Risoluzione (approssimata) delle equazioni di 3° grado con Cabri II

Achille Maffini

Sul numero 18 di Cabrirrsae è comparso un articolo di M. Impedovo sulla possibilità di trisecare un angolo 'in modo algebrico' con Cabri II. Premesso che faccio parte di coloro che non sono esaltati dall'uso dei 'numeri' in geometria per cui mi ritrovo vicino alle critiche rivolte all'articolo, malgrado la stima e l'amicizia per l'autore, ciò che, al solito, mi sembra importante è il dibattito che ha suscitato il lavoro, più dei risultati raggiunti.
A tale proposito vorrei fare alcune considerazioni. E' vero che gli strumenti riga e compasso non permettono di risolvere alcuni problemi (trisezione di un angolo, duplicazione del cubo, ecc.), ma ci sono costruzioni geometriche che si basano su altre assiomatizzazioni che permettono questo, come ricorda C. Pellegrino nel sul intervento sul n° 19: su tutte, la piegatura della carta (origami). Ed è proprio su questo punto che vorrei soffermarmi per vedere come con Cabri II si possano fare costruzioni 'origamistiche' e quindi risolvere problemi che esulano dall'ambiente riga-compasso.
Sicuramente lo strumento di Cabri II che fa superare al metodo del piegamento l'ambito euclideo è dato dalla possibilità di spostare un punto su un ente geometrico (retta, curva, ecc.). Come fa osservare Impedovo, le costruzioni fatte con questo metodo non resistono alla prova del trascinamento (ricordiamo che non siamo in ambito riga-compasso!). In teoria esiste in Cabri II uno strumento che dovrebbe impedire di fare le cose 'ad occhio' cioè il test "Appartiene a…?", ma presenta il forte inconveniente di cercare risultati su un continuo lavorando in un ambiente discreto come è di fatto il piano di Cabri II. Questo inconveniente è presente ovviamente anche nell'uso degli strumenti di Misura, vista la natura 'razionale' dei numeri coinvolti, per cui la critica rivolta da Impedovo all'uso dello strumento Spostamento dovrebbe rivolgerla anche all'uso dei 'numeri' di Cabri II.
Detto questo, vorrei proporre un problema la cui risoluzione passa attraverso l'utilizzo degli strumenti geometrici e quelli algebrici di Cabri II, sempre tenendone presente i limiti: la determinazione, ovviamente approssimata, delle soluzioni di un'equazione di terzo grado.

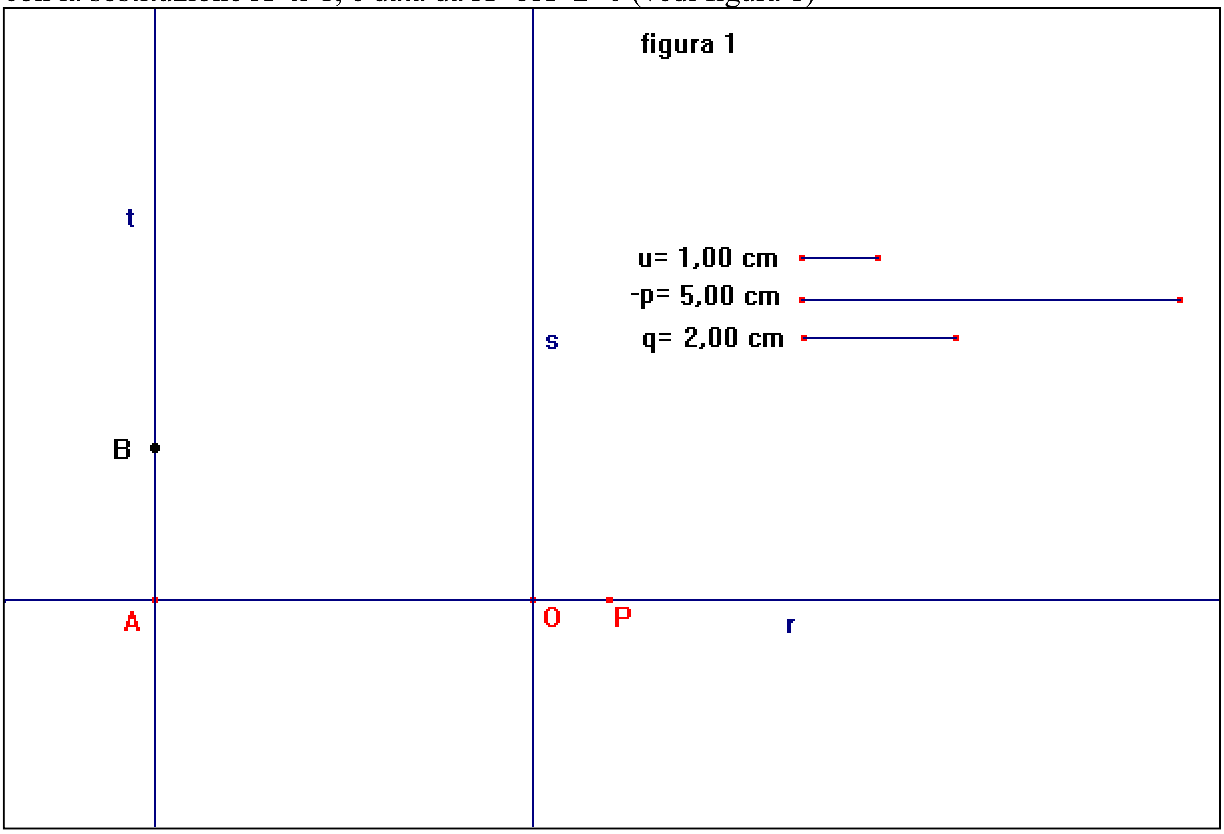
Consideriamo un'equazione di 3° nella forma normale a cui si può sempre ridurre
$x^3+ax^2+bx+c=0$ (1).
Com'è noto, applicando la trasformazione $x=X-{}^{a}/_{3}$, tale equazione diventa del tipo
$X^3+pX+q=0$ (2)
Ci proponiamo di trovare le radici (approssimate) della (2).
Fissato un punto O nel piano, consideriamo due rette r ed s perpendicolari tra loro passanti per O. Per comodità conviene prendere le rette orizzontale (ad esempio r) e verticale (s), rispetto al piano di Cabri. Sulle due rette si fissi un verso positivo e nel verso positivo della retta r si prenda un punto P tale che [OP] abbia misura 1.
Osservazione. La costruzione precedente ricorda molto quella di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. In effetti si potrebbe operare in tale ambito, come invito il lettore a fare. Preferisco operare nel piano geometrico per evidenziare alcuni problemi che possono emergere.
Eseguiamo poi le seguenti costruzioni:

- su r si prenda un punto A tale che [OA] abbia misura |p| e nel verso positivo o negativo di r a seconda che p abbia segno positivo o negativo;
- si consideri la retta t passante per A e perpendicolare ad r e su di essa si prenda un punto B tale che [AB] abbia misura |q| e nel verso positivo o negativo di s a seconda che q sia positivo o negativo. B sarà detto 'punto obiettivo'.

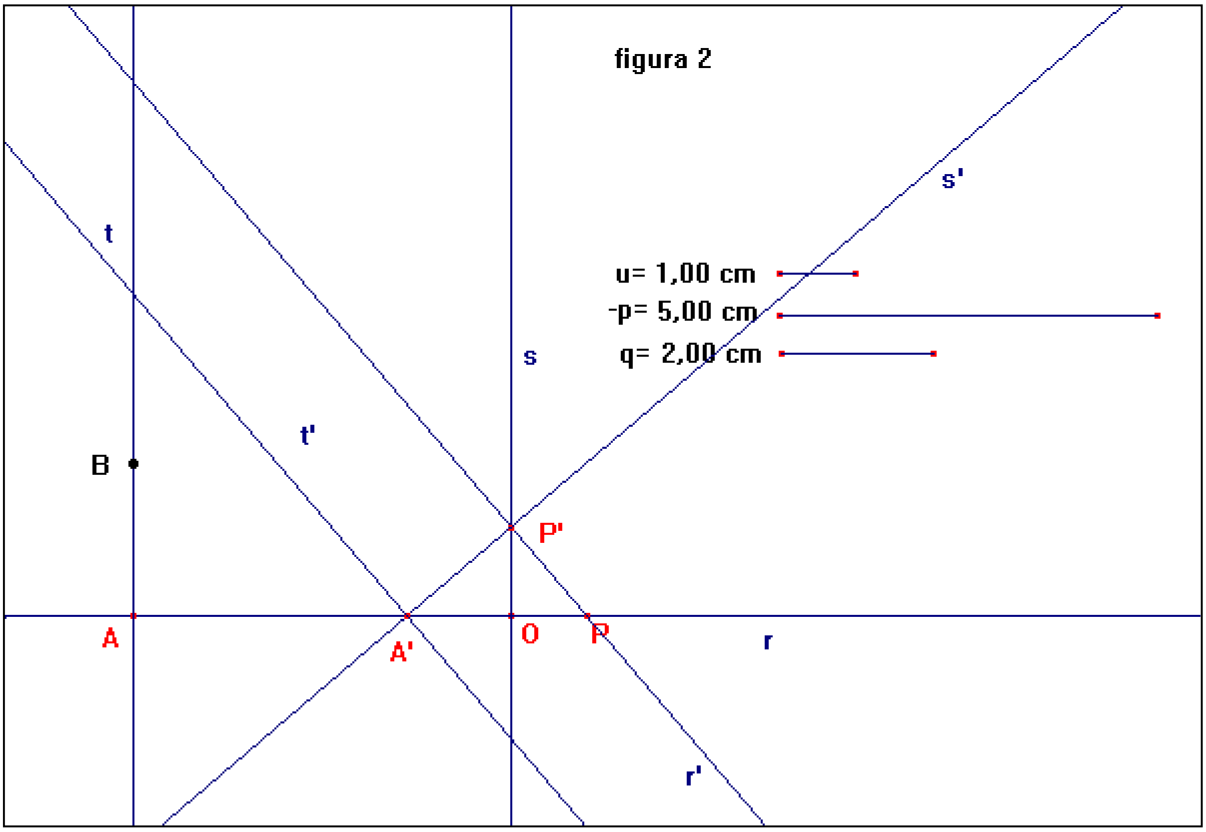
Innanzi tutto un problema: per la determinazione dei punti P, A e B l'uso dello strumento *Trasporto di misura* può presentare degli inconvenienti visto che i punti sono da trasportare su rette, inconvenienti legati sempre alla struttura discreta del piano di Cabri. Conviene quindi procedere in modo geometrico; vediamo come:

1) evidenziare i valori, espressi in centimetri, dei valori assoluti dei coefficienti, compreso il coefficiente 1 del termine di terzo grado (*Visualizza/Numeri/CTRL+U Centimetri*);
2) nome (preceduto dal segno - se negativo) dei coefficienti posti davanti al valore numerico (*Visualizza/Testo*), nel cui testo inserire eventualmente i valori numerici precedentemente trovati;
3) costruzione di segmenti di lunghezza unitaria, |p|, |q|, (*Punti/Punto; Costruisci/Trasporto di misure; Rette/Segmento*. E' possibile fare tutto con una semplice Macro);
4) rette r ed s di origine O (*Rette/Retta; Costruisci/Retta perpendicolare*; *Visualizza/Nomi* per chiamare r ed s le due rette ed O il punto d'intersezione);
5) punto P (*Costruisci/Compasso* applicato a segmento di misura 1 cm e con centro in O; *Punti/Intersezione di due oggetti* applicato al punto d'intersezione tra la circonferenza ed r posto nel verso positivo; *Disegna/Mostra/Nascondi* applicato alla circonferenza);
6) punto A (*Costruisci/Compasso* applicato a segmento di misura |p| e con centro in O; *Punti/Intersezione di due oggetti* applicato al punto d'intersezione tra la circonferenza ed r posto 'nel verso giusto' in base al segno di p; *Disegna/Mostra/Nascondi* applicato alla circonferenza);
7) retta t (*Costruisci/Retta perpendicolare* applicata ad A ed r);
8) punto B (*Costruisci/Compasso* applicato a segmento di misura |q| e con centro in A; *Punti/Intersezione di due oggetti* applicato al punto d'intersezione tra la circonferenza e t posto 'nel verso giusto' in base al segno di q; *Disegna/Mostra/Nascondi* applicato alla circonferenza).

Come esempio consideriamo l'equazione $x^3+3x^2-2x-2=0$ la cui equazione corrispondente, ottenuta con la sostituzione X=x-1, è data da $X^3-5X+2=0$ (vedi figura 1)



A questo punto si tratta di costruire un percorso che, partendo da P, vada a colpire il bersaglio B. Tale percorso si ottiene considerando una retta r' uscente da P, il punto di intersezione P' di tale retta con s, la perpendicolare s' ad r' passante per P', il punto d'intersezione A' tra s' ed r ed infine la perpendicolare t' a s' passante per A' (figura 2).



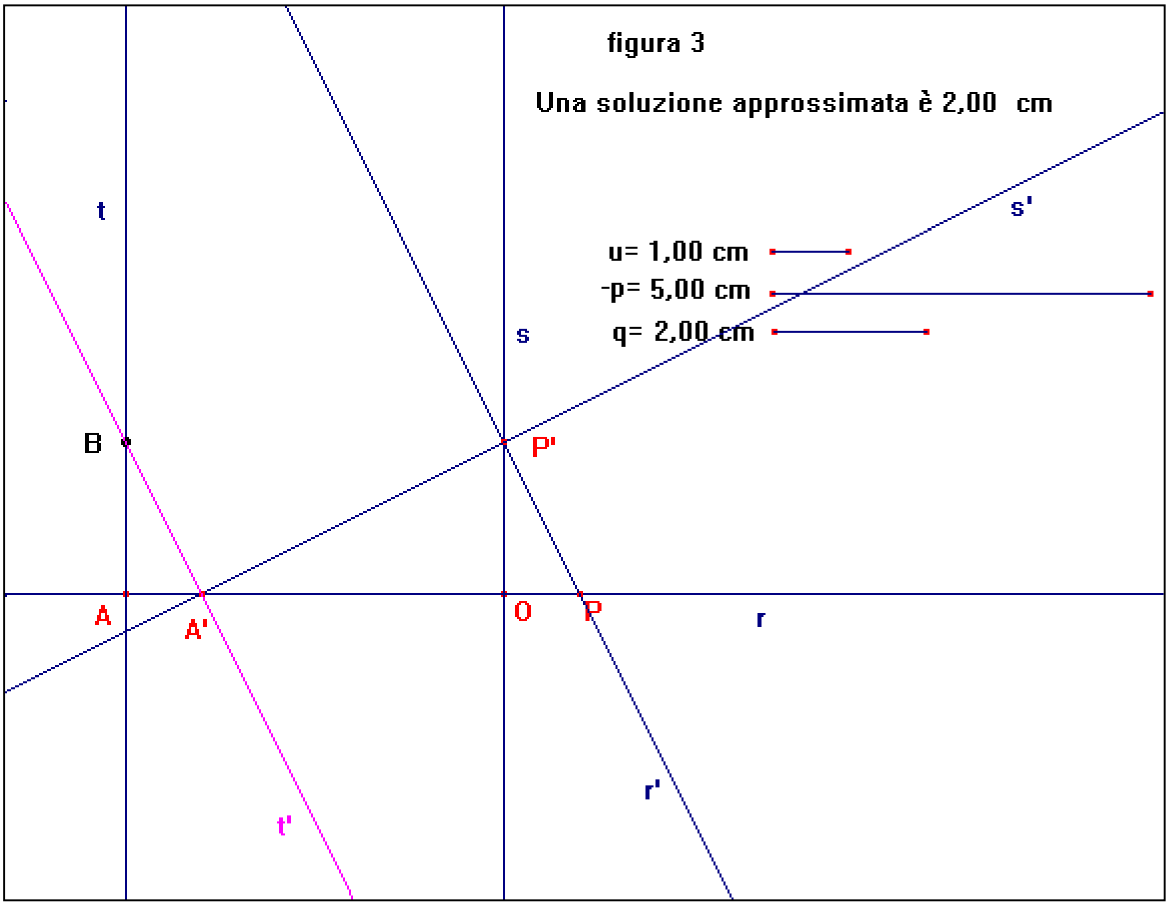
La costruzione si ottiene facilmente con

