UN LABORATORIO DIDATTICO SUL TEMA "INFINITO": TRA MATEMATICA E FILOSOFIA

Achille Maffini[1]

1. Introduzione

Nella scuola media superiore si parla sempre più spesso di attività multidisciplinari o interdisciplinari, attivate nelle cosiddette aree di progetto e che prevedono la compresenza di due o più insegnanti di diverse discipline che "lavorano" insieme attorno ad un argomento o ad un percorso comune. In genere queste attività avvengono tra insegnanti di materie affini, dove per materie affini si intendono materie che utilizzano strumenti comuni (è ad esempio il caso di matematica e fisica) o che hanno avuto un percorso culturale (storico-epistemologico) comune; in questa seconda categoria, oltre alle citate matematica e fisica, l'altro caso tipico è quello di matematica e filosofia. Questo secondo abbinamento ha un'altra importante valenza: costituisce in un certo senso il ponte che collega (o meglio, può collegare) l'ambito scientifico con quello umanistico. Al di là comunque delle intenzioni e dei buoni propositi, lo scoglio maggiore di questi progetti non è tanto dovuto alla loro realizzabilità, quanto alla loro efficacia: troppo distanti, a volte, sembrano essere sia il linguaggio che il modo di concepire le problematiche. E' in questo senso che si è virgolettato il termine *lavorano* precedente: una vera efficacia didattica in un'attività interdisciplinare si ha quando il confronto è permesso, cioè quando si riesce ad instaurare preventivamente un ambito semantico in cui LA CLASSE si possa immergere e si possa riconoscere. La sottolineatura di questo aspetto mi sembra essenziale: spesso gli studenti sentono usare gli stessi termini, ma intesi in modo diverso, con deleterie conseguenze sul piano dell'efficacia dell'intervento. I docenti che hanno portato avanti attività di questo tipo sanno bene come il vero punto dolente del lavoro sia proprio il "capirsi" col collega e il riuscire a costruire un linguaggio condiviso. D'altro canto, il rimprovero che viene fatto agli studenti di "non fare collegamenti" interdisciplinari è spesso indice di una difesa attivata dagli stessi per tutelarsi dalla incomunicabilità delle discipline.
Nell'ottica quindi della formazione iniziale degli insegnanti diventa importante, se non indispensabile, trovare momenti, occasioni, ambiti in cui questo confronto possa avvenire e svilupparsi in modo produttivo. All'interno delle Scuole di Specializzazione per l'insegnamento superiore questo ruolo può essere svolto dai laboratori didattici dell'area 3, in cui si possono introdurre veri e propri momenti di confronto con insegnanti di altri dipartimento o con un'altra formazione su temi in un qualche modo "di confine" o, più in generale, appartenenti alla stesa matrice culturale.
Un tentativo in questo senso è stata l'attivazione presso il Dipartimento di Filosofia della SSIS di Parma di un Laboratorio Didattico gestito da me con la collaborazione del Prof. De Caro Eugenio sul tema INFINITO.
La scelta del tema è stata chiaramente mirata: parlare di infinito significava non solo confrontarsi con un concetto che lega le due discipline, ma che impone anche a chi si occupa di filosofia di scontrarsi con le formalizzazioni della matematica. Per contro, per un matematico costituisce un'opportunità per rivedere **le scelte** che nel corso della storia della matematica hanno portato a certi risultati a discapito di altri potenzialmente possibili. In sostanza, un momento per ricordare come la matematica non sia frutto di un cammino lineare, ma sia una disciplina fatta di uomini, come del resto i prodotti di altri ambiti, che si sono mossi in ben specifici contesti[2]. L'idea, spesso presente nei ragazzi, della matematica come una disciplina monolitica è molto legata a questa "dimenticanza" da parte dei matematici stessi.

2. Il programma del laboratorio

Di seguito è riportato il programma (di massima) del laboratorio con alcune attività proposte ed i relativi commenti.

---

[1] Insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "G. Falcone" di Asola (MN) ed attualmente supervisore al tirocinio presso la SSIS dell'Emilia Romagna (sezione di Parma); collabora con l'Unità Locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma. E-mail: a.maffini@libero.it.

