L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 37B N. 1 - FEBBRAIO 2014

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale - D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue

Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4 - 31017 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso)

Il valore assoluto: un'occasione di analisi logico-linguistica di un concetto matematico

Achille Maffini[1]

Abstract
Come tutti gli insegnanti sanno, il valore assoluto, o meglio la funzione valore assoluto, costituisce per gli studenti un ostacolo difficilmente superabile, che spesso permane anche all'Università.
L'intento del presente lavoro è quello di analizzare le condizioni logico-linguistiche presenti nelle varie definizioni che normalmente vengono presentate nel tentativo di mettere a fuoco gli ostacoli, sia didattici che epistemologici, con i quali gli studenti sono costretti a scontrarsi.
Alla fine si formulerà una proposta didattica, vista come sintesi delle analisi svolte.

Abstract.
As all teachers know, many students experience difficulty comprehending the concept of absolute value or rather the function of absolute value; this difficulty often remains at university level.
The purpose of this study is to analyse the logical and linguistic conditions of the various definitions normally used to focus on the specific difficulties students come up against, whether they are of a didactic or epistemelogical nature.
In conclusion we present a didactic proposal in view of the results of our analyses.

[1] Liceo Scientifico "G. Ulivi" di Parma; Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica – Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Parma
Indirizzi mail: a.maffini@achillemaffini.it

Il valore assoluto: un'occasione di analisi logico-linguistica di un concetto matematico

Achille Maffini[2]

1. Questioni di linguaggio.

Tra le concezioni più diffuse, anche a livello popolare, nei confronti della matematica c'è quella che la classifica come la disciplina del rigore e della non opinabilità. Ma su che cosa si fonda il rigore di una disciplina? E come lo si 'riconosce'? Limitando la discussione alla prassi didattica, ritengo che buona parte del problema del rigore sia relativo al linguaggio utilizzato.

Da tempo, ormai, l'argomento è al centro dell'attenzione sia epistemologica che didattica (si veda, ad esempio, (Ferrari, 2004) , (Iacomella *et al*., 2004), (AA.VV., 2011)); quello che qui mi preme evidenziare è come, proprio a livello di linguaggio, ci siano, anche nei testi, evidenti ambiguità che non solo possono rendere difficoltosa la comprensione, ma soprattutto possono essere causa di concezioni errate relativamente agli argomenti presentati[3].

A volte, nella prassi didattica, il linguaggio utilizzato presuppone un contratto didattico tra insegnante e alunno, secondo il quale 'ci si intende'[4] senza bisogno di stabilire il corrispondente linguistico alla forma metalinguistica.

Entrando nel merito del presente lavoro, nella presentazione del valore assoluto i testi e la prassi scolastica standard fanno comparire, sotto mentite spoglie, quantificatori e connettivi in modo implicito o non adeguato. A prima vista il metalinguaggio sembra aiutare la comprensione, ma a un esame più approfondito questo 'understatement' non regge. Quindi le difficoltà didattiche con il valore assoluto non sono 'isolate', ma possono essere ricondotte a una generale 'approssimazione' di testi e prassi (si veda

---

[2] Liceo Scientifico "G. Ulivi" di Parma; Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica – Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Parma
Indirizzi mail: a.maffini@achillemaffini.it

[3] Un lavoro sul linguaggio nell'ottica della costruzione di un curricolo verticale è stato da me svolto presso l'Istituto D'Arzo di Montecchio (Maffini, 2008).

[4] Come caso tipico potremmo citare l'esempio del concetto di espressione.

ad esempio (Gagatsis, 2003) [5]). Per questo nel presente lavoro l'analisi in termini logico-linguistici dell'oggetto 'valore assoluto' sarà anche un pretesto per una riflessione più generale sul linguaggio utilizzato, spesso implicitamente, nella trattazione di un concetto matematico.

2. Il valore assoluto

Che cosa si indica con la locuzione 'valore assoluto'? Nella prassi didattica, è spesso presentato come numero, anche se la frase "valore assoluto di…" con cui normalmente lo si introduce nasconde l'idea di immagine di un numero attraverso una funzione.
Se si parla di valore assoluto di un numero (e quindi dell'immagine di un numero tramite una particolare funzione) il richiamo semantico più ovvio è quello di 'numero senza segno', vista la sua assonanza con altri contesti matematici in cui viene utilizzato il termine 'assoluto': un esempio tipico è quello degli insiemi numerici (*interi assoluti*, *razionali assoluti*, ecc., contrapposti a *relativi*). Se storicamente e linguisticamente questa è l'origine più prossima del concetto, la sua definizione nel tempo è cambiata, rientrando in forme più generali legate soprattutto al concetto di funzione. Come vedremo, però, permangono alcuni retaggi. Chiediamoci intanto: *modulo* o *valore assoluto*? Spesso i due termini sono utilizzati come sinonimi. Raramente si sottolinea che il primo, solitamente introdotto in spazi vettoriali con una norma, è di carattere più generale, mentre il

---

[5] "1. La *concezione di numero per misurare quantità* costituisce un ostacolo per:

- La rappresentazione della retta numerica e la conseguente relazione d'ordine
- Un concetto generale di variabile
- Il concetto di valore assoluto

2. La concezione di valore assoluto come *numero senza segno* costituisce un ostacolo per:

- L'acquisizione della definizione formale di valore assoluto
- La rappresentazione simbolica di valore assoluto

3. La concezione di funzione come regola procedurale, del tipo "*Che cosa deve fare x?*" costituisce un ostacolo per:

- La definizione formale di valore assoluto come funzione

4. La convinzione che il valore assoluto è solo un "*simbolo che deve essere tolto*" costituisce un ostacolo per:

- L'uso del valore assoluto e delle sue proprietà in numerose situazioni."

In (Gagatsis, 2003), pag. 180-181.

secondo è usato in $\mathbb{R}$; si ha quindi l'equivalenza tra i due termini se vediamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale a una dimensione[6].
Normalmente si parla di valore assoluto per numeri reali e questo può giustificare l'identificazione dei due termini (pensando sostanzialmente all'immersione canonica di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$), ma il valore assoluto può essere (e di fatto lo è) introdotto anche in insiemi numerici diversi dall'insieme dei numeri reali, per cui preferirò parlare d'ora in poi di valore assoluto, anche per evitare altri aspetti che, come vedremo, potrebbero essere fuorvianti.
Nella pratica scolastica generalmente il valore assoluto è introdotto come 'numero' nel biennio della scuola secondaria di secondo grado, quando si introducono, in termini formali, i numeri interi relativi. Ci si occupa della 'funzione valore assoluto' soprattutto nel triennio della scuola secondaria di secondo grado, quando si affronta più sistematicamente il concetto di funzione.
Normalmente e facilmente si trovano diverse possibili definizioni di 'valore assoluto' di un numero: *numero senza segno*, oppure *il massimo tra il numero dato e il suo opposto*, ecc.
Tuttavia, quando si tratta di applicare una definizione in semplici (ma non banali) casi problematici si notano spesso difficoltà e conseguenti errori da parte degli studenti. In particolare gli studenti incontrano difficoltà nella risoluzione di equazioni o disequazioni con il valore assoluto.
In che cosa consistono queste difficoltà?
Una prima risposta è che fornire una definizione non garantisce che essa venga correttamente applicata. Nel caso specifico, finché si tratta di determinare $|+5|$ oppure $|-5|$ non ci sono problemi, ma quando l'argomento del valore assoluto è un'espressione letterale, le difficoltà emergono immediatamente. Un esempio classico[7] è la determinazione di $|-a|$, che diventa facilmente a, senza alcuna riflessione sul segno di a.

---

[6] In questo senso c'è anche una stretta relazione col concetto di modulo di un numero complesso, se si definisce il modulo di un numero come distanza dall'origine del sistema di riferimento (nel caso di numeri complessi, nel piano di Argand-Gauss).
[7] Si veda (Maffini&Vighi, 2010).

Spesso, l'unico aspetto colto e utilizzato dallo studente è l'operazione, o meglio la procedura, del 'togliere il segno': il numero rappresentato dalla variabile a è considerato positivo, confondendo così il numero indicato da a con il coefficiente del monomio $-a$. Inoltre in questo caso si sovrappongono due oggetti: l'oggetto 'variabile' e l'oggetto 'monomio'. Ciò che si chiede allo studente è quindi di saperli gestire entrambi e, implicitamente, essere in grado di stabilire a quale contesto è riferita la funzione valore assoluto[8].
Vorrei però proporre un'ulteriore riflessione sul significato di un'espressione metalinguistica del tipo 'togliere il segno' a un numero. Nel paragrafo 5 affronterò direttamente gli aspetti procedurali insiti in questa definizione, ma credo sia anche opportuno affrontare un'altra questione relativa al rapporto numero-rappresentazione.
Se si parla di togliere un simbolo, si agisce sul piano strettamente morfologico, per cui non si opera sul concetto di numero, ma sulla sua rappresentazione. Nel percorso scolastico che porta alla concettualizzazione degli insiemi numerici, solitamente il problema è inverso: si tratta cioè di dare significato a scritture come -4 piuttosto che +4. L'aspetto morfologico è quindi usato per sintetizzare condizioni alla base dei nuovi insiemi numerici che si vogliono introdurre e la preoccupazione didattica è di assegnare un significato alla nuova scrittura. Nel caso del valore assoluto succede il contrario, ma si agisce sempre sul piano morfologico per 'riconoscere' nella nuova scrittura la denominazione di un altro numero. Quello che non è sempre specificato, quando tale definizione è proposta nei libri di testo, è l'insieme numerico in cui riconoscere tale numero. Vista in questi termini, 'togliere il segno' è una procedura che avviene solo sul piano denotativo (morfologico) di un numero. Questo aspetto è tanto più evidente se, ad esempio, ci si pone lo scopo di considerare il valore assoluto (inteso come numero senza segno) del numero denotato con e-π oppure $\sqrt{2}$-3. In entrambi i casi è evidente la differenza tra numero e sua denotazione (di fatto, vi è anche sottointeso un processo per individuare il

