La Matematica NELLA cultura occidentale
L'illusione della ragione

Achille Maffini[1]

0. Premessa: il perché di un titolo

"Il fine di questo libro è quello di suggerire la tesi che la matematica è una forza culturale di primo piano nella civiltà occidentale".
È con questa frase che inizia il libro di M. Kline, *La matematica nella cultura occidentale*.
Nel testo, ormai un classico sull'argomento, si analizzano diversi aspetti della matematica che hanno contribuito alla crescita culturale dell'occidente. Il riferimento riportato all'inizio permette di interpretare meglio la preposizione articolata NELLA: se nel titolo del libro poteva essere intesa come 'dentro' (cioè la matematica all'interno della cultura occidentale), la frase iniziale del libro chiarisce che l'autore intende invece un 'nella costruzione' della cultura occidentale. Il tentativo che si cercherà di fare in questo contributo sarà quello di vedere se tale preposizione articolata potrebbe essere sostituita da CON o DELLA, locuzioni che meglio possono mettere in evidenza un rapporto di interazione dinamica tra matematica e cultura occidentale, forse preferibili al NELLA, utilizzato come specificato in precedenza, la quale induce a pensare che il mondo della matematica influisca sulla cultura occidentale senza esserne però intaccato.
Per analizzare questo tipo di interazioni e stabilire quale preposizione può meglio rendere questo rapporto, ci soffermeremo su due argomenti: un concetto fondante per la cultura occidentale quale quello di infinito e uno degli ambiti che è alla base della matematica occidentale, cioè la geometria.
La scelta è ovviamente riduttiva; ci si sarebbe potuti, ad esempio, occupare di altri contesti culturali in cui la matematica 'entra' (e di alcuni di questi accenneremo durante il nostro percorso), ma questo avrebbe significato vedere la matematica in termini metalinguistici, come forma di garanzia di ciò che veniva proposto[2].
I due argomenti segnalati, che considereremo e tratteremo parallelamente, avranno come collegamento comune l'idea di una epistemologia di riferimento.

1. Per cominciare: Zenone

Facciamo partire il nostro percorso da Zenone ed in particolare dal paradosso di Achille e la Tartaruga (che nel seguito designerò con AT).
Perché Zenone? Le motivazioni filosofiche che hanno portato il filosofo di Elea a formulare i suoi celebri paradossi sono per noi poco significative. Più interessante dal nostro punto di vista sono stati i tentativi successivi di spiegarli. In particolare sul paradosso AT si è scritto molto durante i secoli (si rimanda alla bibliografia dell'Appendice per una documentazione sull'argomento) ed è un esempio significativo di come una questione trascenda le intenzioni per le quali è stata formulata.

Nei tentativi di risposta, che analizzeremo nell'Appendice allegata, ciò che conta non è tanto la o le risposte in sé, quanto piuttosto il ruolo di queste risposte nel percorso della conoscenza.
Le risposte date al paradosso di Achille e la Tartaruga sono, a mio avviso, raggruppabili in quattro macro categorie:
1) Risposte di tipo matematico
2) Risposte di tipo fisico
3) Risposte che fanno riferimento al concetto di infinito

---

[1] Liceo Scientifico G. Ulivi – Parma; Unità locale di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Parma

[2] L'esempio più significativo è quello relativo all'uso della matematica in campo artistico. Una domanda che ad esempio ci si potrebbe fare è se alcuni canoni artistici come la sezione aurea, sono matematicamente 'belli' o vengono usati per stabilire canoni di bellezza (al proposito, si veda (Maffini, 2004)).

4) Risposte di tipo percettivo-psicologico.

Può essere sorprendente che un paradosso come quello di Achille e la Tartaruga, nato a seguito di una questione filosofica, abbia avuto così tanta attenzione da parte di branche significative della cultura occidentale, al punto che a distanza di 2500 anni si possa ritenere non ancora del tutto risolto. Il ruolo peculiare del paradosso è, secondo diversi commentatori, nella problematica che pone di 'come' sia la realtà e di 'quali' siano i mezzi per indagarla e studiarla. Non a caso le quattro categorie precedenti si riferiscono a capisaldi dello sviluppo culturale dell'occidentale, alcune delle quali con evidenti riferimenti all'ambiente, sempre culturale, in cui sono state sviluppate. Per questo si è scelto, contrariamente allo sviluppo storico, di partire da Zenone: alcuni strumenti matematici[3] tentano di fornire una risposta al paradosso AT, ma in questo modo implicitamente si autodeterminano; la matematica diventa lo strumento per spiegare un contesto semantico che corrispondentemente la garantisce. In questo atteggiamento si può intravedere una prima digressione del paradosso in chiave matematica (potremmo parlare di meta-paradosso): la matematica è garante della realtà, perché questa è 'matematica'; ma la realtà è garante della matematica se questa ne costituisce il linguaggio (privilegiato) di lettura.
Del resto, questo legame con la realtà fa parte dell'origine della matematica, per cui non è possibile non farvi i conti. L'esempio probabilmente più significativo è individuabile nello snodo rappresentato dai pitagorici in campo filosofico (e ovviamente matematico), con il passaggio dagli elementi naturali ai numeri come metri di indagine della natura e delle sue origini.

3. Pitagora e Platone: la comparsa dell'irrazionale nell'universo del *logos*

Relativamente alla scuola pitagorica si potrebbe parlare, a posteriori, di *illusione* e di *speranza*: l'*illusione* di ricondurre tutto a rapporti tra numeri interi nasconde la *speranza* di poter legare la natura alla matematica, dove per 'natura' si intendono gli aspetti più propriamente geometrici, mentre per 'matematica' quelli più strettamente aritmetici. Il neologismo *aritmo-geometria* nasce proprio in base a questi presupposti. Se Pitagora quindi avesse avuto ragione, la realtà sarebbe stata descrivibile per mezzo di rapporti tra numeri interi; ma questo avrebbe indicato anche l'esistenza di un'unità di misura universale: per ogni grandezza (misurabile) sarebbe esistito IL sottomultiplo, cioè l'unità di misura universale per quella grandezza. Si avrebbe così avuto una sorta di infinitesimo in forma attuale, intendendolo come una grandezza non ulteriormente divisibile.
Questo aspetto fa parte del mondo o del modo con cui lo si guarda? È 'nelle cose' o negli occhiali con cui si guardano le cose? Ritorneremo in seguito su questo aspetto. Intanto è opportuno sottolineare come con Pitagora, e successivamente con Zenone, la cultura greca debba cominciare a fare i conti con l'infinito, concetto che ne diventerà peculiare.
Ritorniamo al fallimento del progetto pitagorico, riconducibile alla comparsa degli irrazionali. La storia è nota: la scuola pitagorica scopre che la diagonale di un quadrato è incommensurabile con il lato del quadrato stesso. Questo significa la rottura del rapporto natura-matematica? Occorre fare attenzione, in tal senso, a non confondere le implicazioni: se il progetto pitagorico avesse avuto buon esito, allora si sarebbe potuto dire che la matematica è garantita dalla realtà; ma ovviamente da questo non ne consegue il viceversa. In sostanza, il fallimento del progetto pitagorico dice solo che QUELLA matematica, quella dei numeri razionali e delle grandezze commensurabili, è inadatta a descrive la realtà, per cui, dando per buono l'assunto, ne è una parente 'povera'. Se quindi si vuol mantenere per la matematica un fondamento semantico nella natura, il problema è quello di dare dignità di Essere agli irrazionali.
Vale la pena soffermarsi su questo aspetto. Intanto il nome. Irrazionale, etimologicamente, è riconducibile a ciò che *non è razionale*. Il problema del loro riconoscimento è quindi soprattutto un problema ontologico: esistono? La questione, oggi, non è molto diversa da allora. Non tanto sul

[3] Si vedano le risposte di tipo matematico riportate in appendice.