[2] Su questa posizione si colloca, ad esempio, [H] che, accanto alle concezioni classiche di matematica (formalista, platonista, ecc.) pone proprio quella storico-sociale.

1) Euclide e i fondamenti della geometria greca: attività e relativa discussione
L'infinito in Aristotele.
Consegna: Preparare lezione su Zenone e sui suoi paradossi, con particolare attenzione al paradosso di Achille e la Tartaruga.
2) Esposizione ed analisi da parte degli specializzandi della lezione preparata.
3) Analisi degli aspetti emersi nella lezione precedente con particolare riguardo ai temi matematici e alle questioni legate al concetto di infinito
Spiegazione "filosofica" del paradosso di Achille e la Tartaruga.
4) Analisi della lettura *filosofica* proposta e confronto con l'analisi *matematica* dello stesso paradosso; il problema dell'infinito matematico e suo utilizzo in ottica didattico-filosofica. Primo incontro col formalismo matematico ed esplicitazione del differente approccio nei confronti del reale. Introduzione alla problematica: *che cosa è reale per un matematico?* Le risposte matematiche al paradosso di Achille e la Tartaruga. Analisi delle categorie coinvolte.
5) Distribuzione di una scheda relativa a un tipo di ragionamento matematico in cui si fa riferimento alle nozioni di infinito e infinitesimo. Analisi della scheda (1 ora). Discussione sulla tipologia di analisi fatta. Infiniti ed infinitesimi in *atto* e in *potenza.*
Consegna: costruzione di un percorso di presentazione del concetto di infinito nell'antichità con particolare riguardo agli aspetti matematici.
6) Presentazione percorso didattico preparato e relativa discussione (2 ore)
Analisi del concetto di infinito presente in ragionamenti-tipo di Cusano, Leibniz, Newton; le critiche di Berkeley come "tipologie" di critiche.
È motivato l'impiego delle nozioni di infinito e infinitesimi *attuali* da parte di Cusano e Leibniz per risolvere le questioni matematiche e fisiche che essi intendono risolvere? Sono coerenti con l'impianto dalla filosofia di Berkeley le obiezioni che questi mosse a quella nozione di infinito e infinitesimo? Le risposte dei filosofi e le risposte del matematico
7) Le risposte formalizzate dell'800.
La formalizzazione come impostazione e la coerenza come risposta; le basi assiomatiche della matematica e il problema della coerenza. Operatività, tramite il linguaggio formale, dei concetti di infinito e infinitesimi. Cantor e il problema della cardinalità degli insiemi; il concetto di infinito dal punto di vista insiemistico. La risposta "potenziale" dell'analisi dell'800 e le scelte filosofiche soggiacenti.
Consegna: il concetto di infinito nella cultura dell'800 (letture mirate)
8) Una risposta del '900. Di nuovo sul problema dell'esistenza degli enti matematici: le risposte alternative del '900. Gli aspetti semantici della matematica e il problema dei modelli e dell'esistenza degli enti ideali.
Conclusione: che cosa si intende, dal punto di vista matematico, per esistenza di un ente.

<u>Eventuali questioni tecniche</u>: esemplificazioni a partire da alcuni problemi classici come il calcolo della velocità istantanea o la determinazione della tangente ad una curva (fenomeni di variazione ecc.), in cui si mostra la differenza di approccio lavorando con le due diverse concezioni (potenziale ed attuale) di infinito e infinitesimo.

3. Un breve commento

Partire da Euclide (e di riflesso da Aristotele) risponde ad una scelta ben precisa. Euclide non è solo un grande geometra, ma per molti, soprattutto non matematici, è sinonimo stesso di matematica. Parlare di infinito in Euclide è quindi un modo da un lato per entrarenel merito della cultura greca, dall'altro per iniziare a vedere come risponde la matematica, in termini più o meno formali, agli stimoli provenienti dalla filosofia. Se in effetti si vuole portare avanti un lavoro di carattere interdisciplinare, una delle possibili strade è vedere quali risposte vengono date nei due ambiti allo stesso problema (attività pluridisciplinare) e come queste risposte si influenzino o si siano influenzate tra di loro (attività interdisciplinare). E' stata quindi sottoposta agli specializzandi una scheda in cui erano richieste alcune analisi e considerazioni:

3.1 Un esempio di consegna

CONSEGNA. Esamina le seguenti formulazioni dovute ad Euclide(Gli Elementi di Euclide, a cura di A. Frajese e L. Maccioni – UTET, 1996) (colonna di sinistra) con quelle legate ad un linguaggio più "moderno" (a destra) e prese da vari testi di matematica.

