$

Figura 8

Da notare che la sovrapposizione di un segmento sull'altro può avvenire trasportando, con un compasso a punte fisse, gli estremi del primo segmento sul secondo. Osserva l'esempio della **figura 9**.

Figura 9

Dal disegno risulta che AB è minore di CD.

Figura 5

Sui testi precedenti sono state fatte diverse considerazioni che in questo contesto ritengo scarsamente significativo riportare. Mi limito ad un solo aspetto, notato e condiviso da diversi insegnanti: il testo della Scuola Primaria induce negli studenti una visione discreta degli enti geometrici, visione che si radica e permane nella loro concezione di punto come 'perlina' e di linea come 'collanina'. Tutto questo, naturalmente, senza parlare dei problemi connessi all'uso del termine 'infinito' e dell'immagine mentale (normalmente non controllata dall'insegnante) che può indurre negli studenti di quell'età.

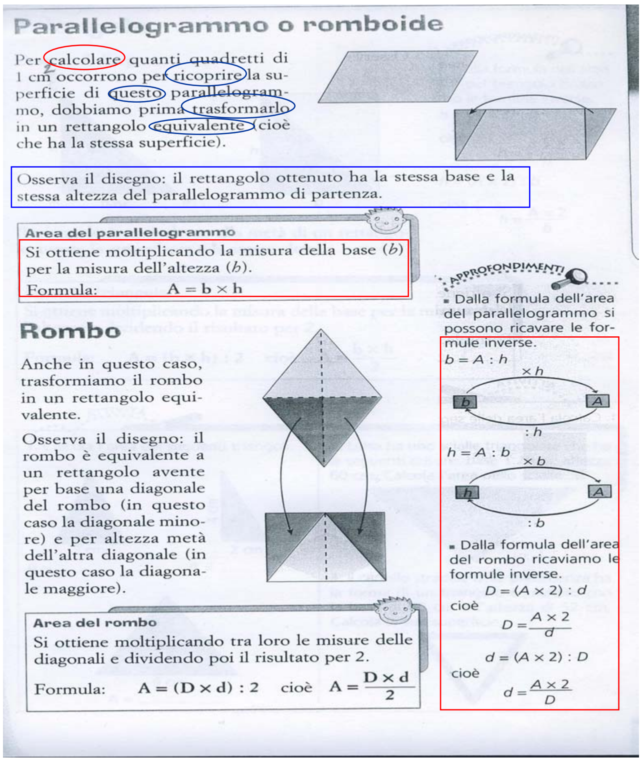
Per quanto riguarda il testo della Scuola Secondaria di Primo Grado, invece, per introdurre il relativo commento sono partito da queste domande, inserite a loro volta in una specifica consegna:

1. *Analizza il testo proposto evidenziandone aspetti riconducibili agli ambiti morfologico, sintattico e semantico.*

2. *Ritieni più opportuno parlare di uguaglianza (come questo testo) o di congruenza (come il testo precedente[8])? Perché?*
3. *Che ruolo ha il compasso (fisico) nella proposta didattica?*
4. *Sei d'accordo sulla rappresentazione insiemistica proposta in alto a destra? Quale tipo di informazione induce?*
5. *Evidenzia in cosa (eventualmente) si discosta la tua proposta didattica dei concetti trattati e perché. In caso non vi siano differenze, motivare l'opportunità delle scelte proposte dal testo in esame.*

Come si può notare, oltre che un'analisi del testo in sé, le richieste volevano essere un'occasione per una riflessione sulla propria didattica, riflessione naturalmente da condividere con gli altri insegnanti.

Come ultimo esempio, propongo una pagina di un testo della Scuola Primaria (fig. 6) analizzata durante il corso per evidenziare in modo esplicito la presenza di aspetti sintattici (racchiusi da cornici rettangolari) e di aspetti semantici (racchiusi da cornici ovali). Lo scopo di tale proposta è stato proprio quello di mostrare come, anche in ordini scolastici 'bassi' si ritrovino entrambi gli ambiti:



Parallelogrammo o romboide

Per calcolare quanti quadretti di 1 cm occorrono per ricoprire la superficie di questo parallelogrammo, dobbiamo prima trasformarlo in un rettangolo equivalente (cioè che ha la stessa superficie).

Osserva il disegno: il rettangolo ottenuto ha la stessa base e la stessa altezza del parallelogrammo di partenza.

Area del parallelogrammo
Si ottiene moltiplicando la misura della base (b) per la misura dell'altezza (h).
Formula: $A = b \times h$

Rombo

Anche in questo caso, trasformiamo il rombo in un rettangolo equivalente.