[8] Se si pensa al monomio come funzione, $|-a|$ si configura come una composizione di funzioni. Non è quindi di per sé anomalo che gli studenti incontrino difficoltà, visto che il concetto sottointeso non è immediato. Applicare il valore assoluto solo al coefficiente del monomio risulta quindi non solo naturale, ma anche probabilmente frutto del fatto che viene applicata una funzione diretta all'unico 'numero' esplicitamente presente.

numero). In questi casi è difficile, se non impossibile, parlare di numero senza segno, a meno che non si passi alla rappresentazione decimale (approssimata) dei numeri reali individuati da tali scritture.
Il concetto di valore assoluto, quindi, nella sua accezione più immediata, è strettamente connesso alla rappresentazione (in questi casi decimale[9]) del numero stesso. La morfologia prende il sopravvento, imponendo una denotazione opportuna per il concetto-numero. Non deve quindi stupire che i ragazzi fatichino o facciano confusione nel tradurre l'idea intuitiva che hanno (o che viene loro data) di valore assoluto su numeri rappresentati in modo poco opportuno per tale scopo, come quelli visti in precedenza. In pratica è come se fosse fatta loro una richiesta in un ambito inadeguato per la risposta. Del resto, la risposta attesa coinvolge il concetto di opposto per cui necessita di fatto di un'altra definizione di valore assoluto, ma soprattutto di un'altra concettualizzazione: togliere il segno è cambiare scrittura e il problema diventa quello di riconoscere il nuovo oggetto in base alla sua rappresentazione. Non sottolineare opportunamente questo aspetto e soprattutto non porre le dovute attenzioni al piano morfologico, spesso effettivamente trascurato, può costituire un tipico esempio di ostacolo didattico[10].
Come spesso succede, la storia della matematica può aiutare a comprendere le scelte e l'evoluzione del concetto, ma per questo aspetto rimando a

[9] Anche per i numeri razionali si pone un problema simile se si vogliono utilizzare delle frazioni come rappresentanti canonici e se non si fissano convenzioni per individuare, sempre sul piano morfologico, il segno di una frazione. Ad esempio, le frazioni $\frac{+2}{-3}$ e $\frac{-2}{+3}$, figlie a loro volta delle coppie di numeri interi relativi (+2;-3) e (-2;+3), rappresentano lo stesso numero razionale, senza che in esse ne venga esplicitato il segno. Al contrario la scrittura $-\frac{2}{3}$ non deriva da nessuna coppia di numeri interi relativi e se la si prende come rappresentante di un numero razionale (con segno questa volta esplicito) è perché si sono già poste e accettate convenzioni e procedure sulla gestione dei segni. Con la rappresentazione decimale dei numeri razionali questo problema viene meno.

[10] Con la locuzione 'ostacolo didattico' si intende indicare un ostacolo all'apprendimento dovuto a un'erronea strategia didattica precedente.

testi quali (Boyer, 1990), (Maffini &Vighi, 2010), (Gagatsis, 2003), (Ducato, 2002)[11].
Ciò che invece interessa vedere in questo lavoro è come viene presentato il concetto di valore assoluto nei testi, le relazioni tra le varie definizioni e, attraverso una riflessione sul linguaggio utilizzato e le modalità applicative, valutare quali siano i concetti sottostanti.

3. Il valore assoluto nei libri di testo

L'indagine condotta (sicuramente parziale) mi ha portato a individuare grosso modo cinque tipologie di definizione, che indicherò con le lettere *A, B, C, D* ed *E*. Nel commento alle definizioni e nella loro successiva comparazione, spero emerga la scelta fatta nella denominazione della classificazione. Per ogni tipologia, riporterò alcuni esempi tratti dai testi esaminati.

A) Valore assoluto come numero senza segno

Partiamo da questa definizione che, come visto in precedenza, è quella più legata alla percezione intuitiva di valore assoluto.
Riporto due definizioni: una tratta da (Prodi & Toni, 2003) coinvolgente l'idea di funzione:

"… I numeri con la freccia sono detti *interi relativi*; essi costituiscono un insieme che indicheremo col simbolo $\mathbb{Z}$. Togliendo a un intero relativo la freccia si ottiene un numero, cioè un elemento di $\mathbb{N}$, che viene detto suo *valore assoluto* …."

L'altra da (Maraschini & Palma, 2000) in cui non è fatto alcun riferimento, neppure implicito, al concetto di funzione:

"Si dice **valore assoluto** di un numero relativo *a* il numero considerato senza il suo segno.
Esso si indica scrivendo il numero stesso tra due barrette: $|a|$"

A fianco della definizione è poi riportata questa nota esplicativa:
"Valore assoluto di *a*:

[11] In quest'ultimo è presente anche una rassegna e analisi critica di libri di testo che presentano diverse definizioni.

se a è positivo, $|a|=a$
se a è negativo, $|a|=-a$"

Commento alla definizione *A*.

In entrambi gli esempi il 'senza segno' sembra riferirsi ad ambiti diversi: nel primo caso, sembra prevalere il piano semantico (associo un numero di un altro insieme), mentre nel secondo caso sembra prevalere quello morfologico (tolgo un simbolo in una stringa di simboli).
Per quanto detto in precedenza, ciò che non evidenzia tale definizione è proprio il ruolo rivestito dalla morfologia. Se si analizza in modo letterale l'espressione presente nella definizione di Maraschini & Palma (2000) "*il numero considerato senza segno*", ci si trova di fronte a un chiaro esempio di conflitto semantico: sembra infatti che il 'segno', inteso come caratterizzazione del numero in considerazione di una relazione d'ordine, sia altra cosa rispetto al numero stesso e non una sua parte integrante. Il rischio è così quello di confondere il numero con la stringa di cifre o il simbolo che lo rappresenta. 'Numero senza segno' rischia di essere, nella migliore delle ipotesi, una frase che mette soprattutto in discussione la natura stessa dell'oggetto numero e il conseguente bisogno di dare significato per una frase del tipo 'numero con segno'.
È inoltre da osservare, considerando l'idea di funzione presente nella definizione di (Prodi & Toni, 2003), come in questo caso il valore assoluto non si configuri come operatore. Secondo questa lettura diventa interessante, per i nostri scopi, la precisazione fatta in (Maraschini & Palma, 2000), testo nel quale si fornisce (nella nota riportata a fianco della definizione) l'esplicitazione di che cosa gli autori intendano per valore assoluto, in modo non dissimile da quanto vedremo nelle definizioni della tipologia *B*. Quale lettura dare di questa nota? Alla lettera, che quanto scritto è equivalente alla definizione proposta; se così fosse, si tratterebbe di un teorema; ma in questo caso ci si dovrebbe chiedere se 'senza segno' e 'opposto di un numero negativo' possono essere considerati sinonimi, proponendo così il problema del Codominio[12]. Non solo: come vedremo nell'analisi della successiva definizione, le strutture richieste dalle due de-

[12] Come evidenziato in (Maffini, 2007) il Codominio di una funzione può essere visto come il mondo dei significati: se non è riportato esplicitamente è difficile capire quale sia il significato assegnato alla funzione agli elementi del Dominio.

finizioni sono sostanzialmente diverse e nel caso della formulazione presentata nella nota è implicito il concetto dell'operatore.
Come evidenziato in (Maffini&Vighi, 2010), il rischio didattico immediato è quello poi di arrivare ad errori del tipo $|-x| = x$, in cui emerge chiaramente il problema di come considerare equivalenti le due definizioni, vista la difficoltà (di cui tratteremo nel paragrafo 5) di assegnare una connotazione semantica al numero senza segno, se non … togliendo un segno quando ne è esplicitato uno.

B) Valore assoluto come congiunzione.

È la definizione più ricorrente, soprattutto nei testi del triennio. Normalmente si presenta secondo due modalità semiotiche: con parentesi graffa (che indicherò con *B1*) oppure con due trattini obliqui (che indicherò con *B2*). Riporto, a titolo di esempio, una definizione per tipo:
B1 da (Bergamini *et alt*, 2012)

"Si dice valore assoluto di un numero reale a, e si indica con $|a|$, il numero

$$|a| = \begin{cases} a & se \quad a \geq 0 \text{”} \\ -a & se \quad a < 0 \end{cases}$$

B2 da (Lamberti *et al.*, 2008)

" La funzione valore assoluto (o modulo) fa corrispondere al numero reale a, il numero indicato con la notazione $|a|$ e definito nel modo seguente:

a se $a \geq 0$

$|a|=$

$-a$ se $a<0$"

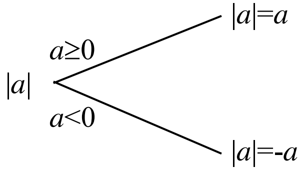
Oltre a queste strutture 'di base', vi sono però interessanti e significative differenze sul piano linguistico: al posto della locuzione 'se' non è inusuale trovare altri separatori tra l'espressione analitica e la condizione sulla variabile, come la virgola, 'per' oppure lo spazio vuoto.

Commento alla definizione *B*.