Definizioni (o termini)
[II. Linea è lunghezza senza larghezza]
[III. Estremi di una linea sono punti]
IV. Linea retta (ευτεια γραμμα) è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa (cioè rispetto ai suoi punti)

[Retta, punto, insieme sono dati come termini primitivi]
(Assioma) La retta è un insieme di punti

XXIII. Parallele sono quelle rette che essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

(Definizione) Due rette sono parallele se non hanno punti in comune oppure coincidono.

V [Risulti postulato] che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (*tali che la loro somma sia minore di due retti*) le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (*la cui somma è minore di due retti*)

(Assioma) Data una retta r ed un punto esterno P, esiste una ed una sola retta passante per P e parallela ad r.

[Nozioni comuni]
Il tutto è maggiore della parte

Ti trovi d'accordo con la nozione comune euclidea?

[Libro V – Definizioni]
Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto a una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (=quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultplo della quarta)

Il rapporto di due grandezze F e G omogenee (che indicheremo con F:G) appartenenti ad una classe di grandezze continuee è il numero reale positivo r tale che F=rG.
Quattro grandezze F, G, F', G' omogenee appartenenti ad una classe di grandezze continuee sono in proporzione (e scriveremo F:G=F':G') se esiste un numero reale r>0 tale che se F=rG, allora F'=rG'

[Libro IX – Proposizione 20]
Esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.

I numeri primi sono infiniti

In particolare:
1) Evidenzia analogie e differenze rispetto alle due formulazioni
2) Sottolinea quelle che ritieni essere "parole chiave" delle due formulazioni
3) Evidenzia in quali aspetti si riscontra o si può riscontare il concetto di infinito e con quali caratteristiche
4) Conosci una definizione di insieme infinito? Come la forniresti?
5) E di infinito in genere?

Relativamente alle varie definizioni o proposizioni riportate si possono fare diverse considerazioni, del resto rintracciabili in diversi commenti all'opera di Euclide. Mi limito ad alcune indicazioni di massima.
Sul concetto di retta, si può riscontrare, al di là della difficile interpretazione della definizione euclidea, come la sua formulazione in termini di insieme di punti sia di fatto moderna ed è causa (probabilmente) di non poche difficoltà a livello didattico. E' inoltre da osservare come il termine "retta" venga usato nella definizione IV come aggettivo, mentre nella definizione XXIII e nel celebre postulato V sia usato come sostantivo. Non è improbabile, come fanno osservare alcuni commentatori[3] che ci siano problemi anche culturali legati alle traduzioni: che senso ha parlare di una retta "prolungabile"? Di fatto in questi testi viene evidenziata la concezione potenziale dell'infinità della retta euclidea vista più come segmento prolungabile che come retta in senso attuale.
Nella stessa direzione va anche la formulazione del famoso V postulato che viene data in positivo ("si incontrano") mentre nella formulazione moderna viene solitamente data in negativo ("non hanno…") riportando il problema all'infinito. E' solo il caso di far notare come il famoso teorema sugli angoli alterni interni, che fornice una condizione necessaria e sufficiente di parallelismo tra rette, riporta al finito il problema del parallelismo.
Sulla nozione comune secondo cui il tutto è maggiore della parte vale solo la pena di osservare che questa nozione cade proprio sul concetto di insieme infinito (definito attraverso la possibilità di metterlo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio). Ovviamente questa posizione è strettamente legata all'interpretazione semantica data a termini come "tutto", "maggiore" e "parte". Secondo la teoria cantoriana degli insiemi, ad esempio, questa nozione comune è scorretta, se si interpreta "maggiore" come "maggior 'numero' di elementi", mentre risulterebbe corretta se maggiore si intendesse come "ha elementi che l'altro (insieme) non ha". E' solo da osservare che si fa, anche in questo caso, esplicito riferimento agli insiemi, aspetto decisamente lontano da un'ottica euclidea.
La definizione di grandezze proporzionali risulta, nella formulazione euclidea, molto macchinosa, ma ha il pregio di non parlare di grandezze incommensurabili, con tutto quello che questo comporta a livello di infinito, visto che per esse si è "costretti" a fare i conti con i numeri irrazionali e quindi con infiniti in atto.
Infine la proposizione IX, 20 evidenzia l'infinità dei numeri primi in un'ottica potenziale, laddove nella terminologia moderna tale infinità viene vista in modo attuale.
Le considerazioni precedenti non hanno la pretesa di essere esaurienti e sistematiche, ma servono solo ad evidenziare come fosse visto il concetto di infinito nella cultura classica, vista poi l'influenza che ha avuto nel pensiero successivo, non solo in termini di condizionamento, ma anche come ostacolo alla variazione della prospettiva culturale.
Scopo dell'attività proposta era anche quello di mettere sul piatto della discussione alcuni concetti peculiari e ad iniziare un confronto fra gli stessi: infinito in atto e infinito in potenza (con richiami alla Fisica di Aristotele), ruoli semantici dei termini, problema dell'esistenza di un ente matematico.