piano tecnico, legato ad esempio all'introduzione dei numeri reali, quanto su quello percettivo. I numeri irrazionali non sono gestibili in quanto coinvolgono direttamente, in ogni loro introduzione 'tecnica', l'infinito in forma attuale e questo aspetto li fa rifiutare da chi ha una posizione costruttivista nei confronti della matematica, posizione che trova le sue radici in Euclide (come vedremo in seguito), ma che ha in Kronecker e Brouwer i più noti sostenitori, anche sul piano filosofico. La famosa frase di Kronecker (*"I numeri naturali sono stati creati da Dio; tutto il resto è opera dell'uomo"*) indica nella capacità di determinare 'come è fatto' un ente matematico il suo grado di accettazione o, in altre parole, la misura della sua realtà[4]. I numeri irrazionali fanno riferimento ad un infinto che, come detto, non può che essere in forma attuale (uno dei modi 'sbrigativi' per nominare i numeri irrazionali è quello di classificarli come numeri decimali illimitati non periodici), confondendo così il numero con la sua rappresentazione.
La legittimazione alla "*presenza dell'irrazionale nell'universo del logos*" (Toth, 1998) si ha nel passo del dialogo platonico del Menone in cui Socrate guida un servo di Menone alla individuazione del lato di un quadrato di area doppia rispetto a quella di un quadrato assegnato. Come sottolinea ancora Toth "*Il maggior problema che ha fatto scattare questo evento concerne l'esistenza, dunque l'ontologia degli oggetti matematici, che gli stessi greci hanno designato con termini quali «irrazionale» e «ineffabile»*". Esistenza, quindi. L'eterno problema degli enti matematici. Nel dialogo citato Socrate chiede una misura (un numero), ma alla fine la risposta che 'carpisce' (o, dal suo punto di vista, che fa ricordare) al servo è un segmento. L'esigenza che il segmento abbia una misura, cioè che all'ente geometrico sia associato un numero, legittima l'esistenza dell'irrazionale. È da osservare, in modo non marginale, che il problema dell'esistenza è prima di tutto un problema di non esistenza: non esiste un numero razionale che esprima il rapporto tra la lunghezza della diagonale e quella del lato di un quadrato. *Non esiste un numero razionale* induce un quantificatore universale sui razionali: ogni numero razionale non ha questa caratteristica[5]. Il prefisso *ir* si configura quindi come negazione. Una negazione che giustifica un'esistenza in relazione ad una necessità. C'è l'idea di un ordine su cui la matematica si regge e si giustifica. Ordine garantito dalla natura.
Il passaggio dalla natura alla matematica può essere visto come un passaggio dal(la) particolar(izzazion)e al(la) general(izzazion)e; la ricerca di invarianti (anche le leggi fisiche possono essere viste come tali) negli oggetti naturali e nelle loro relazioni è ciò che giustifica il ruolo della deduzione e la conseguente esigenza di fondarla. La deduzione permette la generalizzazione di proprietà relative a specifici elementi degli oggetti e, soprattutto di 'costruire' conseguenze. La matematica quindi non serve per indagare la realtà, ma per descriverla; e la dimostrazione diventa il mezzo per superare l'infinito processo di soddisfacibilità imposto da che un approccio strettamente semantico.
Retaggi di questo delicato rapporto con le origini 'naturali' della matematica si ritrovano in diversi modi di dire, tuttora utilizzati anche in didattica: dalle espressioni temporali ('disequazione sempre verificata', 'equazioni verificate contemporaneamente', ecc.) a quelle spaziali ('da sinistra a destra', 'verso l'alto, verso il basso', ecc.) per arrivare a quelle relative alla causa-effetto. Il caso tipico è quello delle espressioni modali 'condizione necessaria' e 'condizione sufficiente' che si utilizzano nelle dimostrazioni dei teoremi al posto delle logicamente più corrette 'conseguente' e 'antecedente'. Se infatti la deduzione è su base logica, non sono giustificate espressioni che fanno presupporre una causa materiale ed un effetto materiale. Per chiarire quanto affermato, consideriamo le tre seguenti frasi:

---

[4] Per i costruttivisti, in sostanza, non basta dimostrare l'esistenza di un ente matematico che soddisfi determinate caratteristiche, ma occorre indicarne anche un modo, costruttivo, per determinarlo. Questa posizione toglie dignità a tutti i teoremi matematici non costruttivi (si pensi ad esempi a molti teoremi di analisi, come quelli di Rolle, Lagrange, Weierstrass, ecc.) e agli stessi numeri reali; ma ci sono ripercussioni anche sul piano logico: il principio del terzo escluso, ad esempio, non è accettato.
[5] La presenza di un quantificatore universale su enti (numerici) che 'non hanno determinate caratteristiche' giustifica le difficoltà didattiche relative all'introduzione di questo argomento, ma è anche una importante opportunità per introdurre l'esigenza di una dimostrazione.

(a) Se studierai, sarai promosso
(b) Se vuoi costruire una casa devi partire dalle fondamenta
(c) Se due triangoli sono congruenti (uguali) allora hanno aree uguali.

Tutte le frasi precedenti fanno riferimento alla forma logica *se A allora B*. La forma implicativa di una frase è strettamente legata alla forma deduttiva[6]. Le locuzioni 'condizione necessaria' e 'condizione sufficiente' si riferiscono al ruolo svolto da A e B nella implicazione. Così A viene detta "condizione sufficiente per B", mentre B è "condizione necessaria per A". Se si volesse motivare e spiegare il ruolo significato di queste frasi, si potrebbero utilizzare espressioni del tipo "è sufficiente che accada A per avere B" e "è necessario che accada B per avere A, ma non è sufficiente, nel senso che serve qualcos'altro". Nelle frasi precedenti, o altre analoghe che si potrebbero usare, compare il verbo 'accadere' (che potrebbe essere sostituito con 'verificarsi', 'succedere', ecc.) il quale rimanda ad una causa che, in condizioni temporali, deve materializzarsi. Le frasi precedenti possono essere quindi lette in termini di condizioni necessarie e condizioni sufficienti con una diversa significatività. Così ad esempio per la (a) è più significativo dire che "studiare è condizione sufficiente (cioè basta) per essere promosso", mentre è poco significativo leggerla in termini di condizione necessaria; per la (b) vale il viceversa, per cui vale la pena sottolineare che "costruire le fondamenta è condizione necessaria per costruire una casa (ma non basta ovviamente questo)". Per la (c) risulta difficile stabilire quale delle due letture è più significativa; di fatto ci possono stare entrambe; ma questa apparente ricchezza di possibilità nasconde in realtà un limite: non c'è nessun rapporto di causa-effetto tra congruenza ed equiestensione di due triangoli. Il rapporto è solo logico, pensando ai triangoli come oggetti matematici. Diventerebbe di causa-effetto se i triangoli avessero una natura fisica e non fossero invece, come sono, un'astrazione. In matematica l'aspetto relazionale sostituisce quello causale, per cui l'ambito di confronto è quello atemporale della logica formale. Se l'implicazione logica ha origine nella percezione umana dello scorrere del tempo, all'interno di un ambito deduttivo questa genesi temporale viene superata, ma locuzioni quali appunto quelle considerate ne tradiscono le fonti e quanto siano ancora forti queste concezioni della matematica.

Queste espressioni (ma molte altre se ne potrebbero ricordare e il lettore è invitato a cercarne nella sua esperienza) rimandano allo stretto connubio tra matematica e realtà, quando anche le deduzioni fornivano conseguenze 'applicabili'. In questo senso il già citato passo del Menone fa assumere alla deduzione un ruolo didattico, ponendo l'accento sull'importanza del metodo, più che su quella del risultato. Socrate non aiuta solo il servo a ricordare una verità innata, ma gli fornisce soprattutto un metodo per recuperare tutte le verità. E non è ovviamente un caso che il contenuto specifico sia geometrico.

4. La matematica della cultura greca: il trionfo della geometria.

È naturale, parlando di Occidente, partire dal mondo greco. Così come è naturale, parlando della matematica greca, pensare alla geometria. È però altrettanto importante specificare che se è vero che l'Occidente guarda alla Grecia, la Grecia guarda ad Oriente. I suoi riferimenti culturali arrivano da sud-est e la matematica in questo non fa eccezione. Ciò che è 'grecità' è il diverso ruolo che assume ad esempio la geometria; ed è poi su questa che viene costruita la base culturale della matematica occidentale.

Andiamo per gradi. La geometria nasce come scienza per la gestione della terra: la sua etimologia ce lo segnala. Presso i greci però è soprattutto studio delle forme: senza la forma la materia non sarebbe tale, per cui la forma identifica un tratto peculiare della materia. La geometria ha quindi un suo dominio semantico nella realtà in cui le forme che studia sono riconoscibili. Se Toth riconosce nel passo citato del Menone la legittimazione dell'irrazionale, per contro è indubbia la frattura fra la geometria e gli strumenti aritmetici per studiarla. Come sottolineato in (Serres, 1994)

[6] Il teorema logico di riferimento è il teorema di deduzione.

