LE CONCEPT DE FONCTION DANS L'ÉCOLE ITALIENNE; USAGE DE L'ÉPISTÉMOLOGIE ET DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES POUR EN CLARIFIER LE SENS.

Lucia Grugnetti, Achille Maffini, Carlo Marchini
Unità locale di ricerca didattica, Dipartimento di Matematica, Parma (Italy)

Summary
The concept of function is widely treated in didactic literature for what concerns the aspects of difficulties of learning and misconceptions; logical analysis in a historical perspective of the concept is less frequent and we are working in this direction.
We try also to interpret students' believes as transition stages among morphologic, syntactic and semantic aspects. Modern presentation of the concept of function is closed to ideas of infinity (potential and actual). It is the arrival point of a long evolution.
It is quite strange that in Italian schools this is, in general, the first real object to whom students are faced with, disregarding the historical development. With a more accurate analysis we can find implicit occurrences of functions in primary school and later in treatment of polynomials.
These occurrences can be found across history of mathematics. They often hide the use and the concept of variable such as appears in logic.

Résumé
Le concept de fonction est largement traité dans la littérature didactique en ce qui concerne les aspects des difficultés dans l'apprentissage et les misconceptions; l'analyse logique dans une perpective historique du concept est moins présente et nous sommes en train de travailler dans cette direction.
Nous cherchons aussi d'interpréter les conceptions des élèves comme les moments de passage entre les aspects morphologiques, syntactiques et sémantiques.
Les présentations actuelles du concept de fonction sont proches des idées d'infinis (potentiel et en acte), tout ça comme point d'arrivée d'une longue évolution.
C'est assez étrange que dans l'école italienne cet approche soit, en général, le premier objet avec lequel les élèves doivent se confronter sans tenir en compte le développement historique.
Par une analyse plus fine nous pouvons trouver des usages implicites des fonctions à l'école élémentaire et après avec les polynômes. Ces usages peuvent être aussi trouvés dans l'histoire des mathématiques. Très souvent ils cachent le concept de variable comme il est présenté en logique.

Introduction
L'idée fondamentale qui a donné source à ce travail réside dans le fait que le concept de fonction, qui est vu comme porteur dans l'approche didactique des mathématiques à l'école secondaire supérieure en Italie, est loin d'être clair et défini et, surtout, n'est pas traité avec continuité dans sa présentation.

Nous sommes ainsi partis de l'analyse de 23 manuels, 11 du cours des deux premières années d'école secondaire supérieure (biennio) et 12 des trois dernières années de l'école secondaire supérieure(triennio), pour voir comment les fonctions y sont présentées[1].
Le concept de fonction est apparu la première fois en Italie dans le programme de l'Institut technique de Bergamo le 1906. Ensuite, ce concept est présent dans les programmes du 1913 pour le "lycée modern" qui a été d'ailleurs supprimé après la Grand Guerre et finalement les fonctions sont présentés dans les programmes du 1945 (cfr Vito).
Donc il s'agit d'un concept très "jeune" dans l'école italienne.
Par contre pour Youschkevitch (1981) une idée vague de fonction été présente déjà dans l'antiquité. Dans l'époque moderne le concept de fonction a pris petit à petit des connotations plus claires.
La récherche international sur l'argument est riche (voir par exemple, Harel & Dubinski, arcavi & Nachmias); en Italie aussi l'argument est bien present (voir Prodi, Boero & Garuti, Ferrando).
Nous avons voulu chercher, par un questionnaire, quelles idées de fonction étaient présentes chez les élèves en tenant compte de ce qu'ils ont appris à l'école.
Nous sommes allés aussi au-delà des intentions effectives de la présentation didactique du concept; par exemple nous avons voulu voir quel rôle a la continuité dans l'intériorisation du concept de fonction, si la différence entre fonction et graphique est perçue, comment est compris le domaine des fonctions, comment est vu le concept d'égalité entre deux fonctions et finalement comment sont ressenti les aspects purement logiques (syntaxique, sémantique et morphologique) qui sont inclus dans le concept de fonction (voir aussi Sfard-1992- et Sierpinska-1992).
Nous avons estimé que l'aspect logique est particulièrement important parce que, en plus de sa vision 'interne', c'est celui qui est souvent passé sous silence et le moins correctement traité dans les manuels.
Nous ne nous sommes pas préoccupés des propriétés des fonctions en pensant qu'il s'agit d'une étape successive et moins importante pour la compréhension du concept.

Un bref aperçu historique
En tenant compte de ce qui c'est passé de l'époque moderne à nous jours, on peut indiquer comme personnages principaux pour l'histoire de la définition de fonction les suivants (IUFM 1 Poitiers):

1694 LEIBNIZ (1646 - 1716)
"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe".

1718 BERNOULLI J. (1667 - 1748)
"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." Notation φ x.

1748 EULER (1707 - 1783)
"Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur...Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité

[1]A ce propos, nous avons analysé les définitions de relation, de fonction, de domaine et de codomaine et nous avons vérifié s'il y a une définition d'égalité entre fonction.

universelle qui comprend toutes les valeurs déterminées...Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, a+3z; az-4zz; az+b$\sqrt{aa\text{--}zz}$; cz; etc., sont des fonctions de z. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable."

1755 EULER "Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autre. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x."

1782 CONDORCET (1743 - 1794)
"Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x,y,z, ... F, et que pour chaque valeur déterminée de x,y,z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent: je dis que F est une fonction de x,y,z,...
Enfin je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x,y,z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z; je saurai que F est fonction de x,y,z."

1797 LAGRANGE (1736 - 1813)
1. "On *appelle fonction* d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. 2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x2 ou a+bx ou etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$ f(a + bx), etc. désigneront des fonctions de x^2 , de a + bx, etc. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons f(x, y), et ainsi des autres."

1797 LACROIX (1765 - 1843)
"Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première."

1821 FOURIER (1768 - 1830)
"En générale, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire."

1821 CAUCHY (1789 - 1857)
"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces

diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable."

1834 LOBATCHEVSKY (1792 - 1856)
"La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux; ou, finalement, la dépendance peut exister mais reste inconnue."

1851 RIEMANN (1826 - 1866)
"Soit z une quantité variable, qui prend peu à peu, toutes les valeurs réelles possibles, alors on appelle w une fonction de z, si à chacune de ces valeurs correspond une valeur unique de la quantité indéfinie w, et si z parcourt continûment toutes les valeurs qui se trouvent entre deux valeurs constantes, w change aussi continûment, alors on appelle cette fonction continue."