Le varie formulazioni a cui si è accennato in precedenza evidenziano una marcata disomogeneità, sia semiotica[13] che linguistica, rispetto al concetto definito. È naturale pensare che l'uso di 'se' anziché 'per' o 'la virgola' possa indurre negli studenti interpretazioni diverse. Queste scelte richiedono agli studenti delle conoscenze di carattere linguistico, sennonché tale richiesta avviene spesso in termini impliciti. Del resto, dove sono esplicitati i significati dei simboli utilizzati? Soprattutto ciò che probabilmente non si chiarisce a sufficienza è se per tutti gli studenti hanno 'un significato' e, nel caso di risposta positiva, se le eventuali interpretazioni semantiche degli studenti siano le stesse o almeno in accordo tra loro. Vale inoltre la pena osservare come la stessa problematica si ponga per le funzioni 'definite a tratti', per cui non è ristretta al solo valore assoluto.
Come supporto a questa serie di dubbi ci si potrebbe chiedere come mai siano proposte formulazioni diverse e quanto una scelta linguistica possa influire sulla comprensione; oltre a questo, si tratta di capire quanto le possibili ambiguità possono essere fonte di errori che magari, come insegnanti, riconduciamo invece a carenze degli studenti nella conoscenza o padronanza tecnica dei contenuti.
Per entrare più nel merito dell'esame della definizione, è il caso di osservare come il 'segno meno' coinvolto sia di fatto la richiesta dell'applicazione dell'operatore opposto al numero considerato. Se l'applicazione di un operatore (anche nei frequenti casi in cui non si parla esplicitamente di funzione) fa rimanere all'interno dello stesso insieme, per contro richiede agli studenti di aver ben chiaro il concetto di *opposto* e, in generale, di *operatore*. Con l'operatore *opposto* si cambia piano linguistico: dal piano morfologico (come l'espressione 'segno da togliere' fa pensare) siamo quindi passati al piano semantico.
Per quanto riguarda l'uso di trattini al posto della parentesi graffa, la modalità di presentazione non sembra richiamare un registro algebrico, quanto una modalità tipica delle rappresentazioni ad albero.

[13] Da questo punto di vista è importante osservare come la parentesi graffa aperta rimandi anche ad altri contesti (ad esempio al concetto di sistema), mentre il doppio trattino no. Le domande ovvie sono allora se la parentesi graffa aperta mantiene in questa definizione lo stesso significato che ha nei sistemi e dove, in alternativa, è codificato il significato del doppio trattino.

Nessuno dei testi da me consultati giustifica o definisce tale modalità di scrittura; l'interpretazione è quindi semplicemente per analogia. In questo senso, sarebbe allora opportuno indicare diversamente le condizioni sulle variabili; per esempio (riprendo la definizione presentata come *B2*) secondo uno schema di questo tipo:



Questa modalità di scrittura, del resto, è utilizzata da diversi insegnanti nelle procedure per ottenere la composizione di funzioni definite a tratti, in cui la condizione finale relativamente a rami successivi è ottenuta tramite la congiunzione delle varie condizioni presenti sui rami. Quello che anche in questa forma non è comunque chiaro è quale sia il legame tra la condizione posta sul ramo e quella alla fine del ramo (per esempio, tra $a<0$ e $|a|=-a$). Questa considerazione sposta l'analisi delle definizioni alle particelle utilizzate come collegamenti delle varie proposizioni. Se infatti l'uso di parentesi graffe o trattini riguarda essenzialmente la modalità di rappresentazione, le forme di collegamento ('se', '*virgola*', 'per', ecc.) coinvolgono direttamente il piano metalinguistico, con la conseguente necessità di riportarsi a un piano linguistico per una loro interpretazione univoca. Così, la virgola fa pensare a una congiunzione, mentre il 'se' ad una implicazione; ma quando vi sono entrambi, chi prevale? Quale delle due è corretta? Purtroppo il problema non si restringe a queste due locuzioni, vista la presenza anche del 'per' a cui non risulta facile e neppure immediato associare un connettivo; e allora che cosa pensare di fronte a tale preposizione semplice? Volendo anche interpretarla secondo il suo ruolo nella lingua italiana, come leggere la conseguente proposizione?
Proporrò una risposta a queste domande dopo aver analizzato anche le successive definizioni.
In ogni caso i testi che parlano esplicitamente di funzione sono sostanzialmente pochi e, quando questo avviene, è omesso (o sottinteso) il codominio, secondo una prassi ricorrente che tende a 'trascurare' tale insieme. Più spesso, come detto, il concetto di funzione è da intendersi 'tra le righe' (come in frasi del tipo *si dice valore assoluto di un numero reale a, e si indica con |a|, il numero* ecc.), senza esplicitare la tipologia del nume-

ro ‘valore assoluto’, quasi a non volersi sbilanciare su questioni che possono scivolare verso la definizione *A*.

C) Valore assoluto come disgiunzione

Questa definizione è poco presente (l’ho trovata solo in uno dei testi esaminati), seppure, come vedremo, piuttosto utilizzata sul piano pratico. Riporto quella presente in (Bagni, 1996):

“Diciamo *valore assoluto* la funzione $x \rightarrow |x|$ di **R** in $\mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$ così definita:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x| = x \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ |x| = -x \end{cases}$$ ”

Commento alla definizione *C*.

Rispetto alla definizione precedente, si hanno due sistemi in cui sono esplicitate le condizioni sulla variabile indipendente[14]. In questo caso, però, sono utilizzati tutti simboli del linguaggio (se si interpreta in modo naturale la parentesi graffa come congiunzione); non sono cioè utilizzate forme metalinguistiche che debbano a loro volta essere interpretate. Lo scarso uso, in sede definitoria, di questa forma, può risultare strano, ma forse lo è meno se si effettua una ‘parafrasi’ della forma proposta, soprattutto se la si presenta come funzione. Ci si accorgerà che la sua lettura metalinguistica è poco naturale (*x≥0 e |x|=x oppure x<0 e |x|=-x*) e forse poco chiara, soprattutto se contrapposta a una forma che si regge sul “*se .... allora…*”. Anche in questo caso la definizione coinvolge l’operatore opposto e, in quanto tale, potrebbe essere definita anche con domini e codomini diversi dall’insieme dei numeri reali. È inoltre da osservare la scelta dell’autore di utilizzare come codominio $R^{+} \cup \{0\}$.

D) Valore assoluto come massimo

Il testo (Barozzi, 1989) propone

“Possiamo introdurre la nozione di *valore assoluto* (detto talvolta anche *modulo*) di un qualsivoglia numero reale *x* ponendo

[14] In una nota successiva, l’autore osserva che il simbolo di unione è utilizzato impropriamente.

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$ "

Commento alla definizione *D*.

La definizione del valore assoluto come massimo richiede che l'insieme in cui si lavora sia strutturato con una relazione d'ordine (totale)[15], oltre che con un'operazione che di ogni elemento abbia l'opposto. Tale definizione, qui data per i numeri reali, potrebbe essere quindi proposta in insiemi strutturati a gruppo e con una relazione d'ordine.
Osserviamo inoltre come nel testo riportato l'autore distingua due tipi di uguaglianze: l'uguale che indica un'assegnazione (indicato con :=) e l'uguale relazionale. Il primo è utilizzato per indicare una definizione, mentre il secondo un teorema, corrispondente a sua volta all'equivalenza tra la definizione *D* e la definizione *B1*.

E) Un'ulteriore definizione: il valore assoluto come radice

Un'altra possibile definizione di valore assoluto, proposta ad esempio in nota nel testo (Dodero *et al*., 2004)[16] e reperibile anche in (Laforgia,

[15] Nella definizione si presume implicitamente che il massimo esista, ma questa è conseguenza di un'altra ammissione implicita: si sottintende una particolare relazione d'ordine, quella individuata (in ℝ) dal predicato ≤, definito nel solito modo cioè $\forall x\in\mathbb{R}\forall y\in\mathbb{R}(x\leq y\leftrightarrow\exists z\in(\mathbb{R}^+\cup\{0\})(x+z=y))$.

[16] Il testo in questione, come richiamerò più avanti, fornisce una definizione del tipo *B*. La nota del testo a cui si fa riferimento è la seguente:
"Per esempio, l'applicazione che a un numero reale fa corrispondere il suo valore assoluto può avere una di queste espressioni analitiche, tra loro equivalenti

$$f(x) = |x| \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \sqrt[4]{x^4}$$ "

Ciò che si sottolinea nella nota è la possibilità di avere sensi diversi per lo stesso significato, ammesso di aver chiarito cosa si intenda con *espressioni analitiche equivalenti*. L'equivalenza si riferisce all'oggetto denotato e quindi all'uguaglianza delle funzioni individuate, laddove il concetto di espressione analitica coinvolge il piano strettamente morfologico. Inoltre va rimarcato come gli autori intendano con Codominio l'insieme delle immagini, mentre nel presente lavoro con Codominio si intende il secondo insieme del prodotto cartesiano in cui viene definita la funzione.

2006) è quella di vedere il valore assoluto come la funzione che a un numero (reale) associa la radice quadrata del suo quadrato, cioè
$|x|=\sqrt{x^2}$ (*)
In (Laforgia, 2006) si presentano separatamente i due concetti (in particolare il valore assoluto è presentato secondo la definizione *B*) e si dimostra successivamente la loro equivalenza, cioè che individuano funzioni uguali[17]; l'autore consiglia quindi di utilizzare l'uguaglianza (*), che nel testo è un teorema, per definire il termine di sinistra tramite quello di destra.

Commento alla definizione *E*.