"Il filo della discussione passa bruscamente dall'aritmetica alla geometria: se preferisci non fare calcoli, allora mostra!! Socrate bara, chiaramente. […] Socrate bara: egli sa che non troverà la lunghezza esatta" […]
"D'improvviso, lo spazio mostra lunghezze che il calcolo non comprende più. Se non puoi calcolare, allora mostra: questa parola di Socrate, più abile e profonda di quanto non sembri, indica esattamente la biforcazione."
"Se non sai, mostra". La biforcazione di cui parla Serres è tra ciò che sembra evidente (e che ha come supporto la realtà) e ciò che serve per la sua concettualizzazione: l'irrazionale e l'ineffabile. La geometria si pone sempre più come scienza deduttiva ed è proprio la deduzione a costituirne il tratto significativo.
Ma cos'è una scienza deduttiva? E su cosa si basa?
La definizione di scienza deduttiva a cui si fa riferimento anche negli Elementi di Euclide si trova negli Analitici Secondi di Aristotele[7]:
Una scienza deduttiva è costituita da un insieme S di enunciati tali che
I) Ogni enunciato di S deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali (Postulato di Realtà)
II) Ogni enunciato deve essere vero (Postulato di Verità)
III) Se certi enunciati appartengono ad S ogni conseguenza logica di tali enunciati deve appartenere ad S (Postulato di Deduttività)
IV) Postulato di evidenza (per termini): Ci sono in S un numero (finito) di termini tali che
  a) il significato di tali termini è ovvio e non richiede spiegazioni (termini primitivi)
  b) ogni altro termini è definibile per mezzo di questi termini
V) Postulato di evidenza (per assiomi): Ci sono in S un numero (finito) di enunciati tali che:
  a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (assiomi)
  b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad S deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi)

A parte l'evidente confusione tra aspetti linguistici e metalinguistici, il problema maggiore è l'uso massiccio del termine 'verità': chi la garantisce per una scienza deduttiva? Il riferimento al domino di enti reali pone, in subordine, il problema di cosa si intenda per 'enti reali'. Il ruolo della realtà (fisica) sembra essere decisivo nel garantire le basi di una scienza deduttiva. È quindi sempre un problema ontologico ad essere alla base della matematica, pur riconoscendole (col termine *deduttivo*) uno specifico dominio di conoscenza: i meccanismi della ragione trovano qui il loro riscontro effettivo. Come detto in precedenza, questo connubio natura-matematica è riscontrabile ancora in diversi aspetti linguistici della matematica stessa; ma anche in diversi luoghi comuni connessi alla matematica: il più famoso di questi è forse "la matematica non è un'opinione", ma anche "è matematico" (espressione con la quale si tende a vedere la matematica come garante di 'verità') non è da meno.
Se questi aspetti possono essere ricondotti a errate opinioni legate alle credenze comuni, non è improbabile sentire o leggere in testi matematici espressioni quali "affermazioni vere" (a volte viene aggiunto "senza dimostrazione") riferita al termine assioma oppure "concetti che si formano nella mente di tutti gli uomini" per indicare i concetti (o i termini) primitivi. Questo malgrado ormai sia ben chiaro, dal punto di vista logico, che gli assiomi e i termini primitivi attengono ad un ambito sintattico, cioè alla 'forma' di un sistema logico. Così con 'assioma' si intende una proposizione accettata a cui si chiede di non essere in contraddizione con gli altri assiomi, mentre 'termine primitivo' è un termine vuoto la cui definizione è data implicitamente dagli assiomi (i quali possono essere visti come le 'regole' che instaurano delle relazioni tra i termini primitivi). Non è questo il contesto per approfondire aspetti connessi alla logica matematica, anche se accennerò a qualcosa in seguito.

[7] La seguente formulazione è dovuta al Prof. Marchini a cui devo un particolare ringraziamento anche per diversi altri spunti sviluppati in questo lavoro.

È comunque indubbio come Aristotele abbia avuto il merito di aver individuato gli elementi essenziali di una scienza deduttiva e soprattutto di avere messo a fuoco il ruolo della definizione in matematica col conseguente problema di evitare un regresso all'infinito. È anche indubbio come l'ambito di riferimento sia quello geometrico in cui è piuttosto facile riconoscerne l'applicazione specifica: il termine *Geometria* è inteso ancora in senso etimologico, cioè come 'scienza della terra'.

5. L'infinito e la cultura greca: la resa dei conti.

Come detto in precedenza, il mondo greco si trova a dover fare i conti con l'infinito, concetto alla base di alcuni snodi cruciali del percorso matematico-filosofico greco e, come visto, di non pochi problemi conseguenti. Aristotele, nella Fisica, affronta di petto la questione (ricordiamo che è Aristotele a riportare i paradossi di Zenone[8] ed è il primo a fornirne una spiegazione):
"*In verità capita che l'infinito sia proprio il contrario di quel che si dice. Difatti, l'infinito non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma ciò al di fuori di cui c'è sempre qualcosa*" (Aristotele, Fisica III, 207a)
La spallata che Aristotele dà all'infinto attuale è forte e poderosa. In ambito scientifico e didattico, è risaputo come l'influenza aristotelica abbia condizionato lo sviluppo della scienza, impedendo l'affermarsi di quel metodo che 'farà' la scienza occidentale. Non altrettanta enfasi però è data al ruolo che ha avuto Aristotele nell'impedire che si affermassero forme attuali di infinito (seppure venissero utilizzate), con un conseguente condizionamento sullo sviluppo della matematica[9].
L'influsso più significativo della filosofia di Aristotele in ambito matematico si può riscontrare nei già citati *Elementi di Euclide*.

L'opera di Euclide può essere vista come il modello più significativo di una scienza deduttiva. Lo si nota nell'impianto strutturale (termini primitivi[10], nozioni comuni, assiomi e postulati), ma anche nell'evidente riferimento semantico, malgrado la primaria preoccupazione di Euclide sia che gli enti di cui parla esistano, indicando come criterio di esistenza la loro costruzione con riga e compasso[11].
Questo però non è la sola influenza riscontrabile: confrontando alcune formulazioni euclidee con il linguaggio normalmente utilizzato ai nostri giorni è possibile vedere come Euclide sia, rispetto al concetto di infinito, in sintonia con Aristotele. Nel seguente prospetto verranno messe in relazione alcune di queste formulazioni (le citazioni euclidee, colonna di sinistra, sono tratte da *Gli Elementi di Euclide*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni – UTET, 1996):

[8] Fisica, VI, 239b 15-28.
[9] Un esempio in tal senso verrà visto successivamente con l'opposizione di G. Berkeley all'analisi infinitesimale.
[10] A dire il vero Euclide non parla di termini primitivi, ma parla sempre di definizioni. Ciò che comunque ad alcuni commentari (si vedano ad esempio Frajese e Maccioni, curatori dell'edizione degli *Elementi* citata in bibliografia) fa dire che alcuni termini come punto o retta, siano da intendere come primitivi (e la 'definizione' che dà non è altro che un modo per 'dare un'idea') è il fatto che quelle presunte definizioni non vengono mai utilizzate nel testo.
[11] In genere ci si preoccupa poco di sapere quali sono i primi quattro assiomi di Euclide, focalizzando tutta l'attenzione sul quinto. In particolare, gli assiomi I e III stabiliscono la possibilità di tracciare una linea retta tra due punti (e una sola) e di rappresentare una circonferenza una volta datone il centro e il raggio. Questi due assiomi giustificano l'enfasi data alla possibilità di costruire con riga e compasso particolari oggetti matematici o la risposta a specifici problemi. Inoltre, in analogia a quanto detto per i costruttivisti, indica un modo per fissare un criterio di esistenza.

Definizioni (o termini) [II. Linea è lunghezza senza larghezza] IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa (cioè rispetto ai suoi punti)	[Retta, punto, insieme sono dati come termini primitivi] (Assioma) La retta è un insieme di punti
XXIII. Parallele sono quelle rette che essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.	(Definizione) Due rette sono parallele se non hanno punti in comune oppure coincidono.
V [Risulti postulato] che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (*tali che la loro somma sia minore di due retti*) le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (*la cui somma è minore di due retti*)	(Assioma) Data una retta r ed un punto esterno P, esiste una ed una sola retta passante per P e parallela ad r.
[Nozioni comuni] Il tutto è maggiore della parte	
[Libro V – Definizioni] Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto a una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (=quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta)	Il rapporto di due grandezze F e G omogenee (che indicheremo con F:G) appartenenti ad una classe di grandezze continuee è il numero reale positivo r tale che F=rG. Quattro grandezze F, G, F', G' omogenee appartenenti ad una classe di grandezze continuee sono in proporzione (e scriveremo F:G=F':G') se esiste un numero reale r>0 tale che se F=rG, allora F'=rG'
[Libro IX – Proposizione 20] Esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.	I numeri primi sono infiniti

Relativamente alle varie definizioni o proposizioni riportate si possono fare diverse considerazioni, del resto rintracciabili, per chi fosse interessato, in molti commenti all'opera di Euclide.
In particolare il V postulato costituirà un tarlo per i secoli a venire. Abbiamo già incontrato alcuni 'tarli' nel corso del nostro discorso; ma perché questo postulato lo è? La risposta universalmente accetta è che, contrariamente agli altri, il V postulato non supera la prova dell'evidenza in quanto coinvolge in modo esplicito il concetto di infinto. Questa sua relativa evidenza, però, non ne mette comunque in dubbio la verità: il mondo è euclideo e in quanto tale è modello degli assiomi proposti da Euclide. In sostanza, gli assiomi euclidei sono proposizioni vere. Questa convinzione è talmente radicata nella cultura occidentale al punto che Kant, nel XVIII secolo, la indicherà come un esempio di giudizio sintetico a priori o, per usare le parole di Kline, come uno dei diamanti la cui ricerca è stata, da sempre, uno degli obiettivi della filosofia occidentale.

Fino ad ora si è parlato di geometria e di matematica in senso assoluto, come frutto della cultura greca, la quale a sua volta ha influenzato (o meglio, fondato) la cultura occidentale pur traendo le sue origini da altri contesti culturali. In questi termini, ritornando al problema iniziale della preposizione articolata NELLA, sembra che si possa parlare (alla Kline) di una matematica che esiste di per sé e che condiziona il contesto in cui è inserita.