4. I paradossi di Zenone

Parlare del concetto di infinito nell'antichità avrebbe richiesto ben più di un laboratorio di 20 ore. Si è pertanto scelto di fissare l'attenzione su un tema specifico, come il paradosso di Zenone di Achille e la tartaruga. La scelta del tema aveva più motivazioni:

1) L'aspetto dialettico del paradosso: analisi degli aspetti logici legati alle dimostrazioni per assurdo
2) L'aspetto filosofico del paradosso: cosa si proponeva Zenone? Quali letture e sviluppi successivi ne sono derivati?
3) L'aspetto matematico del paradosso: l'analisi delle "soluzioni" matematiche proposte ha permesso di analizzare sia le questioni connesse al concetto di infinito relative che l'idea della matematica come modello della realtà; in questo senso si è potuto sottolineare il ruolo metafisico che a volte la matematica riveste nel suo essere invece intesa come scienza esatta
4) L'aspetto didattico: il tipo di ragionamento sotteso ai vari paradossi si presta non solo ad introdurre i modi di "fare filosofia", ma anche a interessanti esperimenti di drammatizzazione, come alcuni specializzandi hanno sottolineato.

Tutti questi aspetti non sono usciti in modo esplicito, ma dalle attività proposte agli specializzandi. E' stato infatti chiesto loro di preparare un'attività didattica sui paradossi di Zenone con particolare riguardo al paradosso di Achille e la Tartaruga.

---

[3] Si veda ad esempio [DA]

La varietà delle risposte (dal saggio alla lezione vera e propria) e la diversa impostazione dei contenuti hanno permesso un successivo confronto tra alcune proposte permettendo di assegnare una ulteriore consegna agli specializzandi proprio sull'analisi dei vari interventi.
In questa fase si è quindi lavorato su due questioni strettamente connesse all'esperienza didattica: accanto all'analisi dei contenuti disciplinari si è inserita l'analisi degli aspetti didattici. Spesso nei lavori degli specializzandi è emersa l'esigenza di una attività interdisciplinare con l'insegnante di matematica realizzabile contingentemente, vedendo nel conduttore del corso come un potenziale collega. In sostanza il laboratorio è diventato un corso su duplici binari, una forma di metalezione in cui le varie finalità si intrecciavano. Tra queste, il permettere di "sentire" alcuni termini e di porsi il problema, essenzialmente legato al linguaggio, della comunicazione tra colleghi e della comunicazione tra insegnanti e alunni.
Il problema del linguaggio non è marginale e giustifica spesso la separazione netta tra le discipline. Il "non capisco niente di matematica" detto da alcuni specializzandi, ma anche da più autorevoli colleghi di filosofia nasconde spesso un altro problema: quello del formalismo e del linguaggio con cui la matematica, necessariamente, deve esprimersi. Ma quello che un filosofo può e deve sapere sono i presupposti, chiamiamole le scelte, che sono alla base di questa formalizzazione. Ci sono settori della matematica più per addetti ai lavori, ma su temi come l'infinito, la logica o la stessa geometria, l'insegnante di filosofia deve poter avere coscienza delle problematiche di fondo. In mancanza di queste condizioni, l'interdisciplinarità intesa come possibilità di porre delle relazioni rischia veramente di diventare una attività forzata e non sentita, con tutto quello che ne consegue sul piano dell'efficacia didattica.