Una scelta di questo tipo presenta indubbiamente diversi vantaggi, come per esempio
a) l'utilizzo di una funzione già nota da cui ricavarne un'altra, senza introdurre così una nozione nuova;
b) la possibilità di indicare la funzione *valore assoluto* con un'unica espressione analitica, cosa non possibile nelle definizioni *B* e *C* e permettendo in questo modo di farla rientrare, come funzione (continua), nella concezione euleriana di funzione;
c) collegarla al concetto di modulo di un numero complesso e quindi vederla come conseguenza dell'immersione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$.
I costi da pagare non sono però da meno. Innanzi tutto, se si pensa alla radice quadrata come funzione (inversa della potenza quadrato, con opportune restrizioni sul suo dominio e sul suo codominio), la definizione precedente potrebbe essere data solo per i numeri reali, mentre, come visto, il concetto di valore assoluto può essere introdotto anche in strutture numeriche 'più deboli', come l'insieme dei numeri interi relativi o quello dei numeri razionali, insiemi in cui la radice quadrata non è una funzione. In pratica, l'identificazione del valore assoluto con la radice quadrata del quadrato di un numero, si potrebbe vedere come un teorema all'interno dei numeri reali che giustifica sostanzialmente l'identificazione, in questo insieme, del modulo col valore assoluto. A livello intuitivo, inoltre, il valore assoluto può essere introdotto prima dei radicali (molti testi del biennio lo introducono all'inizio del primo anno); se a questo poi si aggiunge

[17] Il concetto di 'funzioni uguali' è qui inteso in senso semantico (cioè due funzioni aventi stesso dominio, stesso codominio e grafi uguali) e non morfologico (ad esempio, stessa espressione analitica). A tale proposito, si vedano (Maffini, 2000), (Maffini, 2000a), (Maffini, 2007).

come i radicali siano tradizionalmente un argomento piuttosto ostico per i ragazzi, vale la pena porsi il problema se tale scelta sia didatticamente opportuna.

Infine, ma forse ancor più importante, le difficoltà che comporta a livello operativo. Su questo tema tornerò nel paragrafo 6, quando affronterò direttamente il passaggio dalla definizione alla sua applicazione. Qui accenno solo al fatto che, al di là dell'ambito strettamente numerico in cui tutto 'fila liscio' (o quasi…), i problemi si riscontrano quando si passa al piano algebrico-letterale su cui, come vedremo, ruota l'analisi sull'opportunità o meno di una definizione. Se, per esempio, si tratta di risolvere semplici equazioni in $\mathbb{R}$ come $|x+1|+|2x-1|=3$ o rappresentare il grafico di semplici funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ come quella di espressione analitica $f(x)=|x^2-1|+|x|$, è legittimo chiedersi quanto sia opportuno utilizzare la definizione *E* passando così a funzioni o equazioni irrazionali. La domanda conseguente che ci si potrebbe porre è: a quale stato dell'apprendimento scolastico è possibile risolvere le une e a quale le altre? E, più in generale, che cosa determina l'efficacia di una definizione?

4. Dalle definizioni al loro uso: i passaggi obbligati.

Quando si hanno definizioni diverse dello stesso concetto, la prima cosa che normalmente ci si chiede è se le varie definizioni proposte sono equivalenti. Chiaramente il termine 'equivalenza' va 'piegato' all'ambito in cui il concetto è dato. Così, se si parla di valore assoluto come funzione, è naturale pensare che due funzioni definiscono lo stesso concetto se e solo se sono uguali (vedi nota 16).

Una prima considerazione riguarda la distinzione tra una *definizione* e come è utilizzata operativamente. Come osservato nell'analisi delle definizioni presenti sui libri di testo, la definizione più frequente è la *B*, ma a livello applicativo come ci si comporta normalmente?

A tale proposito, riporto un esempio, tratto dal già citato (Dodero *et al*., 2004), ma simile ad altri presenti in pressoché tutti i libri di testo della scuola secondaria di secondo grado, relativo alla risoluzione di un'equazione contenente un valore assoluto:

"Risolvere l'equazione $|x^2-6x+5|=5-x$
Ricordando la definizione di valore assoluto[18] si ha

$$\left|x^2-6x+5\right|=5-x \rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5\geq 0 \\ x^2-6x+5=5-x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-6x+5<0 \\ -(x^2-6x+5)=5-x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x\leq 1 \vee x\geq 5 \\ x=0 \vee x=5 \end{cases} \vee \begin{cases} 1<x<5 \\ x=2 \vee x=5 \end{cases}$$"

La struttura dell'applicazione ricorda molto la definizione *C*, ma tra la definizione e la sua applicazione, come ricordato, nulla viene detto.
In pratica la definizione è data nella forma

$$|x|=\begin{cases} x & se \quad x\geq 0 \\ -x & se \quad x<0 \end{cases}$$

mentre la sua applicazione nella forma

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ |x|=x \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ |x|=-x \end{cases}$$

Le due formulazioni hanno lo stesso senso? E lo stesso significato? Se si parla di valore assoluto come funzione, quali sono le coppie dei grafi delle due funzioni? E come si ottengono?
Se si rimane a quanto proposto nel testo, le risposte alle prime due domande precedenti sono banalmente positive (la locuzione "Ricordando la definizione di valore assoluto…" fa discendere direttamente dalla definizione quanto proposto successivamente). In questo caso ci sarebbe quindi un conflitto di simboli: nella definizione la parentesi graffa assumerebbe il ruolo di disgiunzione e il 'se' di congiunzione, mentre nell'applicazione la parentesi graffa ritornerebbe a indicare una congiunzione; in pratica le righe presenti nella parentesi graffa della definizione costituirebbero i sistemi utilizzati sul piano applicativo. Se la cosa fosse in questi termini, la scelta simbolica sarebbe ampiamente discutibile: utilizzare uno stesso simbolo per indicare connettivi diversi costituirebbe un vero attentato alla comprensione.
Un modo per cercare di stabilire come stanno veramente le cose, è quello di passare all'aspetto semantico, cioè capire quali siano le coppie del grafo delle singole funzioni.

[18] La definizione proposta e di cui si parla è del tipo *B*.

Se, come è presumibile, si interpreta il 'se' come implicazione, si tratterebbe di individuare le coppie dell'insieme
$S_A=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/(x\geq 0 \rightarrow y=x)\}$.
Quando la questione è stata posta anche a insegnanti o a studenti della SSIS, diversi hanno trattato l'implicazione come implicazione logica[19] e non come implicazione materiale, a conferma delle difficoltà che comporta tale connettivo (Durand-Guerrier, 2003): le difficoltà della funzione 'valore assoluto' si sommano quindi a quelle relative al connettivo di implicazione.
Considerando invece, come è opportuno, l'implicazione come connettivo di una logica classica (quindi come implicazione materiale), si trova che gli elementi dell'insieme sono le coppie con le componenti positive o nulle e uguali, ma anche quelle ottenute nel caso in cui l'antecedente è falso, cioè tutte quelle che hanno la prima componente negativa, mentre la seconda è un numero reale qualunque. L'insieme è quindi $S_A=\{(x;y)\in R\times R/(x<0 \vee y=x)\}$. Per i nostri scopi è interessante osservare che appartengono ad S_A anche le coppie aventi le componenti opposte, cioè quelle del tipo (-1;1), (-2;2), ecc.
Analogamente all'insieme $S_B=\{(x;y)\in R\times R/(x<0\rightarrow y=-x)\}$ appartengono tutte e sole le coppie aventi le componenti opposte oppure la prima componente positiva, mentre la seconda è un numero reale qualunque: l'insieme S_B è quindi $S_B=\{(x;y)\in R\times R/(x>0 \vee y=-x)\}$; in particolare a S_B appartengono le coppie del tipo (1;1),(2;2), ecc.
Le rappresentazioni cartesiane dei due insiemi sono riportate nelle figure sottostanti (parti grigie e semirette); in particolare in fig. 1a è rappresentato S_A e in fig. 1b S_B.

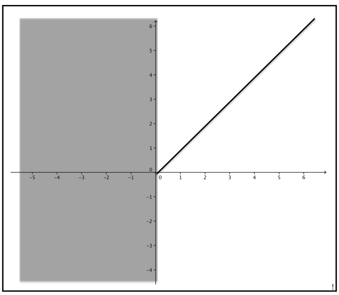


Fig 1a

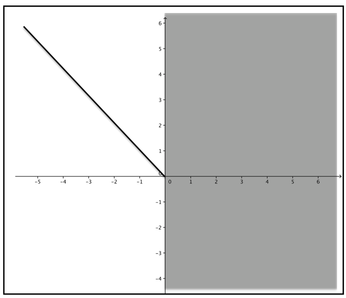


Fig.1b

[19] Quella che nei libri di testo è comunemente indicata con $\Rightarrow$.