Ci sono però alcuni aspetti che mettono in dubbio questo assunto[12]. L'esempio citato da Toth in (Toth, 1997) si riferisce al termine 'punto'. Tale termine non è presente nell'opera originale di Euclide in cui compare invece il termine 'segno'. 'Punto' compare nel 500 d.C. nella traduzione degli Elementi ad opera di Boezio. La traduzione si configura quindi come una interpretazione del linguaggio oggetto euclideo nel sistema referenziale del suo metalinguaggio. Come sostiene Toth, la confusione filosofica fra punto metalinguistico e segno del linguaggio oggetto è giustificata da Boezio con l'identificazione tra il punto e l'atomo dei Fisici greci, tanto ridotto e piccolo da non poterne trovare le parti.
Questo esempio ci serve per introdurre il rapporto tra teoria scientifica e sua interpretazione, dove per interpretazione non si pensa solo ad un modello di applicazione, ma anche ad un contesto socio-culturale. In questo caso, come visto nell'esempio del punto, il linguaggio gioca un ruolo fondamentale e questi problemi di interpretazione linguistica sono molto simili a quelli che si ritrovano poi a livello didattico. Ciò che comunque qui ci preme sottolineare è come la matematica, come altre discipline quali la storia, la letteratura, l'arte, ecc. sia soggetta al tempo e al luogo in cui si pone[13].
Anche questo è un discorso che riprenderemo in seguito.

6. Matematica e natura: Galileo e la rivoluzione scientifica

Quando si parla di rapporto matematica-natura, il pensiero corre quasi naturalmente a Galileo Galilei e alla sua famosa frase de Il Saggiatore:
"*Egli [l'universo] è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto*".
Con Galileo si passa da un'analisi qualitativa della natura ad una quantitativa. In questo passaggio Galileo può ricorrere all'apparato algebrico sviluppato soprattutto dalla cultura araba, vera cassaforte matematica nel periodo medioevale. È ancora l'Oriente, quindi, a fornire 'materiale' per la costruzione della matematica occidentale. Galileo vede negli strumenti algebrici possibilità descrittive. Le formule diventano legami tra grandezze e permettono così di trovare invarianti nei fenomeni ed universali nello studio delle proprietà. Spesso, anche oggi, il termine 'formula' è usato in modo quasi spregiativo, vista la tendenza a riferirlo a forme di piatta applicazione. Sarebbe invece opportuno vedere le formule come importanti e costruttive generalizzazioni: la loro forza sta nel riuscire a descrivere, fissate alcune grandezze ritenute significative, un determinato fenomeno, individuando un legame tra queste grandezze.
È chiaro come tale assunto si basi sul presupposto 'fissate alcune grandezze ritenute significative' che indica apparentemente una scelta di cosa considerare e analizzare di un fenomeno. Conseguentemente, ciò comporta un'altra considerazione: il mondo è matematico, come dice Galileo, o è guardato con occhiali matematici? Si ritorna al problema riscontrato con Zenone; ma se in quel contesto le condizioni portavano ad un paradosso, in questo caso la cosa è ben più determinate: si tratta di usare la matematica con la convinzione che ci sia corrispondenza con la

[12] Oltre a quelli che si riportano, si potrebbe anche citare lo stretto rapporto tra arte e matematica. Sarebbe ad esempio interessante fare una riflessione sul ruolo avuto dalla prospettiva nello sviluppo della geometria proiettiva. Apparentemente l'arte ha favorito uno sviluppo di una parte della matematica, ma si potrebbe anche pensare che la matematica ha permesso di formalizzare ciò che la vista, cioè un senso dell'uomo, rimanda come realtà. Il mondo proiettivo diventa quindi un mondo in cui è immerso l'uomo e che non può fare a meno di esso. È però importante specificare che l'uomo di cui si parla è l'uomo occidentale che si preoccupa di rappresentare le cose come sono soprattutto in termini di relazioni e profondità spaziale e non per ciò che rappresentano.
Non è comunque mia intenzione soffermarmi troppo su questo aspetto, se non per evidenziare come l'uomo (occidentale) produca geometrie a partire da se stesso.
[13] Il tipo di riflessione richiesta è strettamente collegato a cosa s'intenda per ruolo culturale, attuale, della matematica in un contesto didattico-educativo.

realtà che descrive. Secondo alcuni commentatori[14], Galileo ha un approccio platonico su basi razionaliste, per cui la nuova scienza si potrebbe intendere come prova sperimentale del platonismo. Da queste premesse culturali risulta facile capire come mai Kant veda nella geometria (e nell'aritmetica) esempi di giudizi sintetici a priori, cioè diamanti nella ricerca della verità.
L'argomentazione kantiana in favore del carattere sintetico a priori dei teoremi della geometria è ben sintetizzato da Trudeau in (Trudeau, 1991):
1) I postulati, le nozioni comuni e i teoremi di Euclide sono tutti a priori
2) I postulati di Euclide sono anche sintetici
3) Le conseguenze logiche di enunciati sintetici sono a loro volta sintetiche
4) Ogni teorema dipende dai postulati
5) Perciò i teoremi di Euclide sono tutti sintetici
6) Quindi i teoremi di Euclide sono enunciati sintetici a priori
Quindi: non può esserci altra geometria oltre a quella euclidea

È facile riscontrare nella argomentazione kantiana analogie con quanto proposto da Aristotele come fondamento di una scienza deduttiva. Allo stesso modo è possibile riscontare dei legami con la filosofia platonica. L'idea di enunciati sintetici a priori, garantiti dalla nostra percezione spaziale, si può ricollegare al presupposto di idee preesistenti e innate. Al contrario, però, di Platone, il quale intende la geometria come forma di conoscenza di ciò che esiste eternamente, Kant si accontenta di raccogliere i diamanti relativi al mondo come lo percepiamo. Ciò non toglie che, per entrambi, i diamanti (intesi come verità certe e dotate di contenuto conoscitivo relativamente al mondo) esistano e che i teoremi della geometria euclidea ne siano un esempio.

7. L'analisi infinitesimale: infinito e realtà

Nel XVIII secolo, quindi, si assegna alla geometria euclidea la grande responsabilità di costituire una certezza. Il problema ontologico degli enti geometrici sembra trovare con Kant la sua soluzione. Ovviamente non è marginale il fatto che tale soluzione sia di tipo filosofico, ma questo non è uno sminuire la tipologia della risposta. Anzi: la matematica ha sempre avuto con tale disciplina un legame dinamico, visto che i problemi fondazionali della matematica (esistenza, verità, ecc.) collimano con molti dei Problemi della filosofia.
Parallelamente, però, nel XVI-XVII secolo un altro tarlo si fa strada: il concetto di infinito e infinitesimo. Come detto in precedenza, i greci basano la loro matematica su forme potenziali di infinito e questo approccio è rimasto ben radicato nella cultura matematica successiva. Parallelamente, però, l'uso di strumenti di calcolo quali il metodo degli indivisibili (da parte ad esempio di Cavalieri nel XVII secolo) pone il problema di concetti che 'funzionano', ma di cui non si ha una fondazione. La nascita del calcolo infinitesimale, la cui paternità come è noto è contesa tra Leibniz e Newton, non permette di posticipare oltre la necessità di affrontare il problema.
Per introdurre i termini della questione, partiamo dal problema di determinare la velocità istantanea di un punto materiale il cui moto è individuato dalla legge oraria $s=t^2$ (essendo il tempo t misurato in secondo e lo spazio s in metri) e vediamo come lo avrebbe risolto Leibniz: preso l'istante[15] $t=2$, si consideri la 'quantità infinitesima' che indicheremo [16] con Δt e si valuti la posizione del punto materiale all'istante $t_1=2+\Delta t$ data da $s_1=4+4\Delta t+\Delta t^2$ e quindi $\Delta s=4\Delta t+\Delta t^2$, cioè, sempre per usare la terminologia di Leibniz, una quantità infinitesima. Poiché la velocità è data dal rapporto $\Delta s/\Delta t=4+\Delta t$, Leibniz ragiona come se 4 e $4+\Delta t$ fossero 'la stessa cosa', cioè come se Δt fosse una quantità trascurabile rispetto a 4.

[14] Si veda ad esempio Trudeau in (Trudeau, 1991).
[15] Per comodità ometteremo le unità di misura delle grandezze utilizzate.
[16] Quelle che seguono non sono le notazioni utilizzate da Leibniz e che saranno poste nel presente lavoro più avanti.

Il dubbio principale relativo a questo tipo di ragionamento è se sia possibile trascurare qualcosa in matematica[17].

Newton cerca, attraverso riferimenti più espliciti alla fisica, di relativizzare il peso degli infinitesimi; così parla di quantità 'evanescenti' ed asserisce che *"....come ultima ragione di quantità evanescenti si deve intendere il rapporto di quantità né prima che esse scompaiano, né dopo, ma quel rapporto con cui esse scompaiono"*[18]. Il tentativo di Newton è ovvio, ma, ricordiamolo, è fatto in ambito fisico.