1) Retta r' e P' (*Retta/Retta*, applicato al punto P; *Punti/Intersezione di due oggetti* applicato ad s ed r')
2) Retta s' e A' (*Costruisci/Retta perpendicolare* applicato a P' e r'; *Punti/Intersezione di due oggetti* applicato a r ed s')
3) Retta t' (*Costruisci/Retta perpendicolare* applicato ad A' e s').

Col comando *Puntatore/Puntatore* è possibile spostare la retta r' in modo che la retta t' passi per B

Per avere uno strumento di verifica di ciò (con tutti i limiti evidenziati in precedenza), si può applicare il test "Appartiene a..?" col comando *Verifica Proprietà/Appartiene a…?* applicato a B e t' anche se ci si può accontentare, per gli intenti che ci siamo posti, di una verifica 'ad occhio'.

A questo punto basta trovare la misura del segmento [P'O] con lo strumento *Misura/Distanza e lunghezza* applicato ai punti O e P' (il cui valore è indicato di fianco alla scritta *'Una soluzione approssimata è';* vedi figura 3). Tale valore rappresenta una delle soluzioni dell'equazione di partenza, espressa in centimetri.



Per giustificare questa affermazione basta considerare, relativamente alla figura 3, la (ovvia) similitudine dei triangoli rettangoli OPP', OP'A' e A'AB. Indicato con x la misura di OP' e con y la misura di AA' si ha che

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{5-y}{2}$$

Dalla prima uguaglianza si ricava $y=x^2$ (questo risultato vale in generale: basta applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo PP'A') mentre uguagliando il primo e terzo membro, sostituendo a y il valore precedentemente trovato si ricava $x^3-5x+2=0$ e questo indica che x è una soluzione dell'equazione di partenza.

