Concetti matematici e ambiguità linguistiche

Seminario Scuola Secondaria di Secondo Grado Achille Maffini

0. Premessa

Nell'ambito del corso Mate.con, proposto dall'Istituto D'Arzo di Montecchio Emilia¹ negli anni 2004/05 e 2005/06 è stato attivato un corso di pre-logica tra i cui obiettivi c'era quello di favorire un confronto tra insegnanti di diversi ordini scolastici e la lettura, a partire dalle categorie linguistiche morfologia, sintassi e semantica, di specifici contenuti matematici².

Ci sono domande con le quali un insegnante non può non confrontarsi, come: a quale livello il linguaggio formale è di ostacolo o di aiuto alla comprensione dei concetti? Qual è la conoscenza sottesa a specifici termini o modalità di scrittura dagli studenti e dall'insegnante? Cosa capiscono gli studenti, in base alle loro preconoscenze, di quel che dice l'insegnante?

Tutte le domande precedenti coinvolgono aspetti delicati del processo di conoscenza: la prima richiede all'insegnante di stabilire un equilibrio tra il cosiddetto 'rigore' e l'efficacia, senza dimenticare il ruolo del delicato rapporto semiotica-noetica³; la seconda coinvolge direttamente il problema della verticalità e delle preconoscenze degli alunni; la terza è la più delicata e coinvolge il rapporto tra chi, forte di una conoscenza di cui è portatore, può permettersi delle forme sottointese che il discente non può, invece, contemplare.

1. Questioni di linguaggio

La contemporanea presenza, nella prassi didattica, del linguaggio naturale e del linguaggio specifico è frutto di alcune esigenze prioritarie nell'insegnamento; tra queste citiamo:

¹ Per la presentazione del progetto, si veda (Garofani, 2010) e (De Pietri, 2010).

² Il risultato del corso è stato sintetizzato nel testo (Maffini, 2006).

³ Al proposito si veda, ad esempio, (D'Amore, 2001) e (Duval, 1993).

- a) l'esigenza di collegare i contenuti matematici all'esperienza, anche linguistica, degli studenti;
- b) come detto anche in precedenza, conciliare il 'rigore' con l'efficacia didattica.

Uno degli aspetti su cui vale fare una riflessione è proprio il rapporto tra 'rigore' ed efficacia. Già la definizione di 'rigore matematico' può essere di difficile connotazione, in quanto passa attraverso l'idea che il linguaggio serva a strutturare gli argomenti e non sia solo uno strumento per comprenderli.

In una prospettiva di reificazione⁴ degli oggetti matematici, la verticalità del curricolo e la ripresa a spirale di concetti via via sempre più 'formalizzati' si può vedere come un lungo e delicato percorso nella costruzione, da parte di ciascun alunno, di una propria realtà matematica. In questo senso, il linguaggio naturale può non essere neutro, in quanto soggetto a letture e interpretazioni non sempre specificate all'interno del contesto didattico.

Non è inusuale, infatti, che nella prassi didattica il linguaggio utilizzato presupponga una sorta di 'intesa' tra insegnante e alunno, secondo la quale 'ci si capisce' senza bisogno di stabilire il corrispondente linguistico alla forma metalinguistica.

Come insegnanti, siamo sempre certi che gli studenti siano in grado di effettuare tale corrispondenza?

Spesso nella presentazione dei concetti matematici, i testi e alcune prassi scolastiche consolidate fanno comparire, sotto mentite spoglie, quantificatori e connettivi in modo non adeguato. A prima vista, il linguaggio naturale sembra aiutare la comprensione, ma è effettivamente così o nasconde (senza superarle) le difficoltà?