Quindi il grafo della funzione valore assoluto è dato da $S = S_A \cap S_B$.
Il risultato ottenuto si presta ad alcune considerazioni, sia sul piano dei risultati che su quello linguistico. L'approccio insiemistico non solo ha permesso di stabilire in modo estensivo quali siano gli elementi del grafo della funzione, ma anche di chiarire e giustificare il ruolo dei simboli coinvolti. Se, come è naturale, il '*se*' sottintende una implicazione la parentesi graffa aperta si configura realmente come una congiunzione e questo giustifica, a posteriori, il tipo di denominazione che abbiamo dato alla tipologia di queste definizioni.
Per quanto riguarda la definizione della tipologia *C*, interpretando la parentesi graffa aperta come congiunzione, le coppie del grafo sono date rispettivamente dagli insiemi $S_A=\{(x;y)\in R\times R/(x\geq 0 \wedge y=x)\}$ e $S_B=\{(x;y)\in R\times R/(x<0 \wedge y=-x)\}$, da cui il grafo complessivo è dato dall'insieme $S=S_A \cup S_B$.
Questo giustifica la denominazione di **definizione disgiuntiva**, ma soprattutto evidenzia come le due definizioni siano sostanzialmente diverse sul piano formale con un preciso significato per i simboli[20]. Come visto, nei testi non solo sono usate come equivalenti, ma addirittura sono usate come se avessero lo stesso senso.
Ciò che ci si potrebbe chiedere è quale sia quella di più immediata comprensione. Come detto in precedenza, la modalità linguistica con cui si 'descrive' il valore assoluto, rende più immediata la definizione *B*, ma se si analizzano poi le questioni dal punto di vista intensivo, risulta più semplice la gestione della *C*, visto che nella *B* è coinvolto il connettivo di implicazione con tutto quello che comporta, non solo in termini di difficoltà logiche, ma anche di rappresentazione estensiva dell'insieme.
Queste definizioni, però, sono realmente equivalenti? E cosa dire delle definizioni *A* e *D*[21]?

[20] Rimane il dubbio sull'interpretazione della doppia linea, visto che questa simbologia non è d'uso in matematica in altri contesti. Sulla base però della presenza del 'se', andrebbe vista come congiunzione e quindi, più opportunamente, da sostituire con una parentesi graffa.
[21] Per quanto riguarda la *E*, come detto, in (Laforgia, 2006) se ne dimostra l'equivalenza sui numeri reali.

5. Definizioni equivalenti.

Per fornire una risposta alle questioni poste nel paragrafo precedente, propongo una dimostrazione dell'equivalenza (semantica) delle definizioni *B*, *C* e *D*.

Teorema 1.

Siano date le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$[22] definite come nella definizione *B* e come nella definizione *D*. Allora $\forall x \in \mathbb{R}(B \leftrightarrow D)$.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\forall x \in \mathbb{R}(B \rightarrow D)$: per ipotesi

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Se $x \geq 0$ allora $x \geq -x$ per cui $|x| = x = \max(\{x; -x\})$[23]; se $x<0$ allora $-x>0$ per cui $|x| = -x = \max(\{x; -x\})$

Dimostriamo ora che $\forall x \in \mathbb{R}(D \rightarrow B)$:

Sia $|x| = \max(\{x; -x\})$. Supponiamo sia $x \geq 0$; allora $-x \leq 0$ e quindi $|x| = x$.

Analogamente nel caso in cui sia $x<0$.

Dimostriamo infine l'equivalenza che ci interessa maggiormente, vista il suo uso (implicito) nella prassi didattica:

---

[22] Per comodità, le equivalenze saranno dimostrate in $\mathbb{R}$, ma nulla cambia se si cambia l'insieme. Inoltre, si è scelto di considerare dominio e codominio coincidenti per poter trattare il valore assoluto come operatore.

[23] Si è racchiuso l'insieme di cui si cerca il massimo tra parentesi tonde per sottolineare il ruolo di relazione funzionale del max, relazione di dominio, in questo caso, $P(\mathbb{R})$ e codominio $\mathbb{R}$.

Teorema 2.

Siano date le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite come nella definizione *B* e come nella definizione *C*. Allora $\forall x \in \mathbb{R}(B \leftrightarrow C)$.

Dimostrazione[24].

Per comodità particolarizziamo su *x*, in modo da lavorare senza quantificatore universale e poterci così riferire solamente agli assiomi e ai teoremi della logica proposizionale:

1. $\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow |x| = x \\ x < 0 \rightarrow |x| = -x \end{cases}$

2. $(x \geq 0 \rightarrow |x|=x) \wedge (x<0 \rightarrow |x|=-x)$

Passaggio dalla graffa al connettivo $\wedge$

3. $(\neg(x\geq 0) \vee |x|=x) \wedge (\neg(x<0) \vee |x|=-x)$

Caratterizzazione implicazione

4. $(\neg(x\geq 0) \wedge \neg(x<0)) \vee (\neg(x\geq 0) \wedge |x|=-x) \vee (|x|=x \wedge \neg(x<0)) \vee (|x|=x \wedge |x|=-x)$

Proprietà distributive di $\wedge$ rispetto ad $\vee$ e di $\vee$ rispetto ad $\wedge$

5. $(\neg(x\geq 0) \wedge |x|=-x) \vee (|x|=x \wedge \neg(x<0))$

Eliminazione contraddizioni

6. $((x<0) \wedge |x|=-x) \vee ((x\geq 0) \wedge |x|=x)$

Applicazione negazione ai predicati

7. $\begin{cases} x \geq 0 \\ |x| = x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ |x| = -x \end{cases}$ Passaggio dal connettivo $\wedge$ alla graffa

Risalendo la dimostrazione dal basso verso l'alto, con le ovvie e naturali giustificazioni, si ottiene l'equivalenza richiesta. Lascio al lettore i dettagli della dimostrazione del viceversa.

[24] La dimostrazione qui presentata è nello stile usato da molti libri di testo, ma non si può considerare una vera e propria dimostrazione formale, anche se riporterò le trasformazioni delle proposizioni indicando le proprietà applicate.

Le due definizioni hanno, quindi, sensi diversi, ma lo stesso significato, anche se la cosa non è immediata. Naturalmente una dimostrazione siffatta non è proponibile sui libri di testo, ma non fare alcun riferimento al problema dell'equivalenza (potrebbe anche solo bastare un "Si può dimostrare che…") fa implicitamente sottintendere che siano 'la stessa cosa' (o, meglio, che siano scritture diverse della stessa cosa[25]).
I teoremi precedenti permettono di poter 'scegliere' una delle definizioni proposte secondo opportunità. Ma da cosa è data l'opportunità della scelta di una definizione tra due equivalenti? Un criterio può essere la sua facilità di applicazione nei contesti in cui il concetto è usato. Quindi la questione non è tanto legata a come sia definito il valore assoluto, ma alla sua applicazione. Se, infatti, ritorniamo alle origini del concetto, è evidente che se si opera con numeri la scelta più comoda è la definizione *A*. Il fatto che la definizione *A* non sia equivalente a nessuna delle precedenti[26] potrebbe già essere un primo, ma ininfluente, limite. Raramente però si opera con il valore assoluto solo in ambito numerico: più in generale lo si utilizza nella risoluzione di equazioni, disequazioni e nello studio di funzioni ed è in questi contesti che il suo utilizzo fa la differenza.
Quindi, escludendo la definizione *A*, negli altri casi possiamo concludere di essere di fronte a definizioni che hanno lo stesso significato.
Infine quanto dimostrato permette di riscrivere le definizioni *B*, *C* e *D* (sia su un piano logico-formale che su uno insiemistico) senza ambiguità, permettendo così di superare molti dei problemi sopra esposti. Nel seguito, proporrò proprio tali formalizzazioni.
La necessaria premessa è che in tutte le definizioni seguenti il valore assoluto sarà proposto come funzione. Inoltre, poiché il concetto di valore as-

[25] È chiaro come l'ambiguità sia legata all'espressione 'stessa cosa': se si guarda dal punto di vista semantico le definizioni, e quindi rispetto agli insiemi che individuano, sono 'la stessa cosa'; sul piano sintattico sono logicamente equivalenti ma non uguali, mentre sul piano morfologico sono diverse. Dire quindi che sono 'la stessa cosa' equivale a confondere il piano semantico con quello sintattico, la cui equivalenza è deducibile solo in relazione ad una contesto assiomatico, in questo caso quello della logica classica, e dell'insieme numerico in cui si vuole parlare di valore assoluto.
[26] Basterebbe osservare che, come funzione, presuppone il codominio diverso dal dominio.

soluto è relativo a uno specifico insieme numerico, si parlerà di valore assoluto in un generico insieme numerico $\mathbb{X}$, essendo $\mathbb{X}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}\}$[27].

Definizione *B*.
Sia $\mathbb{X}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}\}$. La funzione **valore assoluto in** $\mathbb{X}$ è definita dalla terna ($\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$, $G_{\mathbb{X}}$), essendo
$G_x=\{(x;y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}/(x\geq 0 \rightarrow y=x)\wedge(x<0 \rightarrow y=-x)\}$
Una proposizione che permetta di individuare la funzione valore assoluto, che indicheremo con | |, può essere data nella forma

$$|\ | = \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow |x| = x \\ x < 0 \rightarrow |x| = -x \end{cases}$$

Definizione *C*.
Sia $\mathbb{X}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}\}$. La funzione **valore assoluto in** $\mathbb{X}$ è definita dalla terna ($\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$, $G_{\mathbb{X}}$), essendo
$G_x=\{(x;y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}/(x\geq 0\wedge y=x)\vee(x<0\wedge y=-x)\}=$
$\{(x;y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}/x\geq 0\wedge y=x\}\cup\{(x;y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}/x<0\wedge y=-x\}$
Una proposizione che permetta di individuare la funzione valore assoluto, che indicheremo con | |, può essere data nella forma

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x| = x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ |x| = -x \end{cases}$$

Definizione *D*.
Sia $\mathbb{X}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}\}$. La funzione **valore assoluto in** $\mathbb{X}$ è definita dalla terna ($\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$, $G_{\mathbb{X}}$), essendo
$G_x=\{(x;y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}/y=\max(\{x;-x\})\}$

[27] In questa e nelle successive definizioni mi limiterò agli insiemi numerici in cui è definita un'operazione di addizione con opposto e con una struttura d'ordine. Inoltre per quanto riguarda il codominio, ho scelto di considerare l'insieme stesso (e non l'insieme dei soli numeri positivi o nulli), sia per distinguere il codominio dall'insieme delle immagini, sia per rendere la funzione un operatore in $\mathbb{X}$.