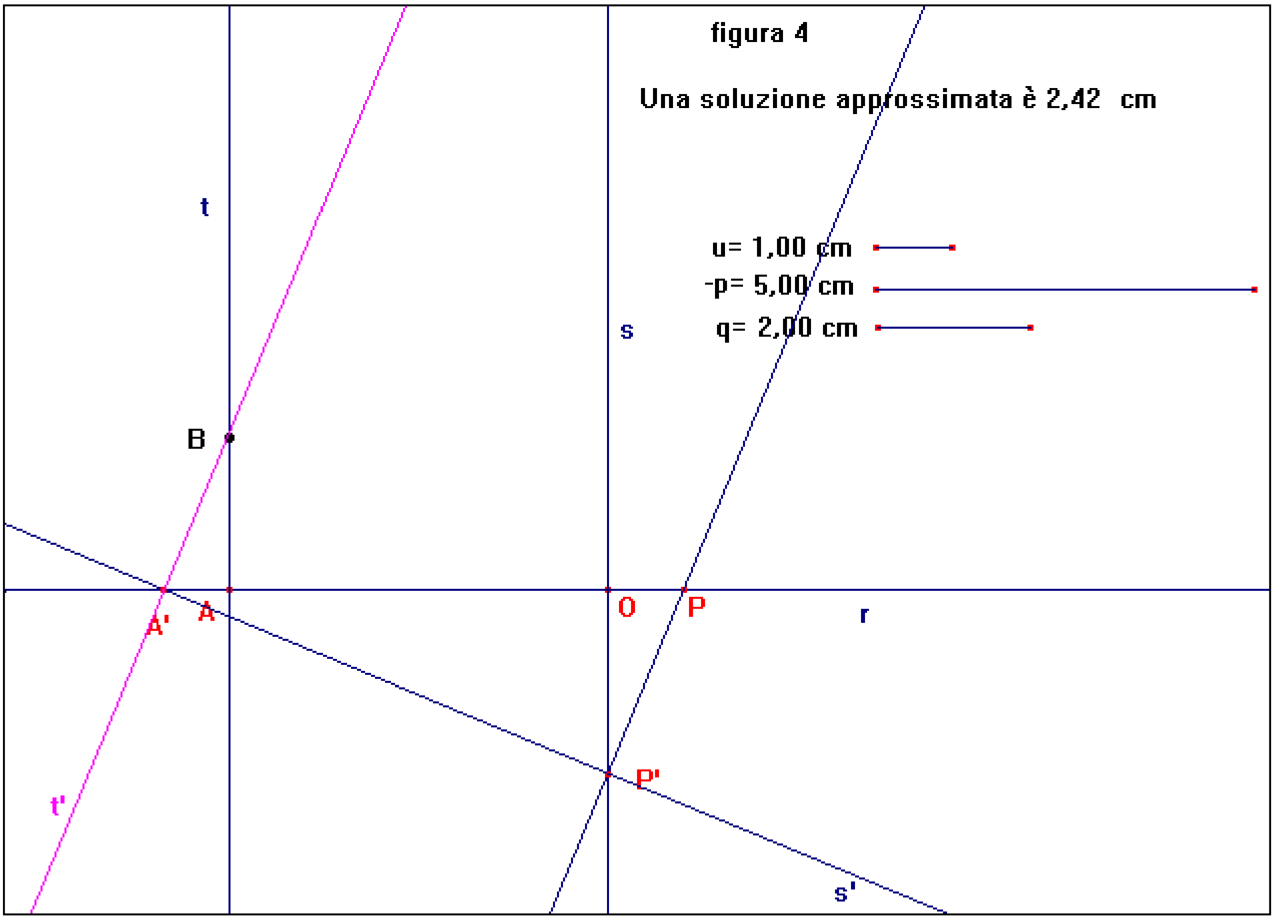
Le similitudini indicate per verificare che il valore trovato è effettivamente una soluzione dell'equazione presentano alcuni inconvenienti: innanzi tutto non si conosce il segno di x che, trattandosi di un numero reale, non è detto rappresenti la misura di un segmento, come invece è stato considerato in precedenza; inoltre non è detto che la figura proposta sia esaustiva di tutti i casi che si possono presentare relativamente alla costruzione dei triangoli.

Per rispondere alla prima questione, ci si potrebbe riferire alla posizione di P' rispetto all'orientamento della retta s[1], per cui se P' si trovasse 'sotto' OP la misura di [OP'] indicherebbe una soluzione negativa, come è evidenziato nella figura 4 in cui la similitudine dei triangoli porta alle relazioni

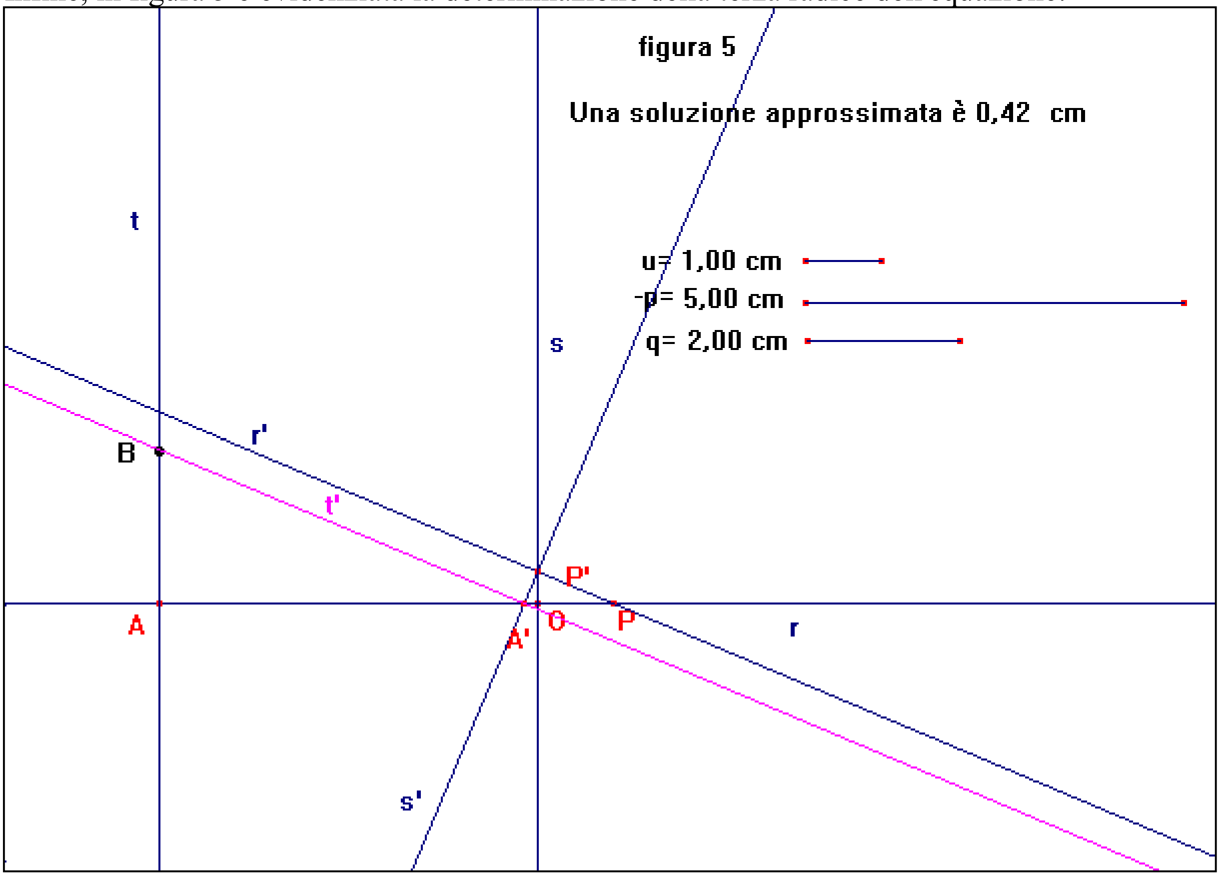
$$\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y-5}{2}$$