Capita così che si proceda per 'approssimazione' di testi e prassi, con difficoltà per gli alunni spesso ricondotte ad altre cause e non a motivi legati al linguaggio. D'altra parte, la ricerca dell'equilibrio di cui si parlava in precedenza pone il non semplice problema di

⁴ Al proposito si veda (Sfard, 1991), (Tall&Vinner, 1981).

come stabilirlo e quali strumenti ha l'insegnante per definirne i confini

2. Il seminario

Analogamente a quanto proposto agli insegnanti del corso Mate.con, anche durante il seminario sono state proposte delle consegne a partire da argomenti o problematiche trattate da libri di testo. La scelta di lavorare a partire dai libri di testo si fonda su due convinzioni:

- 1) il libro di testo è un terreno neutro, oltre ad essere, naturalmente, il principale strumento di lavoro per parecchi insegnanti;
- 2) malgrado molti libri di testo abbiano aspetti discutibili, è indubbio che siano adottati dagli insegnanti (anzi, tra i testi più adottati ci sono spesso quelli che, ad una attenta lettura, suscitano le maggiori perplessità); inoltre su questioni relative soprattutto agli aspetti linguistici, la differenza tra il testo e la presentazione dell'insegnante spesso non è significativa.

Di seguito riporterò, a titolo di esempio e per chiarire meglio il tipo di difficoltà coinvolte, solo alcune delle proposte discusse durante l'incontro⁵.

2.1. Funzioni definite a tratti

Il concetto di funzione è ritenuto, a ragione, uno dei nuclei fondanti nella costruzione del sapere matematico; a conferma di ciò, basta vedere la vasta letteratura presente in materia, sia sul piano didattico che su quello contenutistico.

Una delle incongruenze tipiche relative al concetto di funzione si riferisce alla sua definizione: spesso si trova, anche in termini impliciti, la funzione definita come relazione ovunque definita e funzionale. Quindi il concetto di dominio è intrinsecamente legato alla definizione stessa di funzione, mentre negli esercizi di analisi relativi allo 'studio di funzione', la richiesta prioritaria è di trovarne il dominio, privilegiandone quindi l'espressione analitica (e quindi

⁵ Tutto il materiale fornito ai presenti è reperibile sul sito del Centro Morin.

l'aspetto morfo-sintattico) alla definizione in senso globale (e quindi all'aspetto semantico).

Al di là di queste considerazioni, legate più ad una mancata valutazione critica della definizione di funzione⁶, ciò che qui interessa è vedere come l'uso del linguaggio naturale intervenga nell'ipotetica esplicitazione dei concetti.

Il caso tipico è quello delle funzioni definite a tratti. Il termine stesso di 'funzione definita a tratti' nasconde una priorità linguistica, laddove i tratti sono sostanzialmente diverse espressioni analitiche definite su intervalli disgiunti. Questo aspetto, che coinvolge il concetto di espressine analitica di una funzione e di restrizione del dominio di una funzione⁷, è spesso trattato con una terminologia non univoca e sostanzialmente non esplicitamente definita.

Ad esempio, tra le forme con cui è spesso definita una funzione a tratti citiamo le seguenti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ se } x < 2\\ 2 - x \text{ se } x \ge 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ se } x < 2\\ 2 - x, x \ge 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ son } x < 2\\ 2 - x \text{ per } x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2\\ 2 - x \text{ per } x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2\\ 2 - x \text{ per } x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2\\ 2 - x \text{ per } x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2\\ 2 - x \text{ per } x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x < 2\\ 2 - x, x \ge 2\\ 2 - x \text{ per } x \le 2 \end{cases}$$

Nell'esempio precedente sono stati riportati cinque modi per collegare le espressioni analitiche delle funzioni con la condizione sulla variabile indipendente. Questi modi sono equivalenti? Come valutarne l'equivalenza e su quale piano? Quali/e connettivi/o sottintendono il se, lo spazio vuoto, la virgola, il per e il con? È esplicitato tale connettivo? Qual è il ruolo della parentesi graffa? Qual è il processo mentale richiesto agli studenti?