Le critiche, quasi naturali, a questo modo di ragionare vengono poste lucidamente dal vescovo irlandese G. Berkeley nella sua opera *L'Analista o discorso indirizzato ad un matematico incredulo* del 1734. La critica di Berkeley risulta persino banale nella sua ovvietà: Δt è uguale a zero oppure non lo è. Se è diverso da zero allora Δs è diverso da zero e quindi il rapporto non è *4*; se Δt è zero, anche Δs lo è e quindi il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventa 0/0, cioè privo di significato. In sostanza afferma Berkeley *"...una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.......Che cosa sono queste flussioni? La velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi stessi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite , né quantità infinitamente piccole e neppure nulle*"[19].

Soffermiamoci sulla critica di Berkeley per capire meglio lo spirito dell'atteggiamento di Leibniz e Newton.

La forza di tale critica risiede nel fatto che i ragionamenti degli analisti 'funzionerebbero' se gli infinitesimi esistessero; il problema quindi non è solo di carattere logico, ma è anche e soprattutto, e ancora una volta, un problema ontologico: se gli infinitesimi esistessero, avrebbero un corrispettivo nella realtà. Se così fosse esisterebbero quindi degli infiniti e degli infinitesimi in atto[20]. Comunque si guardi la questione, il punto d'arrivo è sempre lo stesso: negare i presupposti su cui si era basata la geometria e la matematica in genere dei greci, matematica ritenuta comunque 'della realtà'.

Riassumiamo quanto ha comportato in termini pratici il nascente calcolo infinitesimale:

- La matematica 'funziona'.
- La matematica 'garantisce' un risultato.
- La scienza diventa 'garantita' nel suo procedere quantitativo.
- La matematica deve basarsi su aspetti 'di realtà'.

---

[17]"....e non servirà neppure dire che [il termine trascurato] è una quantità estremamente piccola; poiché ci hanno detto che *in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*": G.Berkeley-L'Analista....

[18]Come esempio per far comprendere meglio quanto asserito, Newton cita la velocità di un oggetto che cade 'poco prima' che tocchi il suolo.

[19]Nei *Commentari filosofici* Berkeley aveva affermato: "*Le flussioni di Newton sono inutili. [....] Non si discute su cose di cui non abbiamo nessun'idea. Quindi non si discute sugli infinitesimi*".

[20]Sempre nei Commentari filosofici Berkeley scrive nell'appunto 290 del taccuino B:

"*Il grande pericolo sta nel far che l'estensione esista fuori dalla mente. In quanto, se esiste fuori dalla mente, deve essere riconosciuta infinita, immutabile, eterna, ecc. Il che sarà o fare che Dio sia esteso (cosa che ritengo pericolosa), o fare che esista un essere eterno immutabile infinito increato accanto a Dio*."

Sempre nel taccuino B:

"*L'ignoranza delle menti fece pensare agli uomini che l'estensione fosse nei corpi [....] ..ammettendo che ci siano sostanze estese, solide, ecc. fuori dalla mente, è impossibile che la mente le conosca o percepisca: ché la mente, anche secondo i materialisti, percepisce solo le impressioni fatte sul cervello, o piuttosto le idee che accompagnano quelle impressioni*".

I passi riportati si inseriscono nel contesto più generale della filosofia di Berkeley secondo cui l'*esse* delle cose è un *percipi* ("*l'esistenza di una idea consiste nel venir percepita*"): poiché le idee possono esistere solo in una mente che le percepisce la non esistenza degli infiniti e degli infinitesimi in atto è perciò strettamente legata alla nostra impossibilità di percepirli. Ciò che risulta quindi criticabile è l'idea che si possa operare con gli infinitesimi come se fossero esterni alla nostra mente e dotati di un'esistenza propria.

A questo punto si pone il bisogno di chiarire una domanda essenziale: qual è questa realtà? Le critiche di Berkeley pongono l'accento soprattutto su questo punto: gli infiniti e gli infinitesimi in forma attuale sono difficilmente riconducibili ad un contesto di realtà fisica.

8. I tarli della matematica: la resa dei conti dell'ottocento

All'inizio del XIX secolo quindi i 'tarli' presentano il conto. Per quanto riguarda la geometria è ancora aperto il problema dell'evidenza del quinto postulato per cui è legittimo chiedersi:

- Perché il mondo deve essere euclideo?
- Può il mondo non essere euclideo?
- Come sarebbe il mondo se non fosse euclideo?

Per quanto riguarda l'infinto ed il suo ruolo:

- Quale infinito per la matematica?
- In quali contesti è ripreso il concetto di infinito?
- Quali rapporti tra infinito e realtà?
- È indispensabile l'infinito?

8.1. I tarli della geometria

Nel tentativo di fornire una risposta alle domande relative alla geometria, può essere opportuno riportare alcune formulazioni equivalenti del quinto postulato di Euclide:

1. Rette parallele ad una stessa retta sono parallele tra loro.
2. Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra. (Cataldi 1603)
3. Su una retta finita data [segmento] è sempre possibile costruire un triangolo simile a uno dato. (Wallis, 1663; Carnot, 1803; Legendre, 1824)
4. La somma degli angoli di ogni triangolo è 180°. (Saccheri, 1733)

E fin qui non sembra esserci niente di strano; ma le formulazioni seguenti, anch'esse equivalenti al quinto postulato sono un po' più inquietanti:

5. Esiste una copia di triangoli simili e non congruenti. (Saccheri, 1733)
6. In ogni quadrilatero con tre angoli retti anche il quarto è retto. (Clairaut, 1741)
7. Non c'è alcuna unità di misura assoluta della lunghezza. (Lambert, 1766)
8. Ogni retta tracciata per un punto interno ad un angolo, se prolungata a sufficienza, incontra almeno un lato dell'angolo (o il suo prolungamento). (Lorenz, 1791)
9. È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data. (Gauss, 1799)

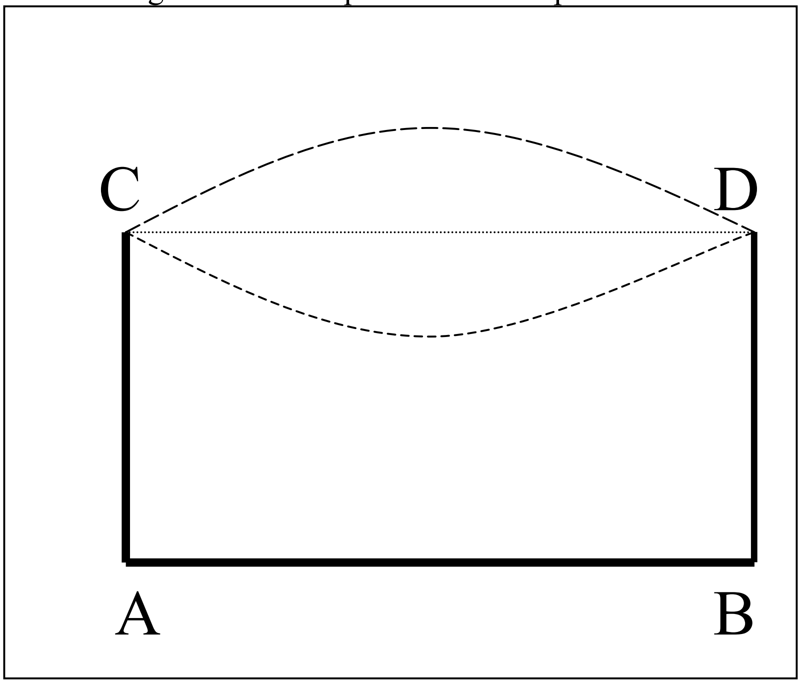
Le formulazioni 5.-9. sono, come detto, più inquietanti, perché in condizioni di non euclidicità creerebbero 'mostri' (per utilizzare una terminologia di Leibniz).

La cosa risulta evidente se si analizzano le negazioni delle formulazioni 5.-9., cioè se si esaminano alcuni risultati che si avrebbero se il quinto postulato fosse falso:

5'. Tutti i triangoli simili sono congruenti.
6'. Esistono quadrilateri con tre angoli retti e il quarto non retto.
7'. C'è l'unità assoluta delle lunghezze.
8'. Esistono rette che, tracciate da un punto interno di un triangolo, non ne incontrano alcun lato.
9'. Esiste un triangolo di area massima.

I risultati sono sicuramente sorprendenti in merito ad una presunta aderenza della geometria con la realtà e meriterebbero tutti più di un commento. Da osservare in particolare la proposizione 7': quando si è parlato di Pitagora e del problema degli irrazionali, si era sottolineato il fatto che se Pitagora avesse avuto ragione, questo avrebbe comportato la presenza di una unità di misura assoluta per le lunghezze. La proposizione 7 e la conseguente negazione 7' ci dicono in sostanza che il quadrato a cui si riferiva Pitagora (e con lui Platone) era un quadrato euclideo. In un contesto di non euclidicità non si avrebbe avuta l'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato. L'incommensurabilità tra segmenti è quindi un concetto relativo ai presupposti (sintattici) in cui ci si pone, i quali a loro volta, se interpretati, descrivono e determinano 'un contesto'. La presenza dell'irrazionalità nell'universo del logos è quindi una presenza frutto della possibilità di 'pensare' quel tipo di Essere.