da cui $-x^3+5x+2=0$ che corrisponde all'equazione di partenza se x è negativo.

[1] Se la costruzione fosse fatta nel piano cartesiano, si potrebbe orientare il sistema di riferimento in modo tale che l'ordinata (o l'ascissa) con segno di P' indichi la soluzione dell'equazione.



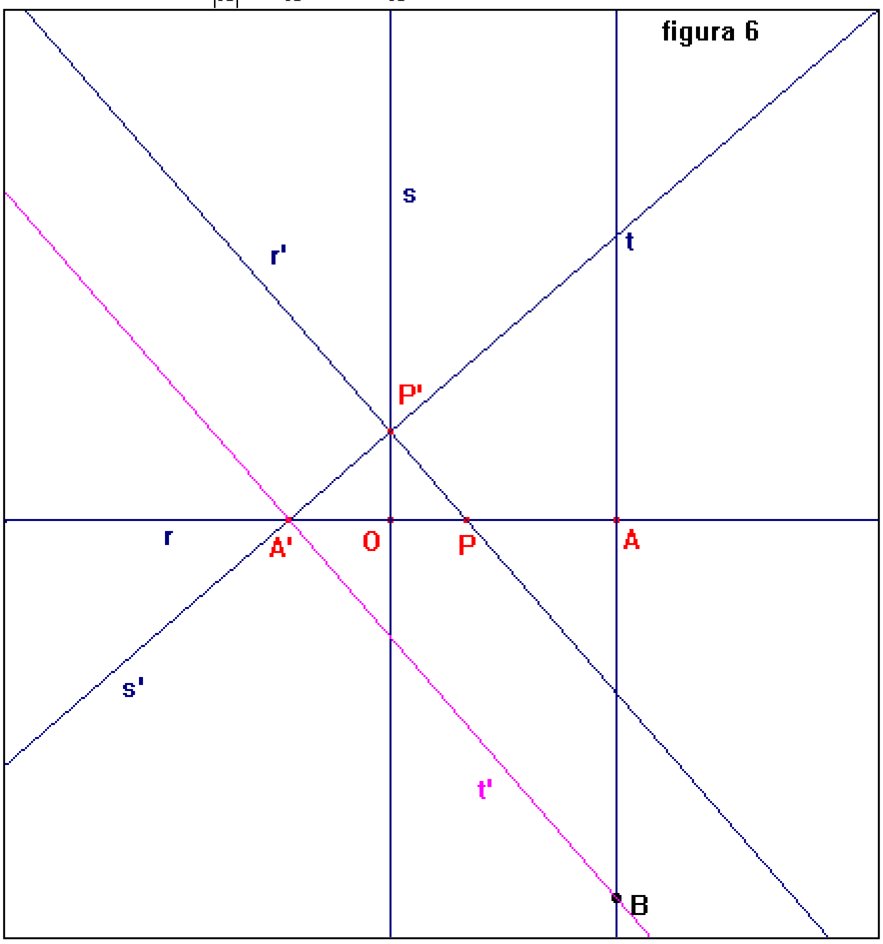
Infine, in figura 5 è evidenziata la determinazione della terza radice dell'equazione:



Il fatto evidenziato per la posizione di P' vale ovviamente in generale: sarebbe sufficiente ricordare che la costruzione è stata fatta in un sistema di rette orientate (in caso contrario anche i segni di p e q sarebbero stati un problema), anche se non è detto ci sia attinenza tra il segno di x e quello di q. Inoltre questo si riallaccia alla risposta della seconda questione, risposta chiaramente negativa. Procediamo quindi per gradi, per dare una risposta generale. D'ora in poi il riferimento alle figure è da intendere in riferimento alle costruzioni geometriche e non al caso specifico considerato.

Lemma. A' appartiene sempre alla semiretta [OA.
L'ovvia dimostrazione è legata al fatto che l'angolo PP'A' è retto, mentre PP'O è acuto.