Partirei dall'ultima domanda. Nella prassi didattica, se si deve rappresentare il grafico della funzione f, si procede attraverso una restrizione del grafico della funzione (ad esempio di espressione ana-

⁶ Per tali questioni si veda, ad esempio, (Maffini, 2000a) e (Maffini, 2007).

⁷ Concetto questo tutt'altro che banale, in considerazione dell'abitudine, implicita, di identificare la funzione con la sua espressione analitica.

litica 2x-3) all'intervallo individuato dalla proposizione⁸ a cui è soggetta la variabile. In termini insiemistici questo corrisponde all'intersezione di due insiemi, $A=\{(x,y)\in RxR/y=2x-3\}$ e $B=\{(x,y)\in RxR/x<2\}$ e quindi, nel piano cartesiano, all'intersezione di una retta e di un semipiano. In questi termini, la scrittura utilizzata per definire una funzione a tratti si configurerebbe come l'unione di due intersezioni. Ad esempio, il grafo della funzione f utilizzata come esempio è dato da

G= $(\{(x,y) \in RxR/y=2x-3\} \cap \{(x,y) \in RxR/x<2\})$ $\cup (\{(x,y) \in RxR/y=2-x\} \cap \{(x,y) \in RxR/x \ge 2\})$

Questo processo mentale trova riscontro nella simbologia utilizzata nella definizione? Oppure, anche in questo caso, si dà per scontato che 'ci si intenda'?

Se facciamo partire la nostra analisi dalla parentesi graffa aperta, il riferimento diretto è alla simbologia utilizzata per i sistemi, per cui si configura come un'intersezione. Per quanto riguarda poi le varie locuzioni, il *se* rimanda ad un'implicazione, la *virgola*, presumibilmente, ad una congiunzione, mentre lo *spazio vuoto*, il *con* o il *per* non hanno una traduzione 'canonica' nel linguaggio matematico. Rispetto ad altre circostanze, vale la pena osservare che in questi casi non si tratta di ricchezza del linguaggio naturale non esprimibile nel linguaggio formale, quanto di ambiguità vera e propria: perché utilizzare terminologie aventi, nel linguaggio naturale, ruoli e significati diversi?

Nella fattispecie, condivisa l'interpretazione della parentesi graffa (anche solo per analogia), l'indicazione più plausibile è quella for-

_

⁸ Col termine 'proposizione' indicherò, secondo quanto proposto ad esempio da Husserl e Russell, una formula ben formata interpretata in un contesto (in questo caso il contesto dell'algebra). In sostanza, seguendo questa posizione, le proposizioni sono 'frasi' di uno specifico contesto (ad esempio algebrico), delle quali non è detto si possa assegnare o stabilire un valore di verità. Questa scelta è motivata dalla possibilità di poter trattare oggetti linguistici senza incorrere nel (filosoficamente) delicato problema insito nel concetto di verità.

nita dal *se* che induce l'idea di un'implicazione. Secondo questa lettura, il grafo della funzione *f* proposta è

$$G=\{(x,y)\in RxR/x<2\rightarrow y=2x-3\}\cap\{(x,y)\in RxR/x\geq 2\rightarrow y=2-x\}$$

L'individuazione delle coppie di tale insieme non è semplice, vista la riconosciuta difficoltà nella gestione dell'implicazione. Ad esempio il primo insieme è formato dalle coppie con prima componete maggiore o uguale a 2 oppure da quelle in cui la seconda componente è legata alla prima dalla proposizione y=2x-3; quindi graficamente si avrebbe l'unione di un semipiano e di una retta. Questo risultato è più facilmente visualizzabile se si tiene conto che, nella logica classica, $p \rightarrow q |=|\neg p vq$.

L'intersezione tra i due insiemi porta effettivamente al risultato atteso, ma con un percorso tutt'altro che semplice.