1870 HANKEL (1839 - 1873)
"On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x."

1902 LEBESGUE (1875 - 1941)
"Bien que, depuis Dirichlet et Riemann, on s'accorde généralement à dire qu'il y a fonction quand il y a correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1,x_2,....$ sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens semblent ne considérer comme de vraies fonctions que celles qui sont introduites par des correspondances analytiques. On peut penser qu'on introduit peut-être ainsi une restriction assez arbitraire; cependant il est certain que cela ne restreint pas pratiquement le champ des applications, parce que seules, les fonctions représentables analytiquement, sont effectivement employées jusqu'à présent."

1939 BOURBAKI
"Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x.
On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation ' donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée."

1927 VEYL (1885 - 1955)
"Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais une fonction f est définie si par un moyen quelconque on peut associer à un nombre a, un nombre b... On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument".

A cette liste on peut ajouté S. Mac Lane et il nous semble intéressant de signaler ce qu'il écrit sur le concept de fonction (1986) :

« "**What is a function**?".

The various intuitive ideas about functions and functional dependence are helpful but vague. Here are some of them.

Formula. A function is a formula in a letter x. When x is replaced by a number, the formula produces a number, the value of the function for the given argument x.

This description is not very helpful for notions of functional dependence of variable quantities in physics, but it does describe the elementary Mathematical function well: Polinomial, rational, algebraic, trigonometric, and exponential functions. The idea of "formula" does need to be specified. It should include algebraic or "analytic" formulas, perhaps also the formulas given by infinite series, but it doesn't seem to encompass functions defined by several different formulas in different portions of the domain. The essential problem remains: What sorts of formulas are envisaged? Are all functions given by formulas? “Formulas” depend on the symbolism, but function depend upon the facts.

Rule. The variable y is a function of the variable x when there is given a rule which to each value of x produces the corresponding value of y.

This description, and its variants, has for generations puzzled the students of calculus. It has a pleasant generality: Any “rule” will do. Also, the use of rules clearly takes care of the case of function defined by different formulas in different portion of the domain; any such collection of alternative formulas is clearly a *rule*. Neverthless this is not a formal definition, since it uses the undefinied words “corrresponds” and “rule”. Even if one defines a rule as something expressed in a specified formal language, there are troubles. (In the usual formal languages, the set of all formal expressions is denumerable, while the set of possible functions on R to R is not denumerable).

Graph. A function is a curve in the (x,y)-plane, such that each vertical line x = a meets the curve in at most one point with coordinates (a,b). When it does so meet, the number b is the value of the function at the argument a. For other arguments a, the function is undefined.

The description emphasizes the geometric aspect. It is persuasive for functions of real numbers which are smooths or at least continuous, but doesn't fit well with a function which jumps from 0 to 1 as the variable changes from rational to irrational. It involves also the (undefined) notion of a curve, and so makes arithmetic depends upon geometry.

Dependence. The variable quantity y is a function of the quantity x if and only if a determination of the value of x also fixes the value y, so that y depends on x.

This, a physicist's definition, is also not formal.

Tables of Values. A function is determined by a table of values, which opposite to each entry for the first quantity x lists the corresponding numerical value for the second quantity y.

This is a hard-nosed, no nonsense definition; evidently inspired by table of trigonometric or logarithmic functions. Trouble is, the actual tables are finite while most of the intended functions have infinitely many different values. It is not clear what would be meant by an infinite table.

Syntax. A function f on a set X to the set Y is a simbol f such that whenever the term x stands for an element of X, then the string of symbols fx stand for an element of Y, the value of f at the argument x.

This doesn't really describe functions, but just the use of symbols for functions. It is a mute protest against the confusion of standard notations in which f(x) ambiguously denotes a function of x and a value of that function. (Thus strictly speaking, "sin" is the trigonometric function, while "sinφ" denotes its value at the angle φ.

Enough. The variety of these descriptions of "function" illustrate well one of our theses as to the nature of Mathematics: Human activities and facts about phenomena togheter indicate many examples of dependence of one item upon another. This leads to useful but informal idea about dependence and functions - and poses the problems of producing a formal definition, necessary to make unambiguous Mathematical statements about functions.»

Le questionnaire

Le questionnaire a été construit selon les tableaux suivants, où nous avons indiqué, pour chaque item, à quelle typologie de fonction (selon Mac Lane) il appartient, les finalités, les problèmes associés, les aspects logiques et les liaisons avec les autres item:

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres item
1	Fonction comme tableau	L'approche déjà présent dans C. Ptolémée, est typique du ce qu'on fait en Physique et en Statistique, quand on compile des tableaux de donnés. Nous voulions rendre évidents surtout trois aspects: 1) si et combien l'usage de lettres "non canoniques" comme variables peut déranger ; 2) si les élèves ont des exigences de trouver une loi liant les valeurs données; 3) comment les élèves voient le domaine et le codomaine, c'est à dire s'ils interprètent domaine et codomaine comme des intervalles où bien des ensembles	1) Hypostatisation des variables 2) L'idée de continuité (qu'on voit quand le domaine et le codomaine sont exprimés par des intervalles) 3) Si l'idée de fonction est toujours liée à celle de loi ou bien s'il y a une approche par les ensembles	Selon nous quelques réponses mettent en évidence des aspects logiques particulières: 1) répondre **oui**: vision sémantique du tableau (vu comme données liés à un contexte) **2)** **oui motivé** avec l'idée d'une loi: vision syntaxique	Les réponses sur domaine et codomaine sont liées à 2, 3.c) et 3.d) pour évaluer combien est forte l'idée de continuité liée au concept de fonction
2	Fonction comme graphique	Dans cette question l'aspect le plus évident concerne la continuité du graphique proposé. Ce qu'on voulait voir était si la continuité influence l'interprétation d'un graphique comme fonction. Il y a aussi un problème avec le domaine: tous les livres utilisés introduisent le domaine comme l'ensemble des valeurs ayantes une et une seule image; en ce cas on voulait voir si les élèves limitent dans un façon "naturelle" le domaine à l'intervalle sur lequel le graphique est défini.	1) Le rôle joué par la continuité 2) La restriction du domaine 3) La conception entre figuratif de l'espace	**1)** **Non** et **non motivé avec non continue**: réponses sémantiques (elles font penser au graphique inséré dans le milieu des fonctions réelles avec variable réelle de l'analyse); **2)** **Non motivé** avec non continue et **segments**: réponse syntaxique (on pense à l'être géométrique)	Voir item 1. Item 4.e) dans lequel il y a l'équation du ce graphique.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres item
3	Fonction comme graphique	On rencontre l'usage de graphiques de cette façon sur un tas de media, pour cela ils participent à l'expérience mathématique aussi de ceux qui ne s'occupent pas de Mathématique. En plus la représentation d'un graphique discret comme s'il était continu peut conditionner la conception. À partir de ça nous voulons voir 1) combien d'influence a la continuité (dans ce cas induite par la représentation, mais non pas de la nature des données qui sont discrets); 2) si la représentation empêche l'individuation des éléments de la fonction (vue comme ensemble de couples ordonnées) 3) si l'idée de fonction entraîne de nécessité celle de loi; 4) si la fonction est interprétée indépendamment de la forme d'un de ses graphiques.	Le problème principal est du à l'exigence (par les personnes qui utilisent ces graphiques) de représenter des valeurs discrets liées entre elles. Nous voulons voir si cette représentation conditionne le concept de fonction. Il y a donc un problème complémentaire a celui de l'item précédent. Les problèmes liés à la continuité sont exprimés aussi dans l'indication du domaine et du codomaine. En plus il y a un problème de représentation, qui passe à travers la reconnaissance des éléments de la fonction. Dans un certain sens les questions le plus ambiguës et le plus difficiles à interpréter sont, selon nous, les 3.e) et 3.f).	Les aspects logiques de l'item sont assez complexes parce qu'ils dont liés entre eux. Pour leurs lecture voir graphique en 'Evaluation des Aspects syntaxiques et sémantiques'.	Voir item 1. En plus, item 1 pour la représentation tabulaire et celle graphique. Pour les aspects logiques, les résultats ont étés comparés avec ceux des items 5-8.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres item
4	a) règle b) formule c) règle d) fonction implicite e) règle	L'item est pensé pour voir combien une écriture est reconnue comme fonction; en particulier dans les questions a) et c) on veut voir: 1) si les variables appelées par de noms "non canoniques" peuvent empêcher la compréhension; 2) combien d'influence a dans la réponse l'interprétation sémantique des écritures comme formules pour le calcul des aires des figure de la Géométrie. Dans la question b) on veut mettre en relief si la distinction entre polynômes et fonction polynomiales est évidente, tandis que dans d) on veut voir si la présence des deux variables "canoniques" suffit pour regarder l'écriture comme fonction. Dans la question e) on veut voir comme sont considérées les "fonctions en morceaux" surtout par rapport au domaine et quand la fonction est exprimée avec plusieurs lois.	1) Hypostatisation des variables 2) Reconnaissance explicite d'une loi associée à une fonction 3) Fonction avec plus variables	1) Hypostatisation des variables 2) Aspects sémantiques relatifs à l'expression des aires des figures géométriques.	Voir item 2
5-6	Règle	Les deux items sont pensés pour examiner des questions relatives à l'interprétation de formules définissants une fonction 'classique' de l'analyse. En particulier, on veut mettre en relief dans quelle mesure soit 'senti' ou 'lu' l'ensembles sur lequel la fonction est définie et si le nome des variables influence la lecture. En plus, on va commencer à traiter de façon analytique le concept d'égalité de fonctions.	Égalité des fonctions	1) Domaine d'une fonction: sémantique 2) Expression d'une fonction: syntaxique 3) Nom des variables: morphologique Pour un tableau complet des résultats, voir l'aperçu (B).	Nous avons relié les items 5, 6, 7 et 8 pour une analyse des aspects syntaxiques et sémantiques.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres item
7	Règle	Dans cet item nous voulons voir dans quelle mesure l'écriture différente (c'est à dire l'aspect syntaxique-morphologique) influence le concept d'égalité de fonctions	1) Égalité des fonctions 2) Représentation des fonctions	1) Égalité des fonctions: syntaxique 2) Graphique et domaine: sémantique 3) 'Écritures' différentes: morphologique	Voir item 5-6
8	Règle	Dans cet item on fait une référence explicite aux domaines des fonctions par l'indication seulement des lois et non des ensembles dans lesquelles sont définies. Nous avons voulu voir si, faute d'indications explicites, l'interprétation en R est naturelle.	1) Domaine d'une fonction 2) Différence entre loi et fonction	1) Égalité des domaines: syntaxique (il regarde seulement la règle) 2) Domaines différents: sémantique (il pense la règle interprétée)	Voir item 5-6
9	Règle	Dans ce cas l'attention est adressée au rôle des variables pour reconnaître deux fonctions comme égales.	1) Égalité des fonctions 2) Égalité des graphiques de fonctions	1) Graphiques différents: sémantique 2) Fonctions différents à cause des variables: morphologique	Il se lie à 5 et 6 pour l'échange des variables; en particulier, si on a beaucoup de réponses a, les réponses négatives à 5 et 6 sont à considérer peu influencé par l'échange des variables

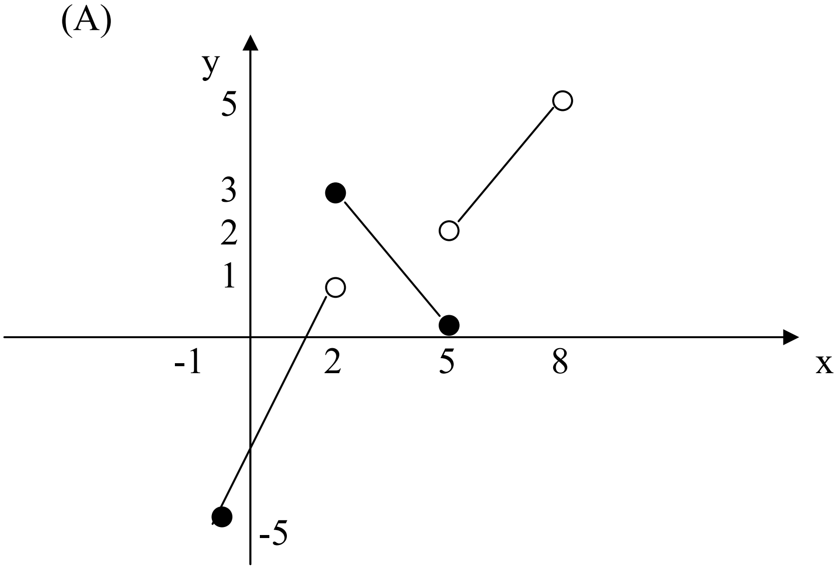
QUESTIONNAIRE

1) Le tableau à cotè on va l'utiliser en statistique. Tu dois dire s'il est celui d'une fonction en spécifiant domaine et codomaine.