Una proposizione che permetta di individuare la funzione valore assoluto, che indicheremo con | |, può essere data nella forma
$|x|=\max(\{x;-x\})$

Nelle formalizzazioni proposte manca quella della definizione *A*. In effetti, in questo caso, la questione è più delicata. Intanto, come detto, Dominio e Codominio non possono coincidere (nei casi precedenti è stata una scelta, comunque possibile; l'alternativa era, come fanno diversi testi, di restringere il Codominio agli elementi di $\mathbb{X}$ positivi o nulli).
Per comprendere meglio le problematiche coinvolte, propongo l'esempio della funzione valore assoluto in $\mathbb{Q}$, secondo la definizione *A*.

Definizione *A*.

Il problema sostanziale nella formulazione della definizione è nel voler introdurre anche in questo caso il valore assoluto come funzione, lavorando quindi su un piano semantico e non morfologico.
Per fare questo occorre innanzi tutto distinguere tra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri razionali assoluti. Questa distinzione non si limita alla considerazione di un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, ma presume e richiede la costruzione indipendente dei due insiemi, che indicheremo con $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_a$. Così, se gli elementi di $\mathbb{Q}$ possono essere introdotti come classi di equivalenza della nota relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$, gli elementi di $\mathbb{Q}_a$ possono essere visti come classi di equivalenza della usuale relazione di equivalenza su $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Non è superfluo osservare come gli insiemi coinvolti ($\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{N}$) siano gli stessi sui quali si opererebbe per definire il valore assoluto in $\mathbb{Z}$ (così come per definire il valore assoluto in $\mathbb{R}$ dovrebbero essere considerate costruzioni di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}_a$ coinvolgenti rispettivamente gli elementi di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{Q}_a$). Fatta questa considerazione sugli insiemi, rimane da definire come far corrispondere gli elementi di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_a$ senza passare dalla morfologia.
Consideriamo innanzi tutto l'isomorfismo canonico, che indicheremo con φ, tra $\mathbb{Q}_a$ e $\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$, desunto dall'immersione canonica di $\mathbb{Q}_a$ in $\mathbb{Q}$.
Consideriamo inoltre le funzioni *id* (funzione identità) da $\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ a $\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ e la funzione *op* (opposto) da $\mathbb{Q}^-$ a $\mathbb{Q}^+$ che ad ogni numero razionale negativo associa il suo opposto.

Consideriamo quindi la funzione ψ di dominio $\mathbb{Q}$ e codominio $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ tale che[28] $\psi_{/(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\})}=id$ e $\psi_{/\mathbb{Q}^-}=op$, cioè $\psi=(\mathbb{Q};\ \mathbb{Q}^+ \cup \{0\};\ G_{id} \cup G_{op})$

Siamo ora in grado di fornire la definizione richiesta secondo la *A*.

Definiamo la funzione **valore assoluto su** $\mathbb{Q}$ la funzione di dominio $\mathbb{Q}$ e codominio $\mathbb{Q}_a$ ottenuta come composizione di ψ con φ^{-1}, cioè $|\ |=\varphi^{-1} \mathrm{o}\, \psi$.

Da quanto proposto in precedenza si possono desumere diversi aspetti. La formalizzazione più semplice è senza dubbio la *D*, seppure coinvolga più concetti. Le formalizzazioni delle definizioni *B* e *C* evidenziano le difficoltà connesse alla costruzione dei grafi delle funzioni, mettendo anche in evidenza, nel caso *C*, le condizioni implicite di restrizione relative al dominio (esplicitata dalla possibilità di vedere il grafo come unione di due insiemi, a loro volta potenziali grafi di funzioni ristrette rispettivamente ai sottoinsiemi individuati degli elementi di $\mathbb{X}$ positivi o nulli e da quelli negativi.).
La definizione *A* si è dimostrata la più complessa da formalizzare in termini funzionali. Com'è stato sottolineato, la facilità della definizione sul piano morfologico nasconde concetti non banali sul piano semantico. Il cardine della definizione ruota attorno al bisogno di avere due insiemi distinti come dominio e codominio: in pratica il 'mondo' in cui il valore assoluto trova significato è diverso dal 'mondo' su cui agisce. Strettamente legato a questa distinzione di 'mondi', vi è la necessità di introdurre gli isomorfismi (o le immersioni) canonici, autentiche astronavi concettuali per collegare il 'mondo' del relativo con quello dell'assoluto; verrebbe da dire, il mondo dei numeri con quello delle misure (di quantità o di grandezze che siano). La cosa però didatticamente più interessante è il fatto che con questo approccio il valore assoluto è definito mediante una composizione di funzioni. Questo potrebbe non essere strano (anche nella *B* e nella *C* è sottointesa una composizione con l'operatore *opposto*), ma la differenza sostanziale rispetto agli altri casi è che da una parte si richiede

[28] Data una funzione f di dominio D, condominio C e grafo G, se $A \subseteq D$ con la notazione $f_{/A}$ intenderò la restrizione della funzione f ad A, la funzione g cioè avente come dominio A, come condominio C, come grafo l'insieme $G' \subseteq G$ tale che $G' \subseteq A\mathrm{x}C$ e $\forall x \in D \forall y \in C((x;y) \in G' \leftrightarrow x \in A \wedge y=f(x))$. In sostanza, $\forall x \in A(g(x)=f(x))$.

l'uso della funzione inversa dell'isomorfismo canonico φ[29], dall'altra che la funzione ψ inglobi, neppure troppo implicitamente, la funzione utilizzata nella definizione *C*.
Le difficoltà e le insidie insite nel percorso semantico che porta alla definizione di valore assoluto come 'numero senza segno' giustificano, a mio avviso, i problemi che hanno i ragazzi nell'utilizzare in modo algebrico tale definizione: è come se mancasse il mondo in cui operare e, quando questo mondo c'è, manca la capacità di raggiungerlo. Così il già citato errore tipico $|-x|=x$ evidenzia la difficoltà nel trovare una scrittura algebrica che inglobi l'informazione semantica della mancanza del segno. Non è detto che la proposta precedente per la traduzione semantica della definizione *A* sia la migliore o la più semplice e invito il lettore a cercarne altre. Ciò che mi preme evidenziare è che non è né immediata né diretta. Mostrarla, o tentare di farlo, permette però di mettere in evidenza il percorso concettuale (e non morfologico-formale!) implicitamente richiesto agli studenti.

6. Come gestire un concetto mediante la sua definizione?

Se volessimo sintetizzare quanto detto finora , potremmo banalmente dire che alcune definizioni di valore assoluto sono equivalenti tra loro (pur avendo sensi diversi) e altre no, o per costruzione strutturale (ad esempio la *A*) oppure in relazione al contesto in cui sono date (come nel caso della *E*, se non per numeri reali). Oltre a questo, come visto, un'analisi semantica di tali definizioni permette di coglierne meglio la struttura e le conoscenze implicite che richiedono.
Quando si parla di equivalenza, però, ci si limita a specifici ambiti[30], ma non è detto che queste equivalenze si ritrovino sul piano operativo.
Per chiarire meglio che cosa intendo in questo caso specifico, proporrò la gestione, attraverso le varie definizioni analizzate, di due oggetti nella cui struttura compare il valore assoluto e nel calcolo del valore assoluto di un numero (o meglio, della determinazione della sua immagine).

[29] Se l'isomorfismo è espresso in modo naturale pensando a $\mathbb{Q}$, nel nostro caso, come ampliamento di $\mathbb{Q}_a$, il suo inverso lo è un po' meno: in pratica la definizione richiede di 'tornare indietro', procedendo quindi in senso inverso rispetto alle esigenze didattiche che 'spingono' verso gli amplianti numerici.
[30] In questo lavoro, per esempio, si è posta attenzione sostanzialmente a quello semantico-funzionale.

Naturalmente, nel caso degli oggetti (una disequazione e una funzione) interesserà la loro impostazione nell'ottica della risoluzione o della rappresentazione e non la parte operativa in sé.
Consideriamo quindi questi tre 'oggetti'

1. $|-5|$
2. la disequazione in $\mathbb{R}$ $|x^2-x-2|+x-5<|x+3|-x^2$
3. la funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di espressione analitica $f(x)=|x^3-x|-|x-5|-3x$

e vediamo come gestirli basandoci esclusivamente sulla struttura delle varie definizioni di valore assoluto.

Definizione *A*.

A1. $|-5|=5$
A2. e A3. non determinabili.

Definizione *B*.