Questo approccio, che coinvolge rappresentazioni semiotiche e registri rappresentativi diversi, permette di riportare una descrizione che mischia linguaggio specifico e linguaggio naturale ad una che coinvolge solo il linguaggio specifico e che quindi non dovrebbe prestarsi ad ambiguità.

Un'ulteriore conseguenza è che tale lettura permette di escludere sia la congiunzione che la doppia implicazione (se si pensasse di interpretare la caratterizzazione come una definizione) come possibili connettivi: in questi casi, infatti, gli insiemi che caratterizzano il grafo sarebbero disgiunti e quindi la loro intersezione sarebbe vuota.

Dal punto di vista logico, vale la pena osservare che⁹
$$(x<2\rightarrow y=2x-3)\land(x\geq 2\rightarrow y=2-x)|=|(x\geq 2\ vy=2x-3)\land(x<2\ vy=2-x)|=|(x\geq 2\ \lambda x<2)\lor(x<2\ \lambda y=2x-3)\lor(x\geq 2\ \lambda y=2-x)\lor(y=2x-3\ \lambda y=2-x)|=|$$

 $^{^9}$ Anziché un'equivalenza sintattica, ho preferito proporre un'equivalenza semantica in quanto si ha a che fare con variabili reali e non indeterminate, per cui, come si vedrà, il ruolo delle proprietà dei predicati individuanti in R relazioni d'ordine assumono un ruolo determinante nella semplificazione delle proposizioni. Per alleggerire la scrittura ho poi omesso i quantificatori universali sulla variabile x, anche in considerazione del fatto che le equivalenze si fondano sostanzialmente su questioni riconducibili alla logica proposizionale.

$$(x<2 \wedge y=2x-3) \vee (x \ge 2 \wedge y=2-x)$$

L'approccio formale permette di confermare come la modalità operativa seguita per queste funzioni (o per la funzione valore assoluto, vista l'analogia delle problematiche) sia giustificata da una specifica lettura delle modalità con cui i contenuti sono presentati. In ogni caso, la dimostrazione dell'equivalenza non è immediata, coinvolgendo sia proprietà dei connettivi logici, sia le proprietà delle relazioni d'ordine coinvolte.

Se queste sono le ambiguità e le difficoltà, perché non superarle in modo globale fornendo in generale una rappresentazione che si fondi sulla disgiunzione di congiunzioni? A questo proposito, potrebbe essere utilizzata una diversa simbologia, come ad esempio la parentesi quadra per indicare la disgiunzione ed esplicitare direttamente la congiunzione. Così la funzione f precedente sarebbe individuata da:

$$f(x) = \begin{cases} (2x - 3) \land (x < 2) \\ (2 - x) \land (x \ge 2) \end{cases}$$

 $f(x) = \begin{bmatrix} (2x-3) \land (x < 2) \\ (2-x) \land (x \ge 2) \end{bmatrix}$ Questa forma è più 'pesante'? È meno immediata? Ciascuno può naturalmente dare la propria risposta. Personalmente mi sembra opportuno sottolineare due aspetti:

- 1) pensare di proporre le espressioni analitiche delle funzioni in questi termini 'obbliga' gli insegnanti a trattare la logica come linguaggio specifico di supporto alla matematica e non solo come una semplice traduzione (con tutti i limiti del caso) del linguaggio naturale;
- 2) come diversi studi dimostrano¹⁰, il concetto di funzione non è di per sé semplice; soprattutto non è semplice il concetto di restrizione del dominio di una funzione, anche in considerazione rilevanza assunta, sul piano epistemologico, dall'espressione analitica nel concetto di funzione.

¹⁰ Per tali questioni si rimanda ad esempio a (Marchini, 1997), (Maffini, 2000) e (Maffini, 2000a) e alla bibliografia presente in tali lavori.

Quello che si è presentato, in sostanza, non è solo la semplice gestione di un'ambiguità linguistica, quanto il tentativo di mostrare come, cercando di riportare questo tipo di ambiguità ad un ambito univocamente definito, ci si renda conto di come si debbano analizzare e approfondire i concetti sottointesi. In un certo senso, l'analisi linguistica diventa occasione per approfondire e meglio chiarire il concetto stesso.