Osserva il disegno: il rombo è equivalente a un rettangolo avente per base una diagonale del rombo (in questo caso la diagonale minore) e per altezza metà dell'altra diagonale (in questo caso la diagonale maggiore).

Area del rombo
Si ottiene moltiplicando tra loro le misure delle diagonali e dividendo poi il risultato per 2.
Formula: $A = (D \times d) : 2$ cioè $A = \frac{D \times d}{2}$

APPROFONDIMENTI

- Dalla formula dell'area del parallelogrammo si possono ricavare le formule inverse.
$b = A : h$
$b \xrightarrow{\times h} A$, $A \xrightarrow{: h} b$
$h = A : b$
$h \xrightarrow{\times b} A$, $A \xrightarrow{: b} h$
- Dalla formula dell'area del rombo ricaviamo le formule inverse.
$D = (A \times 2) : d$
cioè $D = \frac{A \times 2}{d}$
$d = (A \times 2) : D$
cioè $d = \frac{A \times 2}{D}$

Figura 6

[8] Ci si riferisce ad un testo analizzato in parallelo a questo.

5. CONCLUSIONI

5.1. Prima parte: dalla parte degli insegnanti

L'analisi dei risultati del corso non può non partire dal testo prodotto, il quale costituisce non solo un importante supporto per gli insegnanti che hanno partecipato, ma anche un valido contributo sul piano della documentazione di un lavoro e della lungimiranza di un Istituto nel mostrarlo. Come detto, è stato dato a tutti gli insegnanti partecipanti e non sono mancate, da parte di alcuni, successive richieste di chiarimenti e approfondimenti.
Rispetto agli obiettivi che ci si è posti, il percorso si è sviluppato tra luci ed ombre: il confronto tra insegnanti è frutto di un processo lungo e non facile e i tempi, necessariamente ristretti di un corso come questo, non lo hanno certo favorito. La diffidenza nei confronti di un temuto giudizio ha impedito a diversi insegnanti di esprimere in modo sereno tutte le loro perplessità e difficoltà. Questa ritrosia a mettersi in discussione, non tanto sul piano dei contenuti, quanto della loro strutturazione, può essere a sua volta indice di una difficoltà nell'operare quel cambio di prospettiva didattica che il corso auspicava e richiedeva. Ciò malgrado, la disponibilità nel seguire fino al termine il corso e i relativi compiti assegnati indica la percezione del bisogno presente in molti di 'scavare' i contenuti matematici ad un livello più strettamente linguistico.

5.2. Seconda parte: dalla parte della matematica

Questo lavoro non è e non pretendeva di essere né esauriente né esaustivo, quanto di porsi come primo passo per riconoscere gli aspetti linguistici presenti nel modo in cui si fa e si comunica la matematica, nella convinzione, ampiamente condivisa[9], che chi controlla il linguaggio ha potere. Spesso la didattica della matematica, cioè la didattica di quella che è considerata la scienza del rigore, si nasconde dietro presunte conoscenze dello studente o ambiguità linguistiche. In diversi casi si è alla presenza di un contratto didattico implicito tra studente e insegnanti; a volte, però, si ha la sensazione che l'approccio al linguaggio abbia come obiettivo non tanto quello di semplificare le cose per il discente quanto piuttosto non voler affrontare aspetti per loro natura delicati. L'equilibrio tra rigore ed efficacia non è mai semplice da raggiungere e la gestione del linguaggio matematico mediante il linguaggio naturale è uno degli indicatori di questa difficoltà didattica, fermo restando l'obiettivo principale che è quello della piena consapevolezza da parte dell'insegnante di ciò che decide di dire e di ciò che decide di tacere.
I documenti UMI ((UMI, 2001) e (UMI, 2005)) e OCSE-PISA insistono molto sull'idea di una matematica per il cittadino[10]. Il tentativo di strutturare i curricoli secondo nuclei

---

[9] Si veda ad esempio (Vygotskij, 1992)

[10] «La formazione del curriculum scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambe sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato, senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo

fondanti e la proposta di attività con cui presentare gli argomenti, rafforza un approccio semantico alla matematica, ribadito del resto in progetti quali m@t.abel o in prove tipo quelle OCSE-PISA: lo scopo è che gli studenti possano dare significato alle cose che imparano, anche grazie all'uso di mezzi che oggi sono ormai ampiamente diffusi, come calcolatrici grafiche o software didattici[11].