B1. $(-5\geq 0\rightarrow|-5|=-5)\wedge(-5<0\rightarrow|-5|=-(-5))$ $|=|$ $T\wedge(T\rightarrow|-5|=-(-5))$ $|=|$ $|-5|=-(-5)=+5$

B2. Considerando al solito la parentesi graffa come congiunzione, si arriverebbe al sistema[31]

$$\begin{cases} (x^2-x-2\geq 0)\rightarrow((x+3\geq 0)\rightarrow(x^2-x-2+x-5<x+3-x^2)) \\ (x^2-x-2\geq 0)\rightarrow((x+3<0)\rightarrow(x^2-x-2+x-5<-(x+3)-x^2)) \\ (x^2-x-2<0)\rightarrow((x+3\geq 0)\rightarrow(-(x^2-x-2)+x-5<x+3-x^2)) \\ (x^2-x-2<0)\rightarrow((x+3<0)\rightarrow(-(x^2-x-2)+x-5<-(x+3)-x^2)) \end{cases}$$

Sapendo che nel calcolo proposizionale, la proposizione $(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ è tautologicamente equivalente a $(A\wedge B\rightarrow C)$, il sistema può essere riscritto in questi termini, in cui risulta più chiara la percezione della congiunzione delle condizioni sulla variabile:

[31] Questa forma comprende già due passaggi relativi alla gestione dei due valori assoluti presenti; in particolare si è applicata l'equivalenza tautologica, a livello preposizionale, tra $(A\rightarrow B\wedge C)$ e $((A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C))$.

$$\begin{cases} (x^2 - x - 2 \geq 0) \wedge (x+3 \geq 0) \to (x^2 - x - 2 + x - 5 < x + 3 - x^2) \\ (x^2 - x - 2 \geq 0) \wedge (x+3 < 0) \to (x^2 - x - 2 + x - 5 < -(x+3) - x^2) \\ (x^2 - x - 2 < 0) \wedge (x+3 \geq 0) \to (-(x^2 - x - 2) + x - 5 < x + 3 - x^2) \\ (x^2 - x - 2 < 0) \wedge (x+3 < 0) \to (-(x^2 - x - 2) + x - 5 < -(x+3) - x^2) \end{cases}$$

B3. $$\begin{cases} x^3 - x \geq 0 \to (x - 5 \geq 0 \to f(x) = (x^3 - x) - (x-5) - 3x) \\ x^3 - x \geq 0 \to (x - 5 < 0 \to f(x) = (x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x) \\ x^3 - x < 0 \to (x - 5 \geq 0 \to f(x) = -(x^3 - x) - (x-5) - 3x) \\ x^3 - x < 0 \to (x - 5 < 0 \to f(x) = -(x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x) \end{cases}$$

Definizione *C*.

C1. (-5≥0∧|-5|=-5)∨(-5<0∧|-5|=-(-5)) |=| (⊥∧|-5|=-5)∨(T∧|-5|=-(-5)) |=| ⊥∨|-5|=-(-5) |=| |-5|=-(-5)=+5

C2. Considerando anche in questo caso la parentesi graffa come congiunzione[32]:

$$\begin{cases} (x^2 - x - 2 \geq 0) \wedge (x+3 \geq 0) \\ x^2 - x - 2 + x - 5 < x + 3 - x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} (x^2 - x - 2 < 0) \wedge (x+3 \geq 0) \\ -(x^2 - x - 2) + x - 5 < x + 3 - x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} (x^2 - x - 2 \geq 0) \wedge (x+3 < 0) \\ x^2 - x - 2 + x - 5 < -(x+3) - x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} (x^2 - x - 2 < 0) \wedge (x+3 < 0) \\ -(x^2 - x - 2) + x - 5 < -(x+3) - x^2 \end{cases}$$

C3.

$$\begin{cases} (x^3 - x \geq 0) \wedge (x - 5 \geq 0) \\ f(x) = (x^3 - x) - (x-5) - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} (x^3 - x < 0) \wedge (x - 5 \geq 0) \\ f(x) = -(x^3 - x) - (x-5) - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} (x^3 - x \geq 0) \wedge (x - 5 < 0) \\ f(x) = (x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} (x^3 - x < 0) \wedge (x - 5 < 0) \\ f(x) = -(x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x \end{cases}$$

Definizione *D*.

D1. |-5|=max({-5;-(-5)})= max({-5;+5})=+5

D2. Analogamente a quanto fatto in precedenza:

$$\begin{cases} (x^2 - x - 2 \geq -(x^2 - x - 2)) \to ((x+3 \geq -(x+3)) \to x^2 - x - 2 + x - 5 < x + 3 - x^2) \\ (x^2 - x - 2 \geq -(x^2 - x - 2)) \to ((x+3 < -(x+3)) \to x^2 - x - 2 + x - 5 < -(x+3) - x^2) \\ (x^2 - x - 2 < -(x^2 - x - 2)) \to ((x+3 \geq -(x+3)) \to -(x^2 - x - 2) + x - 5 < x + 3 - x^2) \\ (x^2 - x - 2 < -(x^2 - x - 2)) \to ((x+3 < -(x+3)) \to -(x^2 - x - 2) + x - 5 < -(x+3) - x^2) \end{cases}$$

[32] Anche in questo caso è già stato applicato un passaggio relativo alla proprietà distributiva di ∧ rispetto ad ∨. Inoltre non si è tenuto conto della modalità solita di risoluzione consistente nello studio dei segni dei singoli termini in valore assoluto, in quanto legata più alla modalità risolutiva che a quella concettuale.

D3.

$$\begin{cases} (x^3 - x \geq -(x^3 - x)) \to ((x-5 \geq -(x-5)) \to f(x) = (x^3 - x) - (x-5) - 3x) \\ (x^3 - x \geq -(x^3 - x)) \to ((x-5 < -(x-5)) \to f(x) = (x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x) \\ (x^3 - x < -(x^3 - x)) \to ((x-5 \geq -(x-5)) \to f(x) = -(x^3 - x) - (x-5) - 3x) \\ (x^3 - x < -(x^3 - x)) \to ((x-5 < -(x-5)) \to f(x) = -(x^3 - x) - (-(x-5)) - 3x) \end{cases}$$

Definizione *E*.

E1. $|-5|=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{+25}=+5$

E2. $\sqrt{(x^2 - x - 2)^2} + x - 5 < \sqrt{(x+3)^2} - x^2$

E3. $f(x) = \sqrt{(x^3 - x)^2} - \sqrt{(x-3)^2} - 3x$

Riguardando le definizioni secondo alcuni processi propri delle applicazioni, è possibile stabilire quale sia, dal punto di vista didattico, la più opportuna da proporre? È indubbio che se ci si limita all'ambito numerico, le più semplici sono la *A* e la *D*. Dal punto di vista della gestione di oggetti quali equazioni, disequazioni o funzioni, le cose cambiano radicalmente. Da questo punto di vista, infatti, la *A* è immediatamente da scartare, vista la sua inapplicabilità, frutto a sua volta della non equivalenza con le altre definizioni.

La *E* porta, nel caso sia applicabile, a forme apparentemente più semplici, con il non trascurabile aggravio però, come notato anche in precedenza, di passare a equazioni, disequazioni o funzioni irrazionali, oggetti a loro volta di non semplice gestione[33].

La definizione *B* comporta la gestione algebrica di un sistema non banale e per il quale normalmente non sono fornite modalità risolutive[34].

---

[33] Si osservi per esempio che se nella funzione proposta a titolo esemplificativo ci fosse stato x^2 in luogo di x^3, la rappresentazione del grafico della funzione sarebbe stata semplice col valore assoluto, molto complessa con i radicali. Nel primo caso, per esempio, basterebbero conoscenze di geometria analitica relative alla rappresentazioni di archi di parabola, mentre nel secondo caso servirebbero gli strumenti dell'analisi matematica, oltre a quelli algebrici relativi alle disequazioni irrazionali.

[34] Invito il lettore a risolvere il sistema proposto nella forma *B*2, così com'è proposto (o in alternativa con le proposizioni nella forma $(A \wedge B \to C)$).

Come si è visto nella dimostrazione dell'equivalenza e come si è poi esplicitato nella sua applicazione, la definizione *D* è strettamente legata alla *B*, con la necessità di un ulteriore passaggio algebrico per arrivare a forme anche applicative equivalenti. Come si è osservato in precedenza, seppure la definizione *B* sia la più diffusa, nelle applicazioni si privilegia la *C*, la quale ha l'indubbio vantaggio di riportare il tutto a modalità e tecniche note. In pratica nella definizione *C* si 'sa' cosa si deve fare e quali strumenti permettono operativamente di farlo, riuscendo oltre tutto a dare un significato chiaro ai vari sistemi anche sul piano insiemistico, soprattutto per quanto riguarda il concetto di funzione. Se la definizione *C* sembra quindi essere quella che meglio concilia i vari aspetti e i vari ambiti coinvolti, può emergere l'esigenza di una forma che, come nel caso della definizione *B*, la compatti in modo da renderla più chiara.
A questo proposito è intanto opportuno sottolineare come nella struttura di funzione della definizione *C* ci sia, implicito, il concetto di restrizione di una funzione e di identificazione con altre due funzioni 'elementari' (la funzione *identità* e la funzione *opposto*) sugli insiemi in cui viene ristretta. Questo si traduce graficamente come intersezione di un semipiano (ad esempio quello definito da $x>0$) col grafico della funzione individuata (in $\mathbb{R}$) da $y=x$. Quindi, come del resto è stato sottolineato in tutto questo lavoro, il concetto di funzione gioca un ruolo fondamentale, soprattutto per quanto riguarda il suo dominio: così ad esempio la condizione $x>0$ può essere vista come restrizione[35] a $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ del dominio della funzione reale a variabile reale di espressione analitica *x*. Come evidenziato anche in precedenza, la struttura della definizione *C* permette di vedere il grafo della funzione valore assoluto come unione di grafi di funzioni definite su domini diversi (ad esempio $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ e $\mathbb{R}^-$).
Vista secondo questa prospettiva, la funzione valore assoluto rientra nella casistica più generale delle funzioni definite a tratti, cioè delle funzioni individuate da più espressioni analitiche su sottoinsieme (normalmente di $\mathbb{R}$) disgiunti. Il problema è quindi rinviato alla struttura di tali funzioni che presenta gli stessi problemi sul piano metalinguistico. Solo che nelle funzioni definite a tratti è più semplice e immediato vederne la struttura