2.2. Parametri

Un altro aspetto linguisticamente delicato è la gestione dei parametri. In questo caso, le preposizioni utilizzate (*con*, *per* oppure, a volte, la *virgola*) nascondono un quantificatore. Ma quale?

La domanda, dal mio punto di vista, non è fine a se stessa, poiché la gestione del parametro rientra anch'essa in quella tipologia di situazioni in cui l'oggetto matematico diventa occasione per analizzare meglio i contenuti coinvolti o che fanno parte del suo universo semantico.

In (Bernardi, 2002) il parametro, rispetto alla variabile o all'incognita, è individuato dall'ordine con cui viene quantificato. Un altro approccio, riscontrabile ad esempio in (Iacomella&altri, 2004), si basa sul concetto di funzione e permette di ribadirne il ruolo di concetto unificante. In questo caso il parametro è visto come variabile di una funzione dall'insieme di variabilità, all'insieme di oggetti che il parametro identifica.

Secondo questa prospettiva, il quantificatore è universale o esistenziale a seconda che l'attenzione sia posta sugli elementi del dominio o su quelli del codominio¹¹. Propongo due esempi, relativi alle equazioni goniometriche e tipiche della prassi didattica, al fine di chiarire il concetto.

Per le equazioni elementari è usuale trovare scritture del tipo

$$senx=k \text{ con } k \in [-1;1] \tag{1}$$

senx=1 ha come soluzioni $x=\pi/2+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ (2)

¹¹ Con codominio intendo il secondo insieme del prodotto cartesiano di una relazione binaria.

Il caso (1) si riferisce alla definizione di equazione goniometriche, la (2) alla proposizione che individua l'insieme delle soluzioni di un'equazione goniometrica.

Le scritture sono formalmente uguali, però in (1) il parametro induce una funzione dall'insieme dei numeri reali all'insieme delle equazioni goniometriche elementari in seno; in (2) una funzione dall'insieme dei numeri relativi all'insieme dei numeri reali. Malgrado questa caratteristica, però, se si volessero indicare i quantificatori corretti, il primo parametro sarebbe quantificato universalmente, il secondo esistezialmente. In sostanza, le modalità corrette che permetterebbero di non lasciare allo studente la 'scelta' del quantificatore sarebbe per la (1)

 \forall k \in [-1;1](senx=k è un'equazione goniometrica elementare) mentre, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (2) è $S=\{x\in\mathbb{R}/\exists k\in\mathbb{Z}(x=\pi/2+2k\pi)\}.$

Cosa distingue quindi i quantificatori? Nel caso (1), della funzione di variabile k interessano le informazioni che tale funzione fornisce sugli elementi del dominio (tutti individuano una funzione), mentre nel caso (2) interessa ciò che la funzione induce sugli elementi del codominio e quindi quali di questi elementi appartengano all'insieme delle immagini della funzione¹².

A partire quindi dal concetto di funzione, si possono 'leggere' tutte le situazioni in cui compaiono parametri; ma oltre a ciò c'è un altro vantaggio didattico non trascurabile: la possibilità di 'stratificare', per mezzo delle funzioni, i problemi in cui compaiono parametri. Consideriamo ad esempio il seguente problema tratto da (Lamberti

Consideriamo ad esempio il seguente problema, tratto da (Lamberti L., Mereu L., Nanni A., *Matematica Uno*, Etas):

È dato il trapezio convesso ABCD di base maggiore $\overline{AB}=3l$, base minore $\overline{DC}=l$ e altezza uguale a 2l. Condurre una parallela r alle basi che incontra i lati obliqui in H e in K in modo che risulti

_

 $^{^{12}}$ In sostanza i numeri reali soluzioni dell'equazione sono tutti e soli quelli appartenenti all'insieme delle immagini della funzione individuata dal parametro e quindi per i quali esista almeno un numero k di cui siano immagini.