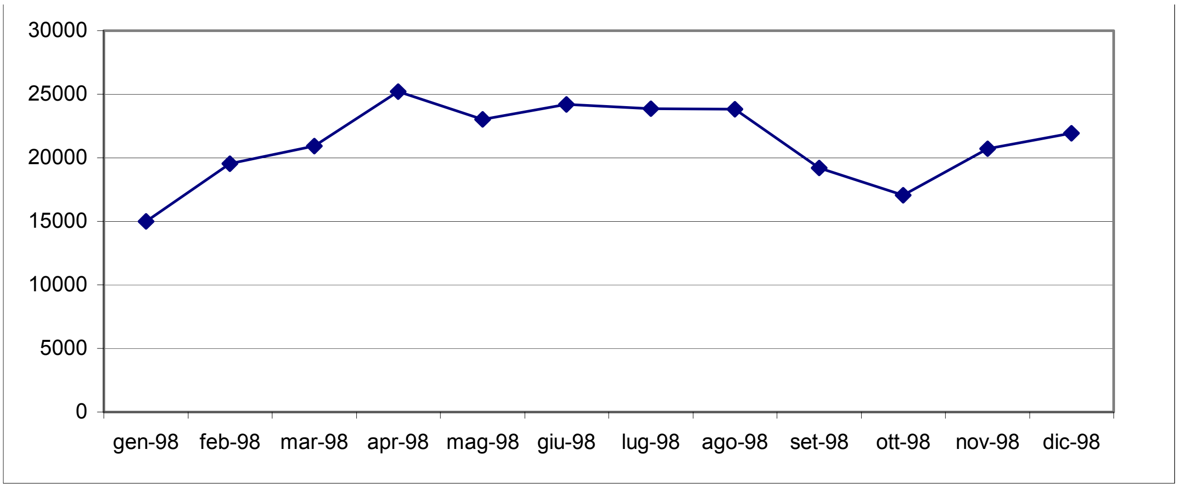
z	t
0,0	0,3989
0,1	0,3970
0,2	0,3910
0,3	0,3814
0,4	0,3983
0,5	0,3521
0,6	0,3332
0,7	0,3123
0,8	0,2897
0,9	0,2661
1,0	0,2420
1,1	0,2179
1,2	0,1942
1,3	0,1714
1,4	0,1497

2) Est-ce que le graphique suivant représente le graphique d'une fonction? Justifie ta réponse.

(A)

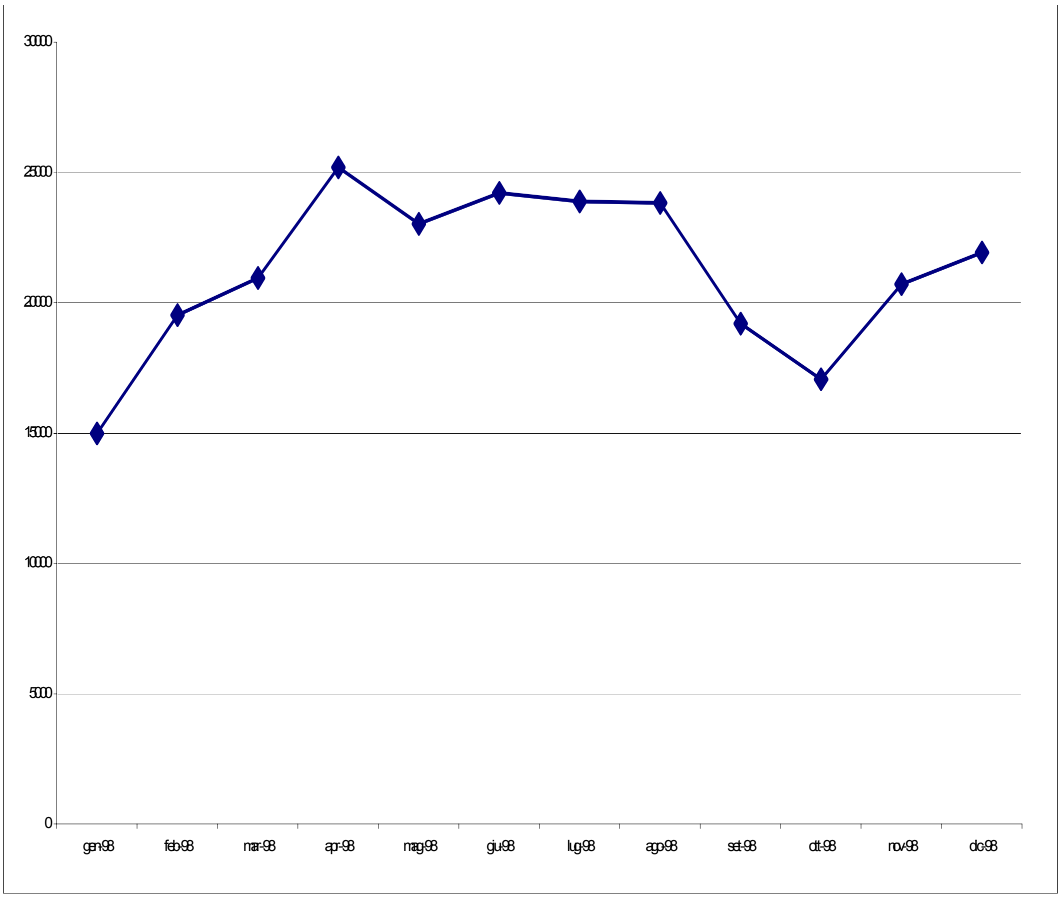


3) Le graphique suivant montre le cours de l'index Mibtel de la Bourse italienne pendant le 1998.