Le formulazioni equivalenti al V postulato sono tutti modi di riportare tale postulato ad una formulazione ritenuta più immediata. Sarebbe bastato dimostrare che una sola di queste è deducibile dagli altri assiomi euclidei per avere la certezza che anche il V postulato è deducibile dagli altri. Il tentativo più significativo fu quello di Gerolamo Saccheri, un frate italiano del XVIII secolo. A partire da un quadrilatero ottenuto mandando dagli estremi di un segmento AB due segmenti AC e BD perpendicolari ad AB e tra loro congruenti, l'idea di Saccheri era quella di dimostrare che gli altri due angoli C e D del quadrilatero non potevano che essere retti (vedi figura)



Saccheri procede supponendo che gli angoli siano acuti o ottusi. La sua speranza ovviamente era quella di arrivare, in entrambi i casi, ad un assurdo. Mentre riesce a trovare tale contraddizione (logica) nel caso dell'ipotesi dell'angolo ottuso, non così succede per l'ipotesi dell'angolo acuto.
La conclusione a cui arriva Saccheri è espressa dalla

Proposizione XXXIII. *L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna la natura della linea retta.*

La contraddizione a cui perviene, quindi, non è logica, ma ontologica. La convinzione che la geometria euclidea sia garantita dalla realtà impedisce a Saccheri di 'vedere' ciò che ha trovato: la possibilità logica di geometrie non euclidee.
È ciò che invece non sfugge a Gauss, il quale comunque non pubblica i risultati da lui stesso ottenuti. Ciò che teme, esplicitandolo chiaramente, è "Lo strillo dei beoti", identificati nei neokantiani.
Soffermiamoci comunque su quanto trovato da Saccheri e da Gauss e sull'importanza di un nome. La dizione 'Geometria euclidea' fino al XIX non aveva senso: non vi erano possibilità alternative al trattato di Euclide. In mancanza di ambiguità, si parlava genericamente di geometria. La locuzione

‘non euclidea’ viene introdotta da Gauss (1824)[21] il quale, pur non esponendosi in prima persona (i risultati sulla geometria non euclidea saranno pubblicati da Bolyai e Lobachevsky, due matematici esterni agli ambienti accademici occidentali), ma attraverso la distinzione tra euclideo e non euclideo di fatto assegna valore di esistenza all’alternativa non euclidea. Si sta ponendo, attraverso la semplice attribuzione di un nome, un problema di conflitto tra una sintassi che sembra giustificare una possibilità non euclidea e una semantica che sembra negarla[22].

Perché solo nell’ottocento si attribuisce valore di verità anche alla geometria non euclidea?
Già Aristotele negli Analitici Secondi si pone nell’ottica della legittimazione della negazione, dal punto di vista logico, del V postulato. La scelta di Aristotele per il V postulato è una scelta etica: la realtà delle cose la giustifica come scelta da lui ritenuta ‘giusta’. Nell’ottocento invece è, secondo (Toth, 1998), l’idea di libertà di scelta alla base della legittimazione della non euclidicità. Il soggetto diventa determinate nella possibilità di scegliere, una volta che si è dimostra la indecidibilità sulla verità delle due geometrie.
Com’è noto, infatti, il dubbio tra quale delle geometrie (tra euclidea e non euclidea[23]) sia ‘vera’ viene sciolto da Beltrami nel 1868 con la costruzione di un modello euclideo della geometria non euclidea (e viceversa). In sostanza, se la geometria euclidea è coerente, la geometria non euclidea è vera (poiché ha un modello[24]). Vale ovviamente anche il viceversa. Quindi è dimostrabile l’indecidibilità, mentre risulta indimostrabile la verità. Ciò che però i lavori di Beltrami (e altri successivamente, tra i quali è opportuno ricordare Poincaré) mettono in evidenza, come significativo corollario, è il cambio di contesto interpretativo: il ‘mondo’ che garantisce la verità non è più legato ad una realtà fisica, quanto piuttosto ad una realtà matematica. Non a caso si parla, in questi come in altri casi, di modelli sintattici, con un’ovvia antitesi. La matematica comincia così a costruirsi una sua realtà (la dizione ‘oggetti matematici’ fa ormai parte del linguaggio matematico) con la conseguente necessità di determinarne i fondamenti. L’assiomatizzazione della geometria di Hilbert del 1899 risponde da una parte ad una esigenza di un maggior rigore rispetto a quella euclidea, dall’altro alla necessità di ‘spogliare’ definitivamente la geometria del suo significato etimologico, riportandola ad una condizione di teoria formale. È con Hilbert, del resto, che termini quali ‘assiomi’ e ‘termini primitivi’ assumono il significato attuale e che è stato precedentemente richiamato. Questo non risolve (per Hilbert), il problema dei fondamenti della matematica, ma anzi vedere la geometria su basi puramente sintattiche allontana dalla realtà fisica la parte della matematica che vi sembrava più strettamente collegata. Ciò non toglie che le due geometrie forniscano ‘informazioni’ anche sulla realtà fisica, ma il principio di verità è sostituito da Poincaré col principio di comodità: le teorie matematiche diventano quindi una serie di confezioni che ‘funzionano’ e che si possono scegliere secondo l’occorrenza[25].

---

[21] Gauss, a proposito della geometria non euclidea, parla di “*avere gli stessi diritti di cittadinanza*”. La connotazione politica della metafora è giustificata dal particolare contesto storico: era il periodo in cui in Germania si dibatteva sulla emancipazione degli ebri tedeschi.
[22] E’ opportuno sottolineare come a questo livello di assegnazione, con semantica si faccia riferimento ancora alla realtà fisica. Ben diverso il significato assunto dal termine in senso logico e nel conseguente ruolo assunto successivamente in matematica.
[23] Spesso si parla, in modo improprio, di geometrie non euclidee. È da sottolineare come l’esistenza della parallela passante per un punto ad una retta data si possa dimostrare con i primi quattro postulati di Euclide. Ciò che garantisce (o nega) il quinto postulato è la sua unicità. Per poter parlare di geometria ellittica occorre negare anche uno dei postulati precedenti il quinto.
[24] Si fa qui riferimento all’idea di semantica propria della logica: dire che una teoria è vera, significa dire che esiste un ‘mondo’ in cui è possibile interpretare, cioè dare significato, ai termini primitivi e agli assiomi, in modo tale che questi ultimi diventino proposizioni vere. In queste condizioni si dice che quel ‘mondo’ è un modello per quella teoria.
[25] Il problema di come mai la matematica ‘funzioni’ rimanda direttamente alle varie concezioni della matematica che si sono storicamente incontrate e che sono sintetizzate in (Hersh, 2000). Mi piace riportare, a questo proposito, una proposta-provocazione di C. Marchini (da Andriani & altri, 2005) che descrive bene, a mio avviso, l’approccio nei confronti degli enti matematici:

L’enfasi data da Toth al ruolo culturale avuto dalle geometrie non euclidee potrebbe sembrare eccessiva; ma è nella messa in dubbio di un caposaldo della matematica come era ritenuta la geometria a determinare non tanto un diverso paradigma nella matematica, quanto un diverso paradigma con cui guardare la matematica, la quale assume così le connotazioni di fenomeno socio-culturale, tesi sostenuta da Ruben Hersh in (Hersh, 2000):
“Quello che cerco di mostrare è che, da un punto di vista filosofico, la matematica deve essere considerata come un’attività umana, un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana”.
La matematica, quindi, risente del clima culturale in cui è inserita per cui, secondo questa posizione, i suoi risultati sono ‘figli’ del loro tempo.
Secondo Hankel (Hankel, 1869), la matematica si distingue dalle altre scienze per la sua caratteristica a conservare i risultati del passato (per dirla alla Kuhn, per la mancanza dell’esigenza di sostituzioni dei paradigmi nel caso di rivoluzioni, come può essere considerata quella non euclidea). A sostegno del suo pensiero, Hankel formula nel 1868 il *principio di permanenza*:
Da un sistema formale ad un sistema assiomatico contrapposto ad esso, un gruppo dei vecchi assiomi conserva permanentemente la propria validità.
Secondo Hankel, quindi, la matematica “non distrugge mai i lavori di periodi precedenti, per innalzare al loro posto nuovi edifici”.
Accanto al sistema euclideo già esistente, il sistema non euclideo prende nell’universo dell’episteme il posto nuovo che gli spetta. A questa posizione però si contrappone quella di Tiles, secondo cui “L’introduzione di elementi ideali non lascia fisso il dominio preesistente” (Tiles, 1991).
Quindi se è vero che teorie matematiche diverse possono ‘convivere’, è anche vero che tali teorie (e quindi le matematiche), non sono conservate intatte.
In precedenza abbiamo visto, a proposito del termine ‘punto’, come il contesto culturale possa modificare il linguaggio in relazione ad un ‘senso’[26]. Un altro esempio che si potrebbe citare è come l’introduzione di numeri necessari per la misura di lunghezze, i numeri negativi o lo stesso zero, abbiano modificato l’originaria concezione di numero come quantità (del resto ampiamente presente ancora nel linguaggio di alcuni docenti e di molti studenti).
La geometria non euclidea, autentica cesoia per separare la matematica dalla realtà, non prescinde dal contesto in cui si sviluppa. Hegel la pone come testimonianza della nuova coscienza della libertà dello spirito e, proprio per esplicitare questa libertà, diventa indispensabile la separazione dalla realtà. Parafrasando Hegel, potremmo dire, con Toth, *“La matematica è libera. Non lo sa. Dunque non è libera”* oppure, con Cantor, *“L’essenza della matematica sta nella sua libertà”*. Ciò che è importante è la presa di coscienza da parte del soggetto della propria libertà. L’uomo matematico può pensare liberamente, senza bisogno di riscontri oggettivi. La ricerca dei fondamenti diventa