 $m\overline{H}\overline{K}-\overline{H}\overline{T}=ml$, essendo $\overline{H}\overline{T}$ la distanza di r dalla base maggiore AB. In problemi come questi, al di là della richiesta fuorviante 13 , compiono tre 'lettere': i parametri m ed l e l'incognita (presumibilmente x) dell'equazione. Se guardiamo i parametri secondo un modello funzionale, l individua il contesto (il particolare trapezio isoscele), m il problema all'interno del contesto, x il dato incognito all'interno del problema. In pratica, l individua 'un mondo', m un problema all'interno di quel mondo e x 'l'individuo' che risolve quello specifico problema. Ciascuna di queste lettere è legata ad una funzione che stratifica, come detto, i vari contesti. Il percepire questa stratificazione permette di comprendere i livelli di astrazione a cui le varie situazioni problematiche fanno riferimento

3. Conclusioni

Con gli esempi proposti ho solo voluto dare un'idea delle possibili connessioni tra linguaggio naturale e linguaggio formale; altri se ne potrebbero fare soprattutto sul piano della gestione di termini quali 'senso' e 'significato', oppure del passaggio di un concetto da un ordine scolastico ad un altro. Come detto nella premessa, spesso le ambiguità sono 'volute' o mal gestite. Se la valutazione sul piano dell'efficacia didattica dell'uso contemporaneo del metalinguaggio e del linguaggio è a discrezione dell'insegnante, ciò che è importante è che l'insegnante conosca quali condizioni sottendono le sue scelte, con l'obiettivo, questo sì fondamentale, di averne sempre consapevolezza.

4. Bibliografia

Bernardi C., Canizzaro L.: 2002, *A cosa servono le lettere in matematica?*, L'insegnamento della Matematica e delle scienze Integrate, Vol. 25B

D'Amore B., 2001, *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetiche*, La matematica e la sua didattica n.2

¹³ Ciò che si chiede non è di risolvere un'equazione, ma di discuterla.

De Pietri S.: 2010, *MATE.CON. Matematica in continuità dai 6 ai 16 anni. I corsi di formazione tra passato, presente e futuro*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 33 A-B, Novembre-Dicembre 2010.

Duval R.: 1993, Registres de représentation sémiotique et fonctionement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM, Strasbourg

Ferrari P.L.: 2004, *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora, Bologna

Furinghetti F.: 2002, *Matematica come processo socioculturale*, IPRASE Trentino

Garofani R.: 2010, MATE.CON. Matematica in continuità dai 6 ai 16 anni. Il progetto: origine, e-voluzione e prospettive future, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 33 A-B, Novembre-Dicembre 2010.

Iacomella A., Letizia A., Marchini C.: 2004, *Il comunicare in matematica. Formalizzare: come, quando, perché, nella prassi didattica*, Quaderno n.377 Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, ottobre 2004, reperibile all'indirizzo http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/PDF/Quadernoacolori.pdf

Maffini A.: 2000, *Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria*, Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3* (2000)

Maffini A.: 2000a, *Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore*, Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000

Maffini A.: 2006, *Dov'è la logica?*, Istituto D'Arzo di Montecchio Emilia.

Maffini A.: 2007, Il concetto di funzione: dalla definizione alla prassi didattica, reperibile all'indirizzo

http://www.treccani.it/site/Scuola/nellascuola/area_matemat ica/archivio/funzioni/maffini.htm

Marchini C.: 1997, *Conflitti tra sintassi e semantica nella trattazione delle funzioni*, (D'Amore B., Pellegrino C. eds.) Atti del Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza, Pitagora ed. Bologna, 1997, 94 - 98.

Sfard A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions:* reflexions on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22

Tall D., Vinner S.: 1981, *Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 48.