5. Il concetto di limite: le diverse risposte.
Se ad esempio si affronta il concetto di limite, come quando si è cercato di entrare nel merito del problema "dell'esistenza" di un ente matematico, ciò che conta per un insegnante di filosofia è sapere quali sono i presupposti alla base del concetto, più che le questioni tecniche. Una formalizzazione rigorosa del concetto di limite si è avuta nella seconda metà dell'ottocento e come tale non poteva non essere "figlia" della cultura romantica del suo tempo.
La teoria universalmente riconosciuta e tuttora largamente usata nella didattica dell'analisi, sia a livello di media superiore che universitaria, è quella di **Weierstrass** (1815-1897). Weierstrass risolve il problema degli infinitesimi (problema che è alla base dei lavori di Leibniz e Newton, ampiamente e ferocemente criticati da Berkeley)....eliminandoli con il concetto di limite. Consideriamo ad esempio il problema della velocità istantanea (un problema classico) e vediamo come lo risolvono Leibniz e Weierstrass.
Supponiamo di avere un punto materiale che si muove con una legge oraria del tipo $s=t^2$ (in modo canonico misuriamo lo spazio in metri e il tempo in secondi). Vogliamo stabilirne la velocità al tempo t=2 s.
Leibniz si sarebbe mosso in questo modo: preso l'istante $t=2$ [4], si consideri la quantità "infinitesima" che indicheremo con Δt [5] e si valuti la posizione del punto materiale all'istante $t_1=2+\Delta t$ data da $s_1=4+4\Delta t+\Delta t^2$ e quindi $\Delta s=4\Delta t+\Delta t^2$, cioè, sempre per usare la terminologia di Leibniz , una quantità infinitesima. Poiché la velocità è data dal rapporto $\Delta s/\Delta t=4+\Delta t$, Leibniz ragiona come se *4* e $4+\Delta t$ fossero "la stessa cosa", cioè come se Δt fosse una quantità trascurabile rispetto a *4*.
Contrariamente a Leibniz (e a Newton), Weierstrass non afferma che $4+\Delta t$ è praticamente uguale a *4*, ma che $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4$ (1). Innanzi tutto questo permette di considerare Δt come un numero reale non nullo (tende a zero, ma non è zero) e quindi di semplificarlo nel rapporto; la definizione di limite di Weierstrass espressa dalla (1) (noto come metodo dell'ε-δ) si esprime affermando che
"comunque si prenda una quantità positiva ε, esiste un'opportuna quantità positiva δ tale che se Δt è minore di δ, allora la differenza fra $\Delta s/\Delta t$ e 4 è minore di ε" [6]." In sostanza posso rendere l'errore che commetto considerando *4* anziché $\Delta s/\Delta t$ piccolo sin che voglio.
La formalizzazione di limite di Weierstass può essere letta anche in questi termini: "fissato pari ad ε l'errore massimo che voglio commettere considerando f(x) anziché L, posso trovare un valore δ che mi fornisce l'intorno di x_o in cui 'pescare' i valori di x che mi forniscono tali f(x)". La formulazione non è sicuramente

[4]Per comodità ometteremo le unità di misura delle grandezze utilizzate.
[5]Quelle che seguono non sono le notazioni utilizzate da Leibniz.
[6]Con l'usuale terminologia formale: $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{0<\Delta t<\delta}{\forall} \quad \left|\frac{\Delta s}{\Delta t} - 4\right| < \varepsilon$

agevole, ma dovrebbe rendere il senso di limite come approssimazione, approssimazione resa migliore "quanto si vuole". Del resto questo tipo di lettura non è molto lontana dall'impostazione data da Newton.