---

Ci si fida, così come ci si fida che in tal modo si siano costruiti modelli di una teoria sintattica dei numeri reali, teoria che ben di rado viene esibita completamente ed ancora meno frequentemente ne vengono messi in luce gli aspetti discutibili.
Tutto (o quasi) funziona bene se si assume che:
1) *gli enti matematici pre-esistono alla nostra considerazione degli stessi;*
2) *tali enti sono organizzati nel modo più "semplice" possibile per rendere applicabili alla "realtà" i procedimenti standard, grazie ad una sorta di benignità della natura che si conforma a siffatte costruzione della Matematica;*
3) *tali enti sono causalmente attivi, nel senso che sono loro che si fanno conoscere (probabilmente per farsi apprezzare da noi, nel ruolo di spettatori);*
4) *se incontriamo delle difficoltà nella individuazione delle relazioni che intercorrono tra essi, è colpa nostra, colpa delle nostre limitazioni, dato che essi sono perfetti.*

Nel seguito ci riferiremo a queste assunzioni con la locuzione di ***lista dei sogni****.*
[26] La relazione tra matematica e linguaggio è un altro degli aspetti che, in un discorso più generale, andrebbe affrontato. In genere, però, è analizzato il ruolo del linguaggio (specifico) nella descrizione di un concetto. In questo caso, invece, ciò su cui si vuole porre l’attenzione è come un termine sia mediato da un altro dominio di conoscenza per rafforzare un concetto. Secondo questa interpretazione, il linguaggio ed il contesto storico a cui si riferisce diventano dominio di interpretazione.

interna alla disciplina. In questa presa di coscienza si attiva il distacco della matematica dalle scienze empiriche, non tanto sugli strumenti (la matematica continua a 'funzionare'), quanto piuttosto sugli oggetti di studio. Nell'ottocento si assiste quindi al paradosso che mentre le scienze empiriche rispondono sempre più a modelli meccanicistici legati al progresso tecnologico, la matematica occidentale si avvolge sempre più su se stessa.

8.2. I tarli dell'infinito in analisi

Questo atteggiamento di 'mettere a posto le cose dall'interno' si ritrova anche nei problemi legati alla formalizzazione dell'analisi da parte di Weierstrass. Anche in questo caso un problema apparentemente tecnico diventa culturale. Il concetto di limite, assunto come cardine della sistematizzazione dell'analisi, viene definito in termini potenziali. La definizione, nel caso di un oggetto matematico, diventa una scelta proprio perché manca una realtà di riferimento[27]. Le idee di Leibniz rimangono isolate e, almeno fino all'opera di Robinson sull'analisi non standard del 1966, perdenti. La cultura dell'ottocento induce la formalizzazione del concetto di limite secondo un approccio potenziale.

Questo non significa che nell'ottocento non compaiano forme legate all'infinito in forma attuale: basti pensare alla teoria dei transfiniti di Cantor o agli stessi numeri reali. Anche in questi casi, però, ciò che emerge è un diverso atteggiamento culturale con cui le situazioni vengono guardate.

Prendiamo, come esempio, la definizione di insieme infinto data da Cantor. Galileo aveva osservato che i numeri quadrati (cioè 1, 4, 9, ecc.) sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali diversi da zero; detto diversamente, ad ogni numero naturale non nullo è possibile associare uno ed un solo numero quadrato (il suo quadrato) e ad ogni numero quadrato è possibile associare uno ed un solo numero naturale (la sua base). In pratica i numeri quadrati sono 'tanti quanti' i numeri naturali pur costituendone un sottoinsieme proprio. Il pensarlo come un paradosso (come in parte aveva fatto Ruggero Bacone) era legato alla nozione comune euclidea (riportata nel prospetto all'inizio di questo lavoro) secondo cui *il tutto è maggiore della parte*[28]. L'intuizione di Didekind (e successivamente di Cantor) è stata quella di vedere questo non come un paradosso, ma come una proprietà e farla conseguentemente diventare una definizione di insieme infinito. L'atteggiamento culturale, anche in questo caso, ha modificato la percezione degli oggetti matematici a cui ci si riferiva: ciò che sfugge all'evidenza di una realtà sensoriale, viene catturato in una definizione che a sua volta genera un'altra realtà. Anziché ritenerle manifestazioni di non-Essere, si forniscono altre forme all'Essere.

L'opera di Cantor fa irrompere l'infinito attuale nel mondo matematico: l'infinito non è più oggetto di studio per la teologia speculativa, ma diventa un argomento matematico. La sua esistenza è garantita dalla consistenza logica, unico criterio di raffronto per considerare una teoria 'legittima':

"*Nell'introdurre nuovi numeri, il solo obbligo dei matematici è darne le definizioni, tali che conferiscano ai nuovi numeri una certa definitezza e, circostanze permettendo, una certa relazione coi vecchi numeri, in modo da poterli distinguere dagli altri numeri. Se un numero soddisfa le suddette condizioni, può e deve essere considerato come esistente e reale in matematica. Quindi io scorgo la ragione per cui bisogna considerare i numeri razionali, irrazionali e complessi* ***come realmente esistenti,*** *alla stregua degli interi positivi finiti*". (Cantor: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883)

La contrapposizione quindi tra coerenza logica e realtà fisica per garantire una teoria matematica è evidente. In base alla percezione di cosa potesse significare ciò, Cantor ebbe molti ed illustri oppositori, tra i quali vale la pena citare Kronecker (che osteggiò molto, anche sul piano accademico, la carriera di Cantor) e Poincaré ("*Le generazioni seguenti considereranno la teoria degli insiemi di Cantor come una malattia da cui si è guariti*"). Fortunatamente Cantor non ebbe solo detrattori; tra coloro che ne apprezzarono il suo lavoro ricordiamo Hilbert ("*Nessuno ci*

[27] Anche una idea platonista della matematica non si sottrae a questo destino: una cosa è il concetto, un'altra il descriverlo.

[28] Nozione comune VIII del Libro I.

scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi"). Ciò che è significativo sottolineare nella dichiarazione di Hilbert è l'uso del verbo 'creare': è come se la matematica si autolegittimasse come creatrice di mondi. L'affermazione di Hilbert, quindi, non è casuale, ma strettamente collegata al suo programma formalista.

8.3. Digressione: è indispensabile l'infinito?

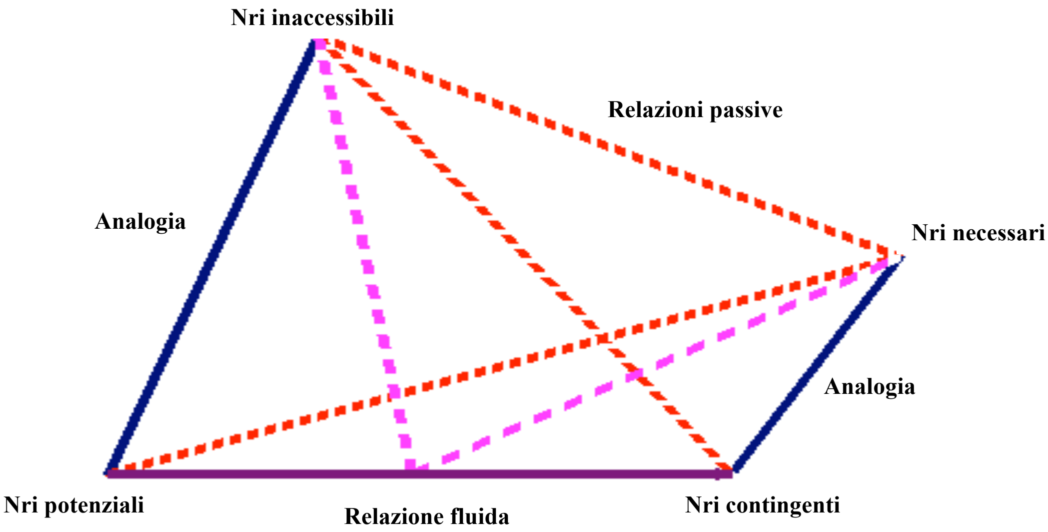
La scelta di inserire l'infinito come argomento di questo lavoro è per sottolinearne il fondamentale ruolo rivestito in ambito matematico. A questo proposito può essere opportuno fare una breve digressione con alcune riflessioni relative all'infinito. Innanzi tutto potremmo chiederci se è indispensabile. È chiaro che la risposta dipende dal significato che diamo al termine 'indispensabile'. Una prima considerazione può essere fatta a livello psicologico: c'è una indubbia incapacità/impossibilità di cogliere il 'finito grande' (si veda ad esempio (Dehaene, 2000)). A testimonianza di ciò riportiamo alcuni esempi in cui si chiede (o è stato chiesto) di 'immaginare' le dimensioni del numero naturale corrispondente