Réponde aux questions suivantes:

a) Est-ce que c'est une fonction?………………………………………………………………………………
b) Est-ce qu'il représente une fonction?……………………………………………………………………
c) Quels sont les éléments du domaine?…………………………………………………………………..
d) Quels sont les éléments du codomaine?…………………………………………………………………
e) Dans le graphique, quels sont les éléments de la fonction?……………………………………………..
f) Comment on peut représenter la fonction associée au graphique?………………………………………
g) Est-ce qu'il y a une loi qui lie les variables impliquées?………………………………………………..
h) Est-ce que le graphique précédent et le suivant sont différents? …………………………………….



4) Indique, en motivant la réponse, quelles "écritures", parmi les suivantes, peuvent être des fonctions:
   a) $A=\pi\bullet r^2$...
   ....
   b) $3x^3+2x^2-1$..
   ....
   c) $A=\frac{b\bullet h}{2}$ ....
   ....
   d) $x^2+y^2=4$ ....
   ....
   e) $$y=\begin{cases}2x-3 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2\le x\le 5\\ x-3 & 5<x<8\end{cases}$$
   ....

Pour chacune des questions proposées de 5) à 9) indique quelles affirmations entre a)-d) sont vraies et quelles sont fausses:

	Vraie	Fausse	Je ne sais pas
5) Les fonctions $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ et $y=\frac{t+1}{t-1}$ définies en N			
a) sont égales	____	____	____
b) ont le même graphique	____	____	____
c) ont des domaines différents	____	____	____
d) sont différentes	____	____	____
6) Les fonctions $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ et $y=\frac{t+1}{t-1}$ définies en R			
a) sont égales	____	____	____
b) ont le même graphique	____	____	____
c) ont des domaines différents	____	____	____
d) sont différentes	____	____	____
7) Les fonctions f, g, h définies en R par $f(x)=x$, $g(x)=x\bullet 1$, $h(x)=x+0$			
a) sont égales	____	____	____
b) ont le même graphique	____	____	____
c) ont des domaines différents	____	____	____
d) sont différentes	____	____	____
8) Si on indique par D_f e D_g les domaines des fonctions $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ et $g(x)=\frac{1}{x+2}$ on peut dire que			
a) $D_f=D_g$	____	____	____
b) $D_f\neq D_g$	____	____	____
c) on ne peut pas répondre	____	____	____
d) $D_g\subseteq D_f$	____	____	____
9) Les graphiques des fonctions $y=\frac{x^4+x^3}{x^3-x^2}$ et $y=\frac{t^4+t^3}{t^3-t^2}$ définies en R sont			
a) égaux	____	____	____
b) différents parce que les fonctions sont différentes	____	____	____
c) differentes perce qu'il ont des points differénts	____	____	____
d) différents à cause du zéro	____	____	____

Le questionnaire a été assigné à 99 élèves: 28 du lycée scientifique (14 ans; nous indiquerons cette classe par I), 22 de la deuxième année de l'école technique commerciale (15 ans; II), 19 de la quatrième année de l'école technique pour géomètres (17 ans; IV), 16 de la 5e lycée artistique (18 ans; Va) et 14 de la 5e lycée linguistique(18 ans; Vs). Les résultats du questionnaire sont résumés dans le tableau suivant (les nombres à gauche des réponses ont été utilisés pour une évaluation par Excel). Après il y a l'évaluation des aspects logiques et de la continuité.

TABLEAU D'ÉVALUATION DU QUESTIONNAIRE (on a mis en evidence les aspects *syntaxiques*, les aspects **sémantiques** et les aspects morphologiques; entre parenthèses c'est indiqué le nombre des réponses):

1) a)-Réponses à "C'est une fonction"

-1: échange de variables	(3)
0: aucune réponse	(37)
1: non	(0)
1,5: non motivé	(2)
2: **oui**	(36)
2,5: *oui motivé (proportionnalité inverse)*	(9)
3: oui motivé par caractère fonctionnel	(12)

b) Réponses à domaine e codomaine

10: domaine ou codomaine; 0: +variables; 1: +intervalle; 2: +ensemble	(0 ; 1 ; 0)
20: domaine et codomaine; 0: +variables; 1: +intervalle; 2: +ensemble	(31 ; 16 ; 3)

2)

0: aucune réponse	(11)
1: **non**	(5)
1,5: non motivé	(50)
1,75: **+discontinuité** *(+discontinuité* par droite)	(10)
2: oui	(7)
2,5: oui motivé	(11)
3: + discontinuité	(4)

3) a) 0: il ne réponde pas (9)
1 ; 1,5: non; +motivation (24-4)
2; 2,5: **oui; +motivation** (51-6)

b) 0: il ne réponde pas (16)
1 ; 1,5: non; +motivation (14-1)
2; 2,5: *oui; +motivation* (66-2)

c) 0: il ne réponde pas (21)
1: intervalle, jours, axe x (10)
2: mois (51)
3: autre (17)

d) 0: il ne réponde pas (30)
1: intervalle, axe y (19)
1,5: valeurs marquées (1)
2: valeurs,numbres,points index Mibtel (18)
3: index (4)
4: autre (26)

e) 0: il ne réponde pas (37)
1: mois et valeurs
(LET. PROCEDURALE) (25)
1,5: **points** (22)
1,75: **couples** (2)
2: mois ou valeurs (9)
3: autre (4)

f) 0: **il ne réponde pas** (84)
1: **couples ou par un tableau** (4)
2: autre (4)
3: *loi* (7)

g) 0: il ne réponde pas (42)
1 ; 1,5*: non; +motivation* (20-3)
2; 2,5: oui; +motivation (33-1)

h) 0: il ne réponde pas (6)
1 ; 1,5: non; +motivation (60-30)
2; 2,5: oui; +motivation (3-0)

4)

	a	b	c	d	e
0: non	35	77	43	61	38
0,5: non motivé	0	4	2	3	0
1: oui	29	11	30	21	30
1,5: oui motivé	39	7	24	14	31

NB: Dans le rénses suivantes ne viennent pas montrés les **non** (implicites ou explicites) qu'on peut calculer par différence

5)

	a	**b**	**c**	d
0: non				
0,5: non motivé	0	0	1	0
1: oui	25	14	16	34
1,5: oui motivé	3	0	3	4

6)

	a	**b**	**c**	d
0: non				
0,5: non motivé	0	0	0	0
1: oui	14	23	35	26
1,5: oui motivé	0	1	4	3