A fronte di un linguaggio più rigoroso, frutto di una sistematizzazione logica più rigorosa, tale modo di procedere ricorda molto il metodo di esaustione archimedeo, di cui ricalca lo spirito: gli infinitesimi, se l'ε di Weierstrass si può considerare un infinitesimo, sono infinitesimi potenziali e non attuali anche se è scelto in un insieme (quello dei numeri reali) che presenta (come insieme) un infinito in atto; in sostanza siamo ancora nell'ottica secondo cui gli infinitesimi in sé non esistono, nel pieno rispetto della tradizione classica.

Tale concetto risulta forse più chiaro se si esamina come Weierstrass tratta l'infinito. Cosa significa che una funzione tende all'infinito quando la variabile indipendente x tende ad un valore x_o (in simboli $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$)? Nella definizione di Weierstrass significa che "comunque si prenda una quantità positiva M "grande" esiste un valore x "vicino" a x_o tale che il valore della funzione calcolata in x sia maggiore di M[7]. Anche in questo caso quindi un infinito potenziale. E' solo il caso di osservare che nell'usuale prassi didattica dell'analisi, $+\infty$ (oppure $-\infty$) è semplicemente un simbolo (o, come viene detto in gergo matematico, una chiusura topologica).

Di impianto completamente diversa la risposta data, nel '900, dall'analisi non standard che "nasce" nel 1966 col libro *Non-Standard Analysis* che A. Robinson pubblica presso la North-Holland Publishing Co.

L'idea di Robinson in fondo è semplice: riprendere il concetto di infinitesimo nella versione di Leibniz, costruire un "mondo" in cui operare con questi infinitesimi in modo da dedurre i risultati che non è possibile trovare in R. Detto in modo così superficiale però non risulterebbero chiare quali condizioni permettevano al matematico americano di superare il limite e le riserve rappresentate dall'accettazione di un infinitesimo in atto.

Il problema in fondo è sempre quello: esistono gli infinitesimi? Cosa significa "esistere"? In un contesto matematico il concetto di esistenza non è più così chiaramente legato ad un'idea di modello reale, ma a quello di modello logico. Ciò che Robinson aveva a disposizione rispetto al filosofo tedesco erano soprattutto i risultati riguardanti la teoria dei modelli come i teoremi di Skolem relativi ai modelli non-standard del "contare" e, soprattutto, il teorema di compattezza del logico russo A.Malcev (successivamente generalizzato da L.A. Henkin), dedotto a sua volta del teorema di completezza di Gödel[8].

Il teorema di compattezza può essere espresso in questo modo:

"*Supponiamo di avere un insieme di proposizioni nel linguaggio L e supponiamo che ogni sottoinsieme finito di tali proposizioni sia vero in un universo standard U; esiste allora un universo non-standard U* in cui tutte le proposizioni dell'intera collezione sono simultaneamente vere*".

Vediamo allora come il teorema di compattezza garantisce l'esistenza di infinitesimi.

Si consideri l'insieme (infinito) P di proposizioni:

" ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/2"

"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/3"

"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/4"

.

.

"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/n"

e così via.

Gli elementi di P possono essere scritti con un linguaggio formale del prim'ordine[9]; inoltre se ci si riferisce all'universo (standard) R dei numeri reali, ogni suo sottoinsieme finito è vero poiché nell'intervallo *]0,1/n[* cadrebbero infiniti numeri reali. Tuttavia l'insieme di tutte queste proposizioni risulta falso in R poiché dovrebbe esistere un numero reale positivo ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale. Per il teorema di compattezza esiste però un universo non-standard (che indicheremo con R*) in cui tutte le proposizioni di P sono vere. In tale insieme esiste allora un ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale; e questa condizione caratterizza ε come infinitesimo.

---

[7]In simboli: $\forall_{M>0} \quad \exists_{\delta>o} \quad \forall_{x \in Df} \left(|x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) > M \right)$

[8]Il teorema di completezza afferma che un insieme di proposizioni è logicamente coerente se e solo se le proposizioni hanno un modello, cioè se e solo se c'è un universo in cui esse sono tutte vere.