Questo tipo di impostazione non può che essere condivisa, vista anche la crescente difficoltà degli studenti e dei cittadini in genere ad avvicinarsi alla matematica e soprattutto ad usarla come strumento di conoscenza e di indagine della realtà: la costruzione di competenze di cittadinanza mediante contenuti e concetti matematici (o, più in generale, attraverso Assi Culturali) va indubbiamente in questa direzione. Come insegnanti credo, però, non si debbano confondere i termini: per i ragazzi, dare significato ai concetti che apprendono comporta la capacità di interpretare gli oggetti matematici appresi in contesti pratici; ma per noi insegnanti è indispensabile sapere quali concetti sono coinvolti e su quali piani ci si muove quando li si affrontano e si propongono.

Nel lavoro all'Istituto D'Arzo ho cercato di mostrare come morfologia, sintassi e semantica non sono categorie avulse dal contesto didattico, indipendentemente dall'ordine di scuola, presentandole, al contrario, come categorie interne alla matematica e dalle quali, quindi, non si può prescindere. Se da una parte è riduttivo pensare alla semantica della matematica solo come applicazione, dall'altra credo sia importante capire le strutture sintattiche della matematica stessa. Questo doppio sguardo alla trattazione all'interno di un contesto e al passaggio (semantico) tra contesti (matematici) dovrebbe essere la base per un approccio critico alla matematica, cioè uno degli obiettivi principali dell'insegnamento. Nella pubblicazione collegata al corso è stata data molta enfasi al concetto di funzione proprio perché ritengo, in accordo con altri, sia il principale strumento concettuale per il passaggio da un ambito all'altro nella formazione dei concetti. Tutto questo, nella convinzione che se uno studente acquisisce questa impostazione mentale, dovrebbe essere poi più facile farlo ragionare in termini di 'significato', qualunque cosa questa parola voglia dire.

Concludo con un digramma (fig. 7) tratto da (Gray et al., 2001) che descrive bene, a mio avviso, il percorso verso la matematica:

---

e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato fin dai primi anni della scuola elementare.» (UMI, 2001)

[11] Per un approccio di questo tipo si veda ad esempio (Impedovo, 1999) e (Paola, 2005).

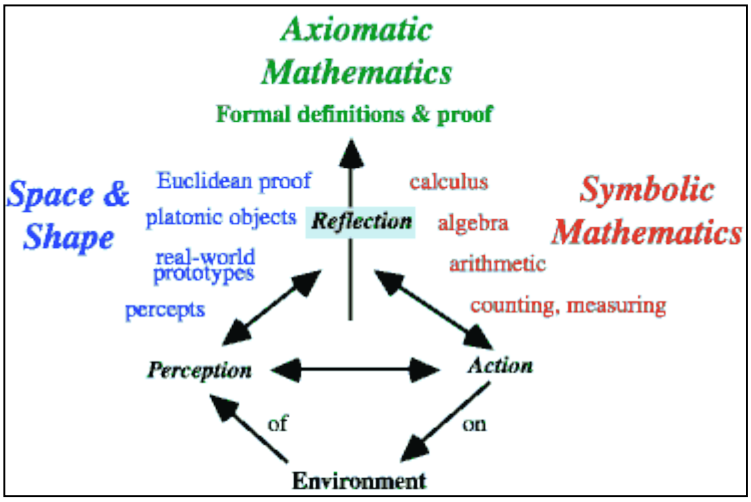


Figura 7

Ciascun insegnante, in qualunque ordine di scuola insegni, sa che il suo insegnamento è un segmento di un lungo e delicato percorso nella costruzione di una realtà matematica in cui gli oggetti matematici devono acquisire vita propria. L'assiomatizzazione, e quindi, la sintassi, sono visti dagli autori del precedente diagramma come il punto più alto nella conoscenza matematica, raggiungibile quando si individuano le strutture su cui si fondano (o su cui fondare) i concetti. Il percorso didattico, a mio avviso, deve sempre tenere presente il duplice livello linguistico sul quale si muove: gli aspetti semantici favoriscono negli studenti la possibilità di preoccuparsi del significato di ciò che fanno, così come una consapevolezza delle condizioni sintattiche fonda l'acquisizione di una realtà matematica.

BIBLIOGRAFIA

AA.VV. (1990), *Logica matematica e logica filosofica*, La Scuola, Brescia

Alberti N. (1998), *I manuali scolastici e la Logica Matematica nella scuola elementare*, L'educazione Matematica, XIX, Vol. 3, n. 1, pp.44 - 54.

Alberti N. (2002), *La logica matematica nella scuola media nei manuali scolastici*, L'educazione Matematica, XXIII, Serie VI, Vol. 4, n.1, pp. 7-24.