Teorema 1. Se $p>0$, la lunghezza di [OP'] è, a meno del segno, una soluzione dell'equazione (2); il segno di x è opposto a quello di q.
Dimostrazione. Riferendosi alla costruzione geometrica in figura 6 (esempio con $p>0$, cioè con A sulla semiretta [OP), si ha (per il Lemma precedente) che A e A' sono da parti opposte rispetto ad O, per cui $\overline{AA'} = x^2+p$. Dalla similitudine dei triangoli PP'O e AA'B segue che $\frac{1}{|x|} = \frac{x^2+p}{|q|}$ cioè $\frac{|q|}{|x|} = x^2+p$. P' e B sono in semipiani opposti rispetto alla retta OP poiché A' e B sono nello stesso semipiano rispetto a PP', essendo A'B//PP'; rispetto all'orientamento della retta s si ha quindi q ed x discordi per cui $\frac{|q|}{|x|} = -\frac{q}{x}$. Da $-\frac{q}{x} = x^2+p$ si deduce l'equazione (2).



Teorema 2. Se $p<0$, allora la lunghezza di [OP'] è, a meno del segno, una soluzione dell'equazione (2). Il segno della soluzione è espresso dalla posizione di P' rispetto all'orientamento di s.
Dimostrazione. Poiché A' appartiene alla semiretta [OA (per il Lemma precedente), $\overline{AA'} = |x^2+p|$. Per la similitudine dei triangoli P'PO e AA'B (vedi figure 3 e 4) si ha

$\frac{1}{|x|} = \frac{|x^2+p|}{|q|}$ (3).

Se $A' \notin [OA]$, $\overline{AA'} = x^2+p$. BA'P' è retto ed essendo BAO (retto) angolo esterno al triangolo BA'A, l'angolo BA'A è acuto per cui B e P' sono da parti opposte rispetto alla retta r, cioè x e q sono discordi (rispetto all'orientamento di s). Tenendo conto di quanto detto, la relazione (3) diventa

$-\frac{q}{x} = x^2+p$, da cui si deduce l'equazione di partenza.

Se $A' \in [AO]$ $\overline{AA'} = -x^2-p$. BA'P' è retto; BA'O è un angolo esterno del triangolo (rettangolo in A) BAA', per cui è ottuso. Quindi B e P' stanno nella stesso semipiano rispetto alla retta r (A'P' è interno all'angolo BA'O) , per cui q ed x sono concordi (rispetto all'orientamento di s). Tenendo conto di quanto detto, la (3) diventa

$\frac{q}{x} = -x^2-p$, da cui l'equazione (2).

I teoremi precedenti permettono di concludere che la costruzione proposta permette, in tutti i casi, di trovare le soluzioni approssimate di un'equazione di terzo grado.
Il grosso limite del procedimento seguito è dato dalla sua staticità; se cioè si cambia equazione, occorre rifare tutta (o quasi) la costruzione. Un modo per renderlo più dinamico è quello di eseguire la costruzione dei punti P, A e B anziché con lo strumento *Compasso* con il fissare il punto sulla retta corrispondente (a caso), misurare la distanza dal punto precedente (con lo strumento *Misura/Distanza e lunghezza*) ed infine spostarlo sino a raggiungere il valore assoluto del coefficiente corrispondente. Questo metodo permette di modificare la costruzione relativa all'equazione semplicemente spostando i punti (la retta t si sposta di conseguenza), senza eseguire ulteriori costruzioni. L'inconveniente maggiore è che, per i problemi legati alla struttura discreta del foglio di lavoro, raramente si ottengono valori precisi. L'errore è comunque generalmente inferiore all'uno per cento[2] e quindi, rispetto ad una logica di soluzioni approssimate, accettabile.

Di seguito proporrò un metodo per la risoluzione delle equazioni di terzo grado nella forma usuale che, per comodità di interpretazione dei parametri, è opportuno vedere nella forma
$x^3+bx+c=ax^2$ (4)
Riporterò solo la costruzione dei due percorsi, senza scrivere le istruzioni di Cabri che permettono di realizzarlo visto che ricalcano quelle descritte in precedenza per l'equazione nella forma (2).

Per i punto O e P e le rette r ed s, procedere come in precedenza.
A partire dai coefficienti dell'equazione (4) costruiamo il seguente percorso:

- a partire da O si raggiunge un punto A tale che
  a) $\overline{AO} = |a|$;
  b) sopra (verso positivo) o sotto (verso negativo) la retta OP a seconda che a sia positivo o negativo;
- sulla retta t passante per A e perpendicolare ad OA si prenda un punto B tale che
  a) $\overline{AB} = |b|$
  b) a destra (verso positivo) o a sinistra (verso negativo) della retta s a seconda che b sia positivo o negativo;
- infine, sulla retta k passante per B e perpendicolare a t si prenda un punto C tale che
  a) $\overline{BC} = |c|$

[2] Utilizzando il centimetro come unità di misura, l'errore è dell'ordine del centesimo di centimetro.

b) sopra (verso positivo) o sotto (verso negativo) la retta t a seconda che a sia positivo o negativo.