[35] In questo contesto ci si riferisce al valore assoluto definito su $\mathbb{R}$, ma l'impostazione non cambia se si cambia insieme e si ritiene di definirlo su $\mathbb{Q}$ o su $\mathbb{Z}$.

disgiuntiva, poiché la tipologia di funzione ricorda, anche dal punto di vista grafico, l'idea di 'pezzi da mettere insieme'.
Anche dal punto di vista delle funzioni definite a tratti, se si vuole esprimere in forma compatta la modalità disgiuntiva, siamo in presenza di un 'vuoto' simbolico che sostituisca il doppio sistema.
Oltre quindi ad una proposta di definizione da privilegiare e a una sua impostazione come funzione, azzardo una proposta formale di definizione di valore assoluto, con l'introduzione di una nuovo simbolo (la parentesi quadra aperta), che sottintenda una disgiunzione e l'esplicitazione del connettivo di congiunzione, connettivo che permette di caratterizzare l'insieme che costituisce il dominio della funzione individuata dalla corrispondente espressione analitica (in pratica, l'insieme a cui viene ristretto il dominio della funzione).
La proposta si configura quindi come una modifica formale di quanto proposto per la definizione *C* per cui definiamo la funzione valore assoluto in $\mathbb{R}$ (ma, ripetiamo, la struttura della definizione non varia variando l'insieme numerico) come una funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ individuata dalla proposizione sintetizzata da:

$$|x| = \left[\begin{array}{l} x \wedge (x > 0) \\ 0 \wedge (x = 0) \\ -x \wedge (x < 0) \end{array}\right.$$

dove la parentesi quadra sottintende il connettivo di disgiunzione. La scrittura proposta è quindi una sorta di stenografia di $(|x|=x\wedge(x>0))\vee(|x|=0\wedge(x=0))\vee(|x|= -x\wedge(x<0))$.
La rappresentazione cartesiana è sintetizzata dal seguente grafico (parti più marcate nel primo e secondo quadrante e il punto (0;0)):

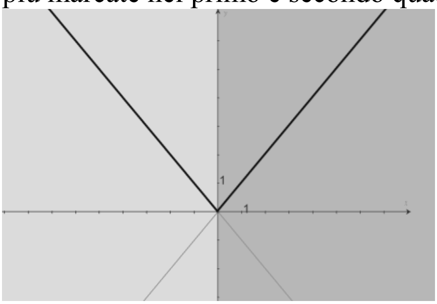


Fig. 2

La scelta fatta e la notazione utilizzata privilegiano quindi il connettivo di disgiunzione a scapito della congiunzione, cosa che si aveva già in presenza della disgiunzione di più sistemi. Questo potrebbe sembrare un aspetto esclusivamente formale, ma, almeno nelle intenzioni, non è così. In questo caso, la confusione tra funzione e sua espressione analitica costituirebbe un grosso ostacolo alla comprensione, come ben sanno gli insegnanti che, a fronte della richiesta di rappresentare grafici di funzioni definite a tratti, si sono visti rappresentare i grafici desunti dalle varie espressioni analitiche su tutto $\mathbb{R}$ e non solo sulle restrizioni. Quindi il problema potrebbe essere la gestione del valore assoluto, ma a monte deve essere chiara la consapevolezza di quali siano gli aspetti peculiari di una funzione.

Ritornando al nostro aspetto formale, come sottolineato in precedenza, tale rappresentazione abbraccia una categoria di funzioni più ampia e questo aumenta chiaramente il suo interesse.

Per concludere questa parte volevo solo rimarcare come tale proposta si riferisca alla funzione valore assoluto e alle funzioni che dipendono da tale concetto. Ben diversa è la cosa per le equazioni e le disequazioni contenenti dei valori assoluti. In questo caso la 'compattazione' con la parentesi quadra è inutile e non porta a nessun vantaggio in più nella sua risoluzione, anzi… Per questi oggetti è indubbiamente più efficace la forma proposta come disgiunzione di sistemi, in cui è già operativamente indicato cosa fare.

Questa osservazione permette di ribadire come le varie 'forme' utilizzate per la rappresentazione non siano legate solo a questioni di eleganza estetica, ma debbano rispondere prioritariamente al criterio dell'efficacia operativa e concettuale. Per le disequazioni ed equazioni contenenti valori assoluti, per esempio, ciascun sistema individua chiaramente l'insieme in cui cercare le soluzioni; l'intersezione insiemistica, in questo tipo di problemi, 'ha la meglio' sull'unione di grafi per le funzioni. La scelta della forma diventa così scelta di opportunità in relazione agli obiettivi che ci si pone. Ancora una volta, tutto si riduce a un problema linguistico, cioè alla scelta del linguaggio più opportuno con cui indicare i concetti e che risulta più efficace per il raggiungimento degli scopi.

7. Conclusioni

Si è partiti dal valore assoluto e dalle difficoltà che didatticamente si incontrano per arrivare a formulare una proposta di carattere più generale sul concetto di funzione. Tutto il lavoro si regge sulla convinzione che aspetti quali il linguaggio e la distinzione tra le sue categorie (morfologia, sintassi e semantica) siano, se non sufficientemente chiariti, alla base di diverse difficoltà nella comprensione dei concetti che si vanno a trattare e descrivere. Inoltre sono state proposte alcune analisi critiche su diversi piani del concetto trattato, concetto che, da questo punto di vista, è diventato un pretesto per mostrare una tipologia di analisi estendibile anche ad altri oggetti della matematica.

Lavorare sul linguaggio non è semplice per nessuno, vista anche la scarsa documentazione didattica in materia. Pur tuttavia, si stanno facendo strada studi e lavori che ritengono questo approccio indispensabile, proprio per evitare di lasciare allo studente l'interpretazione del testo, sulla base di una presunta conoscenza innata.

Infine una considerazione generale sulla modalità del lavoro. A qualcuno potrebbe sembrare eccessiva un'analisi di questo tipo per un concetto quale il valore assoluto. Rispondo con una citazione da (Lolli, 2004):

Le definizioni fondamentali sono sempre una chiarificazione del più semplice a partire dal più difficile; forse è inevitabile che sia così, perché le descrizioni e le spiegazioni sono sempre più complicate e indirette del dato immediato.

Bibliografia

AA.VV.: 2011, Atti del Seminario *Parlare in matematica e di matematica. Come? Linguaggio naturale, linguaggio formale, linguaggio del laboratorio (delle mani, del fare, dei gesti) nell'insegnamento-apprendimento della matematica*, in L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate, Vol 34 A+B n. 5, Novembre-Dicembre 2011

Bagni G.T.: 1996, *Matematica 1*, Zanichelli, Bologna

Barozzi G. C.: 1989, *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli, Bologna

Bergamini M., Trifone A., Barozzi G.: 2012, *Matematica.blu 2.0*, Zanichelli, Bologna

Brousseau G. : 1983, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, n. 2, 165-198.

Brousseau G.: 1998*, Théorie des situations didactiques*, La penseé Sauvage, Grenoble.

Boyer C. B.: 1990, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R.: 2004, *Lineamenti di geometria analitica e complementi di algebra*, Ghisetti e Corvi, Milano

Ducato R.: 2002, *Il valore assoluto*, reperibile all'indirizzo internet http://math.unipa.it/~grim/cdSISSIS/Valore_assoluto.PDF

Durand-Guerrier V.: 2003, *Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective*, Educational Studies in Mathematics, 53, 5 – 34.

Duval R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern

Ferrari P.L.: 2004, *Matematica e linguaggio*. *Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora, Bologna.

Gagatsis A.: 2003, *Comprensione e apprendimento in Matematica, Un approccio multidimensionale*, Pitagora, Bologna

Giusti E.: 2002, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino.

Iacomella A., Letizia A., Marchini C.: 2004, *Il comunicare in matematica*. *Formalizzare: come, quando, perché, nella prassi didattica*, Quaderno n.377 Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, ottobre 2004, reperibile all'indirizzo http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/PDF/Quadernoacolori.pdf

Lamberti L., Mereu L., Nanni A.: 2008, *Lezioni di Matematica 1*, ETAS, Milano.

Laforgia A.: 2006, *Resistere, resistere, resistere. La prova di matematica all'esame di stato: proposte per una nuova organizzazione della didattica e della prova finale*, Seminario di lavoro, Barletta 16-18 dicembre 2005, pag. 5-22

Maffini A.: 2000, *Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria*, Rivista di Matematica dell'Università di Parma (6) 3*, pag. 91-122

Maffini A.: 2000a, *Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore,* Atti del XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM "Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)" – Salsomaggiore Terme (PR) 13-14-15 aprile 2000, pag. 90-104.

Maffini A.: 2007, *Il concetto di funzione: dalla definizione alla prassi didattica*, reperibile su www.treccani.it/site/Scuola/nellascuola/area_matematica/archivio/funzioni/index.htm

Maffini A.: 2008, *Dov'è la logica?Un tentativo di costruzione di "occhiali" con cui vedere la logica nella didattica quotidiana*, Quaderno dell'Istituto D'Arzo di Montecchio Emilia.

Maffini A., Vighi P.: 2010, *Il valore assoluto e i suoi riflessi logico linguistici*, in Progettare Lavorare Scoprire, a cura di Paola Vighi, pag. 43-52

Maraschini W., Palma M.: 2000, *Multi ForMat. Moduli per la formazione matematica. Per il biennio*, Paravia, Torino

Prodi G., Toni N.: 2003, *Scoprire la matematica-Introduzione all'algebra*, Ghisetti e Corvi, Milano

Sfard A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, pag. 1-36.