7)

	a	**b**	**c**	d
0: non				
0,5: non motivé	0	0	0	0
1: oui	62	35	11	6
1,5: oui motivé	3	0	0	0

8)

	a	b	c	d
0: non				
0,5: non motivé	0	0	0	0
1: oui	26	32	3	39
1,5: oui motivé	1	3	0	2

9)

	a	b	**c**	d
0: non				
0,5: non motivé	0	0	0	0
1: oui	73	4	4	1
1,5: oui motivé	9	0	0	0

ÉVALUATION DU QUESTIONNAIRE

Évaulation de la continuité

Nous avons consideré 4 points:

a) le domaine et le codomaine de l'item 1 (l'idée de continuité est vue en les intervalles), à laquelle nous avons assigné un point;
b) la motivation que le graphique de l'item 2 ne représente pas une fonction parce qu'il n'est pas continu; à cette motivation nous avons assigné 1,5 points puisque c'est une idée plus forte
c) les réponses aux item 3.c) et 3.d) à lesquelles nous avons assigné 2 points (1+1) quand les élèves ont indiqués des intervalles.

Évaluation des aspects syntaxiques et sémantiques

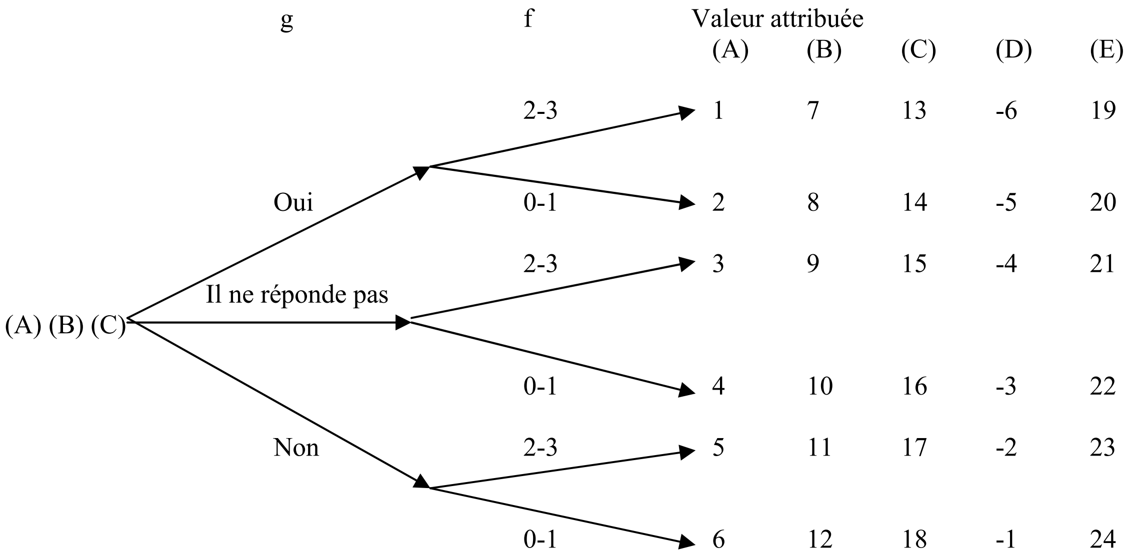
L'évaluation a été faite parmi deux paramètres: la condition liée à l'item 3 et celles relatives aux item 5-8.

Pour l'item 3 l'évaluation a été faite par un diagramme en arbre construi en partant des réponses aux item a) e b).

En la premiere phase nous avons consideré les couples de réponses respectives (motivées ou non)

(A) Non-Oui (syntaxique)
(B) Oui-Oui (sémantique-syntaxique)
(C) Oui-Non (sémantique)

Aprés nous avons valué les réponses de 3.g) et 3.f) (en l'ordre) selon un degré décroissant des aspects syntaxique et croissant des aspects sémantiques (voir le diagramme sous-reporté; pour les réponses 0,1,2,3 relatives à 3.f) il faut regarder le tableau d'évaluation du questionnaire)



Comment nous avons dit, la valeur attribuée suit un'échelle décroissante des aspects syntaxique et croissant des aspects sémantiques. Nous avons consideré à part les cas

(D) Il ne réponde pas-Oui (maximale syntaxique)
(E) Oui-Il ne réponde pas (maximale sémantique)

aux quels on a attribué les valeurs qn'on peut voir en le diagramme.

Aux cas

(F) Non-Non
(G) Il ne réponde pas-Il ne réponde pas

nous avons attribué le valeur zéro, indépendamment des réponses de 3.g) et 3.f).

Pour l'évaluation à propos des aspects syntaxiques et sémantiques de l'idée de fonction, nous avons examiné aussi les item 5-8 et qu'ils sont montré en le tableau d'évaluation du questionnaire.
En particulier nous avons examiné les points 5 a,b,c ; 6 a,b,c ; 7 a,b,c ; 8 a,b,d en assignant 1 pour chaque réponse "sémantique" et -1 pour chaque réponse syntaxique et puis nous les avons additionnés. Puisque l'équilibre est 1, chaque valeur inférieure ou supérieure à celle-ci fait pencher vers une idée ou l'autre.
Aprés, ces deux résultat ont été comparés.

Évaulation des aspects morphologiques
Nous avons consideré les item 5.d), 6.d), 7.d) et 9.b) aux quels nous avons attribué 1 point pour chaque réponse affirmative et puis nous les avons additionés (les total est compri entre 0 et 4).