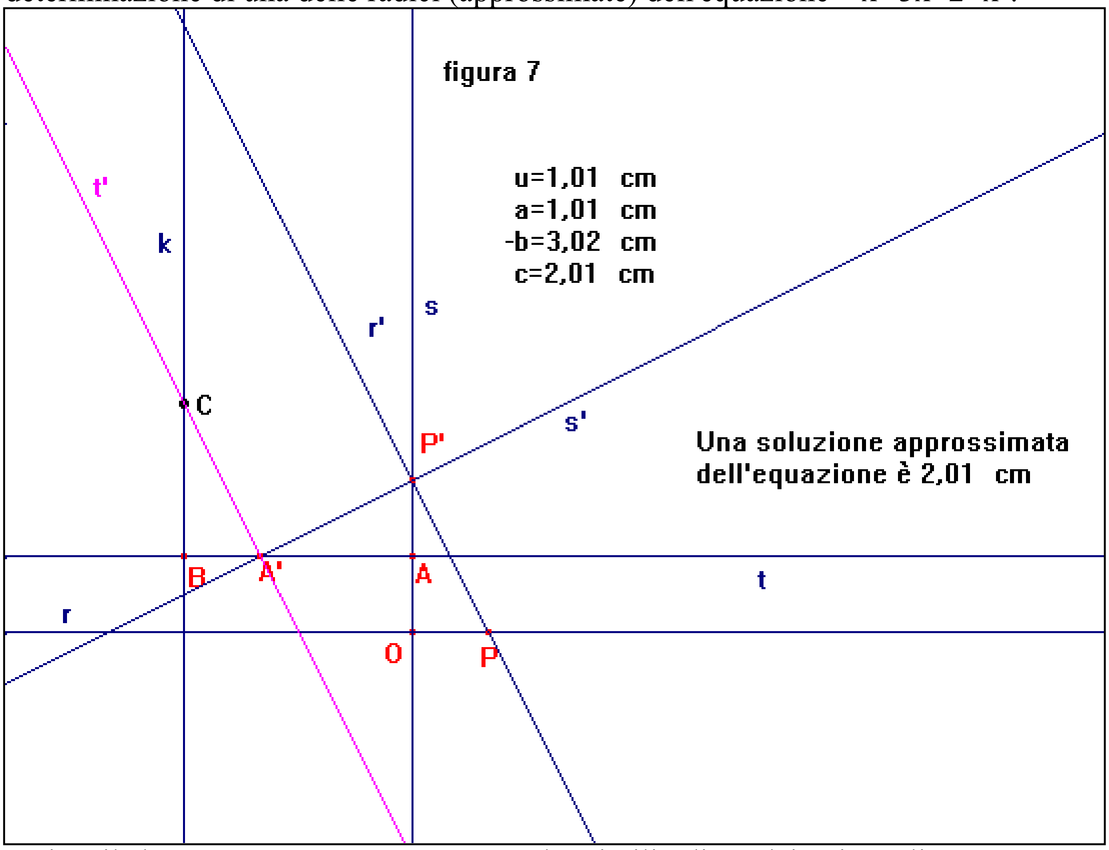
C è il punto obiettivo.

Costruiamo ora il percorso che ci permette di raggiungere C a partire da P.

Tale percorso si ottiene considerando una retta r' uscente da P, il punto di intersezione P' di tale retta con s, la perpendicolare s' ad r' passante per P', il punto d'intersezione A' tra s' e t ed infine la perpendicolare t' a s' passante per A'

Successivamente si sposta la retta r' in modo che t' passi per C. Una volta raggiunta tale posizione, è sufficiente trovare la misura del segmento [P'O] con lo strumento *Misura/Distanza e lunghezza* applicato ai punti O e P'. Tale valore rappresenta una delle soluzioni dell'equazione di partenza il cui segno è positivo o negativo a seconda della posizione di P' rispetto all'orientamento della retta s.

Anche in questo caso si può scegliere una costruzione di tipo statico (fatta con lo strumento *Compasso*) od una di tipo dinamico (fatta con lo strumento *Distanza e Lunghezza*) con tutti gli inconvenienti del caso. A titolo di esempio, è riportata nella figura 7 la costruzione (fatta col metodo dinamico, come si evidenzia dai valori approssimati dei coefficienti) relativa alla determinazione di una delle radici (approssimate) dell'equazione $x^3-3x+2=x^2$.



Invito il lettore a trovare, attraverso la similitudine dei triangoli POP', P'AA' e A'BC, la giustificazione teorica dell'asserto precedente e scoprire perché la forma (4), come forma normale, è più opportuna.

Consiglio di provare il metodo (o i metodi) su diverse equazioni, anche con coefficienti razionali; credo che dopo un po' si riesca ad acquisire una discreta padronanza tale da renderlo sufficientemente pratico e proponibile agli studenti.

BIBLIOGRAFIA

B. SCIMEMI - Algebra e Geometria piegando la carta.
Atti del Covegno "Matematica: Gioco e Apprendimento", a cura di B. D'Amore; Castel S. Pietro, 16-18/11/1990
H. HUZITA - L'equazione di terzo grado si può risolvere con il metodo origami.
Carta Bianca, 1988