[9]Ad esempio la prima diventerebbe: $\exists c \in \Re (c>0 \wedge c<½)$; è il caso di ricordare che un linguaggio è del prim'ordine se i quantificatori agiscono su variabili individuali e non su predicati.

Una volta trovato un modello in cui esistono gli infinitesimi, il resto risulta conseguente; in particolare si possono definire gli infiniti (sempre col teorema di Malcev-Henkin; si sono invitati gli specializzandi a farlo come esercizio), le operazioni tra elementi non standard e le funzioni definite in R*. Il dubbio che è tuttavia emerso è come diventa l'insieme dei numeri reali in una versione non-standard, se è possibile cioè darne una rappresentazione analoga all'usuale retta reale. In onore a Leibniz, Robinson introdusse proprio il termine di monade per indicare l'estensione non-standard di un numero reale r. Una monade contiene un solo numero reale r (standard) ed infiniti numeri non-standard ottenuti aggiungendo a r quantità infinitesime. E' come se ogni numero reale fosse circondato, in R*, da una nube "elettronica" di infiniti infinitesimi, per cui potremmo affermare che a livello "macroscopico" r* si confonde con r, mentre a livello "microscopico" i due valori sono distinti.

Il concetto di monade (che ha permesso di riprendere la filosofia di Leibniz) permette di comprendere meglio il concetto di vicinanza: un numero reale non-standard s appartiene alla monade individuata da un numero reale standard r se la loro differenza è un infinitesimo[10]; quindi due numeri reali non-standard sono infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade. In questo modo è possibile esprimere in senso matematico anche il concetto di "trascurabile": si potrebbe sostenere che all'interno di una monade è trascurabile ciò che non è reale, considerandone il numero reale che la caratterizza come l'essenza (per usare una terminologia leibniziana); in generale potremmo dire che è trascurabile ciò che non è standard.

Riprendiamo come esempio il problema della velocità e vediamo come è stato risolto utilizzando l'analisi non-standard:

preso un infinitesimo positivo ε, si consideri lo spazio relativo all'istante $2+\varepsilon$ (si osservi che $2+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da 2); lo spazio percorso dall'istante $t=2$ all'istante $t1=2+\varepsilon$ è dato da $ds=4\varepsilon+\varepsilon^2$ e quindi il rapporto $\frac{ds}{dt} = \frac{4\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 4 + \varepsilon$ (con ε si è operato in modo algebrico). Il valore $4+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da *4*, cioè la parte standard di $4+\varepsilon$ è *4*. In pratica la velocità istantanea è data dalla parte standard[11] di $4+\varepsilon$ che in genere è indicata con $st(4+\varepsilon)$.

Questo modo di procedere non è molto dissimile da quello utilizzato da Leibniz; la non trascurabile differenza è che ora, per la prima volta, il metodo infinitesimale è stato reso rigoroso, grazie soprattutto alla logica formale. Le obiezioni di Berkeley, legate soprattutto alla possibile esistenza degli infinitesimi in atto, trovano finalmente risposta.

7. Conclusioni

La conclusione di questo lavoro non può non tenere conto di un aspetto strettamente connesso ai precedenti: "fare i conti" con "la fiducia" nella matematica. Relativamente alle varie risposte date dagli specializzandi ad esempio ai paradossi di Zenone e alle questioni sull'analisi, è emerso in diversi la fiducia nelle risposte matematiche: l'atteggiamento era grosso modo del tipo "io non so perché, ma so che con questo concetto si posso spiegare i paradossi di Zenone (o trovare la velocità istantanea)". La matematica assumeva in un certo senso il ruolo di garante, ma questo ruolo le era dato più dalla sua impenetrabilità che da una sua realmente riconosciuta autorevolezza. Non sono mancate posizioni più dubbie: qualcuno al proposito ha parlato di matematica come metafisica, soprattutto nell'ottica di "descrittore" di un modello della realtà.

E' indubbio comunque come tra i più fosse presente una visione assoluta dettata più dal timore e dal rispetto che da una reale consapevolezza; e questo conferma in un certo senso un limite notevole della matematica che non riesce a farsi capire e conoscere, anche da parte di chi si occupa di questioni molto affini (se non le stesse). Credo che ogni insegnante di matematica si sia sentito dire da qualche collega (di altra materia) o abbia lui stesso detto di trovarsi su una torre d'avorio, immacolata e pura nella sua preziosità.