Arzarello F., Robutti O. (2002), *Matematica*, La Scuola, Brescia

Avanzini P., Delfrate G., Muri P., Rinaldi M. G., Ugonotti B., Venè M., Vighi P. (1991), *Calcolo letterale*, in Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto, Atti del secondo internucleo scuola secondaria superiore, a cura di F. Furinghetti, Genova

Borga M., Palladino D. (1997), *Oltre il mito della crisi*, La Scuola, Brescia

Bozzi S., Mangione C. (1993), *Storia della logica*, Garzanti, Milano

D'Amore B. (1993), *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetiche*, La matematica e la sua didattica n. 2

Duval R. (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM, Strasbourg

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berna

Eco U. (1973), *Il segno*, Isedi, Milano

Ferrari P.L. (2004), *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora, Bologna

Furinghetti F. (2002), *Matematica come processo socioculturale*, IPRASE Trentino

Gray E. M., Tall D. (1994), *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic,* The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), pp.115-141.

Gray E. M., Pitta D., Tall D. (2000), *Objects, Actions And Images: A Perspective On Early Number Development*, Journal of Mathematical Behavior,18, 4, pp. 1-13.

Gray E., Tall D., Bin Ali M., Crowley L., DeMarois P., McGowen M., Pitta D., Pinto M., Thomas M., Yusof Y. (2001), *Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking*, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1, pp. 80-104.

Gray E. M., Tall D. (1993), *Succes and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept*, Mathematics teaching, n. 142

Halliday M.A.K. (1985), *An introduction to functional grammar*, Arnold, London

Iacomella A., Letizia A., Marchini C. (1997), *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica: un'occasione di ricerca didattica*, Salentina-Galatina

Iacomella A., Letizia A., Marchini C. (2004), *Il comunicare in matematica. Formalizzare: come, quando, perché, nella prassi didattica*, Quaderno n.377 Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, reperibile all'indirizzo

http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/PDF/Quadernoacolori.pdf

Impedovo M. (1999), *Matematica: insegnamento e computer algebra*, Springer

Lolli G. (1992), *Incompletezza*, Il Mulino, Bologna

Lolli G. (1992), *Cos'è la logica matematica*, Muzzio, Padova

Lolli G., *I turbamenti dell'uguale*, reperibile all'indirizzo

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/SeVic/I%20turbamenti%20dell%27Uguale.pdf

Maffini A. (2000), *Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria*, Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3*

Maffini A. (2000), *Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore*, Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM 'Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)' – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000

Maffini A. (2007), *Il concetto di funzione: dalla definizione alla prassi didattica*, reperibile all'indirizzo

http://www.treccani.it/site/Scuola/nellascuola/area_matematica/archivio/funzioni/maffini.htm

Marchini C. (1997), *Conflitti tra sintassi e semantica nella trattazione delle funzioni*, (D'Amore B., Pellegrino C. eds.) Atti del Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza, Pitagora ed. Bologna, pp. 94 - 98.

Marchini C. (1999), *Il linguaggio della Logica*, Iter - Scuola cultura e societa', II, n. 5 maggio - agosto 1999, pp. 31-37.

Marchini C. (1999), *La didattica della Logica*, L'educazione Matematica, Anno XX - serie VI - Vol. 1 n. 3, Ottobre 1999, pp. 156 - 166.

Marchini C. (2002), *Strumenti per individuare le variabili nella scuola elementare*, L'educazione Matematica, Anno XXIII - Serie VI - Vol. 4, n. 2, Giugno 2002, pp. 65 - 82.

Oddifredi P.G. (2005), *Il diavolo in cattedra*, Einaudi, Torino

Paola, D. (2005), *Esempi di didattica sensata*, L'Educazione Matematica, Vol 1, n. 1, pp. 11 - 23.

Sfard A. (1991), *On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22

Tall D., Vinner S. (1981), *Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 48

Tall D. (1995), *Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking*, in L. Meira & D. Carraher (editors), Proceedings of PME 19 (Recife), v.1, pp. 61-75

UMI, *Matematica 2001*, *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica* (scuola elementare e scuola media), reperibile all'indirizzo sul sito dell'UMI all'indirizzo http://umi.dm.unibo.it/

UMI, *Matematica 2003, Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica* (Scuola secondaria di secondo grado), reperibile all'indirizzo sul sito dell'UMI all'indirizzo http://umi.dm.unibo.it/

Vygotskij L.S. (1992), *Pensiero e Linguaggio*, Laterza, Roma

Wittgenstein L. (1922), *Tractatus logico-philosophicus*, Routledge & Keagan Paul