L'évaluation qu'on a choisie nous semble la meilleure pour nos buts.
Pour l'item 3 l'équilibre est à peu près autour des valeurs 9-10. De l'analyse des résultats on trouve: 45/99 ont une vision sémantique et 40/99 une vision syntaxique, sans différence substantielle entre les résultats du biennio et ceux du triennio. Cet équilibre change si on enlève les résultats de la classe Va; de cette façon on a 29/83 'sémantiques' et 41/83 'syntaxiques'.
Le résultat est intéressant et sous certains aspects surprenant. Des graphiques comme celui que nous avons proposé sont peut-être la liaison la plus forte entre le concept de fonction et la quotidienneté. La priorité d'une vision syntaxique entraîne un renforcement de l'idée que le graphique soit 'réglé par quelque chose'. A ce propos le résultat de la classe I est significatif: 13/28 sémantiques et 7/28 syntaxiques. Selon nous ces nombres sont justifiés par l'habitude que la physique donne aux élèves de représenter des données expérimentales par des graphiques, sans se préoccuper de leur provenance. On trouve confirmation de cela même en analysant le nombre des élèves qui ont répondu de la même façon (positivement ou négativement aux items 2 et 4.e): en I il y en a seulement 10/28, par rapport aux 21/30 de Va et Vs (pour des problèmes sur la photocopie nous ne considérons pas les réponses des classes II et IV). Cela ne signifie pas que le saut épistémologique qu'on a quand on passe du graphique d'une fonction à sa loi ait été fait en V et pas en I. En effet parmi les 38/99 élèves qui ont exclu que 4.e) soit une fonction, personne ne motive sa réponse; en particulier personne ne parle de la discontinuité, comme au contraire cela a été motivé par 10/99 pour l'item 2. Deux élèves de V classifient l'item 2 comme le graphique d'une fonction par morceaux, tandis que 3, différents des précédents, classifient 4.e) comme fonction par morceaux. Il faut aussi remarquer que 'fonction par morceaux' est une expression ambiguë qui se relie à la continuité selon Euler (voir Youschkevitch).
A propos de la continuité, 27/49 élèves du triennio et 13/50 du biennio ont obtenu au moins un point. Le résultat montre que l'obstacle épistémologique de la continuité est plus fort au triennio.
L'analyse des items 5-8 a montré une différence significative entre biennio et triennio: 29/50 élèves du biennio ont une vision syntaxique et 10/50 sémantique. Au triennio nous avons des résultats opposés: 26/49 'sémantiques' et 9/49 'syntaxiques' (22/30 'sémantiques' et 1/30 'syntaxiques' si nous considérons seulement les classes Va et Vs).
Selon nous, pour les élevés du biennio le rôle du calcul littéral est très fort tandis que la différence entre fraction algébrique et fonction rationnelle fractionnaire n'est pas claire (parmi les 18 élèves qui disent que 4.b) est une fonction, 10 appartiennent à la classe I). Au contraire, les élèves du triennio interprètent naturellement les lois en R (Grugnetti 1994) et négligent les aspects morphologiques pour ne voir que le 'résultat' obtenu. En effet dans l'évaluation morphologique que nous avons faite sur les items 5.d), 6.d), 7.d) et 9.d) où l'équilibre est supposé 1 (pour les réponses qu'ils auraient dû donner selon la pratique didactique la plus commune), 14/30 élèves de Va et Vs ont obtenu une valeur inférieure à 1 et 7/30 une valeur supérieure (en général pour le triennio: 19/49 et 12/49); pour les élèves du biennio les résultats sont: 25/50 ont obtenu une valeur inférieure à 1, 7/50 une valeur supérieure à 1.

Conclusions

Les Mathématiques ne sont pas un corps clos ni terminé. La notion de fonction qui a une longue histoire, depuis la définition donnée par Bourbaki en 1939, a eu d'autres interprétations et généralisations:

- les transformations naturelles de Eilenberg et Mac Lane 1945 (lois) et la Théorie des Catégories qui a suivi;
- la Théorie des Faisceaux (Leray 1945) (local-global) (cf Gray);
- la Théorie des Distribution (Schwartz 1950).

Ces sujets sont traités à l'Université et peuvent rentrer dans l'apprentissage des enseignants, mais souvent sans qu'on harmonise les différentes notions avec celle qu'on va enseigner à l'école.

Étant donné le développent actuel des Mathématiques, on ne peut pas proposer aucune définition "juste" de fonction, mais seulement souligner des aspects problématiques qui sont intrinsèques des différentes définitions, en mettant à jour leurs raisons et leur chemin dans l'histoire. Le processus contrôl-échec-adaptation (Ernest) doit faire partie de l'enseignement-apprentissage, du moment que ce processus n'est pas encore terminé dans la communauté mathématique, donc il n'a pas lieu au dogmatisme.

Selon nous, la définition "moderne" de fonction est le meilleur compromis entre différentes conceptions; elle est la plus cohérente si on utilise les ensembles comme fondement des Mathématiques. Mais cette définition n'est pas épistémologiquement neutre en privilégiant le cadre "classique"; dans l'Intuitionnisme où dans le Prédicativisme les notions de fonction sont fort différentes (cr Borga, Palladino et NRD Modena).

Des aspects logiques, analytiques et géométriques ont pris place dans la notion de fonction. Tout ça demande une coordination des registres pour laquelle chaque aspects joue le rôle de médiateur pour les deux autres.

En lisant les graphiques on peut prendre une attitude "statique" (au sens de Bacciotti-Beccari) où "dynamique": la vision statique du graphique participe à l'idée en acte d'infini, tandis que l'interprétation dynamique sous-entend un temps de "déroulement" de gauche à droite, en répétant le mouvement de la main qui dessine. La vision dynamique participe à l'idée d'infini en puissance.

D'autre part il y a un conflit entre la ligne (continue) et les points (qui sont pensés comme discrets) (cf Nordon). Tout ça a pris beaucoup de temps historique et n'entre pas "naturellement" dans l'intuition des élèves.

Les réponses aux questions nous montrent qu'il y a des différences entre le style d'apprentissage des élèves: les uns préfèrent les aspects morphologiques et syntaxiques (langage), les autres les aspects sémantiques (méta-langage).

Ce qui nous semble un véritables *Obstacle Épistémologique* est la présence d'une notion intuitive de continuité aussi dans ceux qui n'ont pas encore traité l'argument. La continuité empêche la *réification* (dans le sens de Sfard 1991) de la définition "abstraite".

Il y a aussi un phénomène de "*hypostatisation*" des indéterminées, c'est à dire, on confère un signifié concret et autonome aux lettres x et y et ça est une cause des difficultés dans les autres Sciences.

La définition à la Bourbaki demande un développement de la Théorie des Ensembles poussé bien au-delà des simples aspects intuitifs: il s'agit de traiter avec des couples ordonnées (cf Whitehead-Russell et Peano) et leurs écritures: {{a,1},{b,2}} (Hausdorff) ou {a,{a,b}} (Wiener) (cf Mangione-Bozzi) ou {{a},{a,b}} (Kuratowski) ou bien "concept primitif" (Peano).