Laboratorio didattico a carattere interdisciplinare quindi non solo come simulazione didattica, ma anche come scambio/confronto di esperienze, per mostrare come le prospettive e le finalità con cui sono osservati e vissuti gli eventi didattici possano essere profondamente diverse, sia sul piano metodologico che su quello dei contenuti, ma su cui è possibile costruire percorsi comuni.

---

[10] La caratterizzazione delle monadi potrebbe essere fatta anche in un altro modo: presi due elementi *r* ed *s* di *R**, consideriamo la relazione *sMr* se e solo se $|s-r|=\varepsilon$, con ε infinitesimo positivo. Come si può facilmente dimostrare questa è una relazione di equivalenza su *R*xR** di cui le monadi costituiscono le classi di equivalenza. Si osservi inoltre che dalla relazione così definita discende che due numeri reali distinti non possono appartenere alla stessa monade.

[11] Nell'analisi non standard la funzione parte standard è lo strumento che permette di "riportare" a livello macroscopico (e quindi a livello di numeri reali) ciò che succede a livello microscopico (e quindi con gli infinitesimi).

Il materiale prodotto dagli specializzandi (che ovviamente ne hanno dato la disponibilità alla pubblicazione) oltre al materiale fornito dal docente è rintracciabile sul sito www.fatalibelli.it nella sezione *Laboratorio Prof. Maffini.*

BIBLIOGRAFIA

[A] Aristotele – Opere (Fisica, Del cielo) – Laterza, 1973
[B] Bagni – Storia della Matematica – Pitagora, 1996
[BA] Barrow J.D. - La luna nel pozzo cosmico - Adelphi, 1994
[BE] Bergson – Saggio sui dati immediati della conoscenza – Raffaello Cortina, 2002
[BJ] Borges – La perpetua corsa di Achille e la tartaruga, in Tutte le opere vol 1– Meridiani Mondatori, 1984
[BJ1] Borges – Metempsicosi della tartaruga, in Tutte le opere vol. 1– Meridiani Mondatori, 1984
[BO] Boyer – Storia della matematica – Mondatori, 1976
[D'A] D'amore, Arrigo – Infiniti – Franco Angeli, 1992
[E] Euclide - Elementi (a cura di A. Frajese) - UTET 1996
[F] Falletta – Il libro dei paradossi – Longanesi & C, 1983
[H] Hersh – Cos'è davvero la matematica – Baldini & Castaldi, 2001
[G] Gardner – Sui paradossi di Zenone, in Verità e Dimostrazione – Le Scienze, 1978
[GE] Storia del pensiero filosofico e scientifico a cura di L. Geymonat-Garzanti,1988
[LR] Lobardo Radice – L'infinito – Editori Riuniti, 1981
[M] A. Maffini - Le origini dell'Analisi non-standard: quattro passi nel mondo degli infiniti e degli infinitesimi in atto - Quaderni di ricerca in didattica n°8- Palermo 1999- G.R.I.M.
[O] Odifreddi – C'era una volta un paradosso – Einaudi, 2001
[R] Russell – I principi della matematica – Newton, 1971
[RK] Rucker – La mente e l'infinito – Muzzio, 1982
[T] Toth I - Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria - Vita e Pensiero 1998
[T1] Toth – "Come diceva Filolao il Pitagorico.." Filosofia, Geometria, Libertà – in Federico Enriques, Matematiche e Filosofie – Belfonte, 2001
[TV] Tagliasco, Vincenti – Dietro le formule… - Bollati Boringhieri,1998
[Z] Zellini – Breve storia dell'infinito – Adelphi, 1980

Racconti di Borges sul tema:
In FINZIONI (in Tutte le opere vol. 1– Meridiani Mondatori, 1984)
La biblioteca di Babele
Il giardino dei sentieri che si biforcano
La morte e la bussola
In L'ALEPH (in Tutte le opere vol. 1– Meridiani Mondatori, 1984)
La scrittura di Dio