Tout ça entraîne un problème de hiérarchie de types (simples à la Ramsey et Chwistek). À notre avis la complexité des types est un vrai Obstacle Épistémologique.

Il y a une dialectique entre *extension* et *intention*: fonctions comme ensembles et fonctions comme formules, en réfléchissant sur la différence entre fonction et expression analytique.

Quelque suggestion didactique:

- faire des représentations avec échelles différentes (logarithmique aussi) pour distinguer la fonction dés ses représentations;
- maintenir séparées les deux notions de fonction en Algèbre et en Analyse, avec deux appellations (*application* et *fonction*). Souvent les fonctions algébriques (applications) n'ont pas besoin d'expressions analytiques, ni d'infini ni de la continuité; selon nous c'est plus facile la réification de celles-ci. Les fonction analytiques (fonctions) ont des problèmes lies à l'expression analytique par laquelle souvent sont données et aussi à leur statut procédural. Seulement à la fin de l'école on pourra identifier leurs aspects communs.
- Est opportun de distinguer entre codomaine et image.
- On doit remarquer qu'il y a un tas de fonctions réelles de variable réelle qui n'ont pas une expression analytique; tandis que chaque fonction a son domaine, mais si on n'a pas une expression analytique la détermination du domaine peut être impossible. Tout ça entraîne des conflits entre syntaxe et sémantique.
- Traiter d'une manière profonde les problèmes de l'égalité entre les fonctions.
- Distinguer les rôles des indéterminées, variables, constantes, inconnues, paramètres, en faisant attention à la dimension logique du sujet.

Bibliographie

APMEP.: 1981 Fragments d'histoire des mathématiques. Brochure n'41.

Arcavi, A. and Nachmias, R.: 1993, 'What Is Your Family Name Ms. Function? Exploring Families of Functions With a Non-Conventional Representation' Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching 12 (3/4), 315 - 329.

Bacciotti, A. and Beccari, G.T.: 1988, 'Problemi didattici nei corsi universitari. L'introduzione del concetto di funzione', *Archimede*, XL, 41 - 49.

Boero, P. and Garuti, R.: 1999, 'Les inéquations fonctionnelles: lieu de developpement et d'étude de la maitrise des fonctions', Preprint Sfida 10.

Borga, M. and Palladino, D.: 1997, *Oltre il mito della crisi - Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia.

Bourbaki, N.: 1939, *Elements de Mathématiques*, *Livre I, Ch. 2*, Hermann, Paris.

Chwistek, L.: 1922, 'Uber der Antinomien der Prinzipien der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift,14, 236 - 242.*

Eilenberg, S. and Mac Lane, S.: 1945, 'General Theory of Natural Equivalences' Transactions of the Americal Mathematical Society, **58,** 239 - 294.

Ernest, P.: 1993, 'Il costruttivismo sociale come filosofia della matematica: riabilitazione del costruttivismo radicale', Speranza, F. (Ed.)*Quaderni di Didattica della Matematica e dei suoi fondamenti*, n. 1.

Dahan-Dalmedico, Peiffer.: 1986 Une'histoire des mathématiques. Seuil 1986 (Points Sciences n'49). Chap.6.

Dedekind, R.: 1926, *Essenza e significato dei numeri - Continuità e numeri irrazionali*, Traduzione dal tedesco di Oscar Zarinski, Alberto Stock Editore, Roma.

Dhombres & alii. Mathématiques au **fil** des áges. Gauthier-Villars 1987. Chap.4.

Ferrando, E.: 1999, 'A multidisciplinary approach to the interpretation of some difficulties in learning Mathematica Analysis', i*Proccedings of 50-th CIEAEM, Neuchatel, 1998*, 308 - 312.

Gray, J.W.: 1979, 'Fragments of the Histiry of Sheaf Theory', Fourman, M.P. and Mulvey, C.J. and Scott, D.S. (Eds.) *Applications of Sheaves,* Lecture Notes in Mathematics, n. 753, Springer, Heidelberg.

Groupe d'histoire des mathématiques. "Vous avez dit: Fonction?". Feuille de vigne N' spécial. IREM de Dijon 1982.

Grugnetti, L: 1994, ‘Il concetto di funzione, difficoltà e misconcetti’, L'educazione Matematica, Anno XV - Serie IV - Vol. I, n.3, 173 - 183.
Harel and Dubinski.: voir Sierpinska 1992.
Hausdorff, F.: 1914, Grundzüge der Mengenlehre
Kuratowski, C.: 1921, ‘Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles’, *Principia Mathematica*, Tom II, ?-171.
Mac Lane, S.: 1986, *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg
Mangione, C. and Bozzi, S.: 1993: *Storia della Logica - Da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano.
N.R.D. Modena: 1985, *Il concetto di funzione nella scuola superiore*, Quaderno n. 3, Dipartimento di Matematica di Modena, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Contratto 84.01953.01.
Nordon, N.: 1995, ‘Le continu quand il n'était qu'attribut’, *Actes de l'Université d'été '95: Epistemologie et Histoire des Mathématiques* (Besançon)
Peano, G.: 1911, ‘Sulla definizione di funzione’, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie V, Vol. XX, 3 - 5.
Piochi, B. (Ed): 1995, *Funzioni, Limiti, Derivate*, *Atti 4° Incontro Nuclei di Ricerca didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore, Siena, 1994*, IRRSAE Toscana.
Ramsey, F.P.: 1925, ‘The Foundations of Mathematics’, *Proc. London Math. Soc.* 25, 338 - 384.
Schwartz, L.: 1950, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris
Sfard, A.: 1991, ‘On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as differents sides of the same coin’, Educational Studies in Mathematics, **22**, n. 1, 1 - 36.
Sfard, A.: 1992, ‘Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function’, Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 59 - 84.
Sierpinska, A.: 1992, ‘Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept’, Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function* MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 23 - 58.

Youschkevitch, A.P.: 1981, ‘Le concept de function jusq'au milieu du XIX$^{\underline{e}}$ siècle’, Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.) *Fragments d'histoire des mathematiques*, Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 7 - 68.
Vita, V.; 1986, *I programmi di Matematica per le scuole secondarie dall'unità d'italia al 1986*, Pitagora Editrice, Bologna
Whitehead, A.N. and Russell, B.: 1910, *Principia Mathematica - Vol I*, Cambridge University Press.