- Gli atomi dell'universo.
- L'Arenario di Archimede.
- Il compenso per l'invenzione degli scacchi (la leggenda vuole che dall'inventore sia stato chiesto un grano di frumento per la prima casella della scacchiera, 2 per la seconda, 4 per la terza, … 2n-1 per l'ennesima. Il Re a cui era stata fatta la richiesta non si rese conto,ma forse anche noi correremmo lo stesso rischio, dell'enormità della richiesta).
- Il debito pubblico italiano. Le ultime stime parlano di circa 1.800.000.000.000 euro. Se fosse espresso con mazzette di banconote da 50 euro messe uno di fianco all'altra (appoggiate a terra su un lato e non su una faccia della mazzetta) quanto sarebbe lunga la fila di mazzette?
- I libri della biblioteca di Babele (in *Finzioni* di J. Borges).

Se gli esempi precedenti hanno creato difficoltà nella percezione delle dimensioni coinvolte, si potrebbe pensare all'infinito come fuga (mentale) dal finito grande; l'infinito diventerebbe quindi, da un punto di vista psicologico, una fuga da un'incapacità. Diverso l'atteggiamento matematico: la matematica (si badi, non la logica) fonda alcuni sui concetti chiave sull'infinito.

Un tentativo di riportare l'infinito ad una forma antropologica del concetto di numero è stato proposto da un gruppo di analisti dell'università di Mulhouse. L'idea di fondo è che la storia dell'uomo è finita e quindi è finito l'insieme dei numeri che, nei secoli, sono stati utilizzati. Il tetraedro seguente illustra le relazioni tra le varie tipologie di numeri, dove

- Numeri potenziali: numeri non ancora utilizzati, ma che possono esserlo un giorno
- Numeri contingenti: numeri potenziali che sono stati nominati da qualcuno
- Numeri necessari: tra i contingenti quelli abitualmente usati
- Numeri inaccessibili: numeri che, in relazione alle limitate possibilità di scrivere numeri e alla dimensione finita dell'uomo non potranno mai essere né utilizzati né concepiti dall'uomo.



I numeri inaccessibili diventano i numeri 'molto grandi', e di fatto, nella strutturazione tecnica del precedente modello, diventano infiniti in forma attuale. Ho riportato il progetto dei colleghi francesi per sottolineare questo approccio antropologico al concetto di infinito, il quale tende a metter in evidenza come il concetto di infinito per l'uomo può assumere diverse formalizzazioni poggianti su diverse basi filosofiche. La differenza, parlando di aspetti matematici, sta poi nella loro capacità di risultare operativamente efficaci in sede applicativa.

9. L'aritmetica come garante della matematica: dalle certezze ai dubbi

Affinché il programma formalista di Hilbert fosse completo era indispensabile dare fondamento alla matematica, cioè trovare una teoria coerente che fungesse da modello semantico per la matematica. Hilbert ha individuato nell'aritmetica la teoria matematica che può assolvere questo scopo; si trattava quindi di dimostrarne la coerenza. Se il tentativo avesse avuto esito positivo, la matematica avrebbe avuto un modello privilegiato che ne poteva garantire la verità. La matematica, cioè, avrebbe trovato al suo interno le basi ontologiche di cui aveva bisogno per fondarsi. Il distacco dalla realtà sarebbe stato completo e l'annosa questione se la matematica è nella realtà della natura o se è una creazione dell'uomo avrebbe trovato una prima significativa risposta[29].
Hilbert lancia la sfida per la ricerca della dimostrazione della coerenza dell'aritmetica al Congresso di Parigi del 1900. Lo spirito è ancora positivista: un problema ben posto (e Hilbert ne pone ben 24!) deve avere soluzione. Nella lista di problemi posti da Hilbert, la matematica cerca sostanzialmente se stessa: la natura non basta più o semplicemente non è più adeguata.
La risposta a Hilbert sul problema della coerenza dell'aritmetica sarà fornita da Gödel nel 1931 con i suoi famosi teoremi di incompletezza.
In particolare, il primo teorema di incompletezza afferma sostanzialmente che esistono nell'aritmetica proposizioni vere, ma non dimostrabili; questo significa che l'aritmetica non riesce a catturare sintatticamente tutte le sue verità. La dimostrazione del teorema passa per la costruzione, all'interno dell'aritmetica, dell'analogo del paradosso del mentitore su basi però sintattiche; in pratica da Gödel viene costruita una proposizione che afferma di sé di non essere dimostrabile. La

[29] È solo il caso di osservare come la questione di per sé sia mal posta, poiché se fosse una creazione dell'uomo, configurerebbe l'uomo come "fuori" dalla natura.

proposizione risulta quindi vera, ma, in quanto tale, non dimostrabile. Il secondo teorema, invece, garantisce l'impossibilità per una teoria matematica contenente l'aritmetica di dimostrare al suo interno la propria coerenza.
Ciò che contraddistingue i teoremi di incompletezza come risultati peculiari è che l'aritmetica non può fungere da metalinguaggio per se stessa. La distinzione tra linguaggio oggetto (relativo all'ambito sintattico) e metalinguaggio (relativo all'ambito semantico in cui poter immergere il linguaggio oggetto e valutarne la verità o falsità delle sue proposizioni interpretate) era ciò che aveva permesso a Tarski di introdurre in logica il concetto di verità e superare il paradosso del mentitore. L'importanza però dei due teoremi di incompletezza non è solo matematica: sono teoremi 'di crisi' che mettono a nudo le fragilità della disciplina ritenuta 'delle certezze'. Sembra quindi molto più di una coincidenza il fatto che siano dimostrati in un periodo storico in cui l'incertezza regna sovrana sul piano letterario, scientifico e politico. I teoremi di Gödel sono più che mai figli del loro tempo[30].
È possibile però dare anche una lettura 'positiva' dei teoremi di incompletezza; è ciò che ha fatto il logico G. Lolli. Secondo Lolli, il fallimento del progetto hilbertiano di fondare la matematica su basi sintattiche denota una sua propria semanticità della matematica. Dietro l'incompletezza sembra quindi di intravedere l'iperuranio platonico.
Sta di fatto che la matematica, pur non trovando i suoi fondamenti, ha trovato nella logica una macchina capace di costruirne la realtà. Il problema annoso dell'esistenza dei numeri iperreali (infiniti e infinitesimi in atto, cioè rispettivamente numeri positivi più piccoli o più grandi di ciascun numero reale) così osteggiata da Berkeley proprio con motivazioni di realtà, trova nel teorema di compattezza (Malcev) lo strumento che li legittima in quanto 'esistenti'. Cambia quindi radicalmente il concetto di esistenza e conseguentemente di realtà per gli oggetti matematici. Questo cambiamento ha una ricaduta anche a livello didattico i cui effetti si sentono in periodi di crisi dell'istituzione 'scuola' come è quello attuale: alla domanda *"a cosa serve?"* è sempre più difficile dare una risposta 'esterna' alla matematica, poiché ciò che può essere matematicamente significativo non è detto che lo sia sul piano applicativo.

10. Conclusioni: tentativi di risposte.

Il nostro percorso sta per giungere al termine ed è quindi indispensabile chiudere o tentare di rispondere ad alcune domande ancora aperte, molte delle quali sempre attuali, tipo:

- Cos'è la matematica?
- Di cosa si occupa?

Cosa sia la matematica è un tema che appassiona ancora gli addetti ai lavori e che permette loro di vendere ancora libri sull'argomento (si veda ad esempio (Hersh, 2000) o (Giusti, 1999)). Le risposte che sono state date passano tutte attraverso classificazioni più o meno rigide che individuano più che altro 'modi' di sentirsi matematici: platonismo, formalismo, costruttivismo, logicismo, fallibilismo, fenomeno sociale.
Queste classificazioni, tranne forse quella platonista, non dicono 'perché' la matematica funzioni[31], salvo affidarsi alla *Lista dei sogni* di C. Marchini (vedi nota 25). Del resto credo che pochi matematici siano assolutamente convinti di una posizione in contrapposizione alle altre[32].
La posizione di Hersh, che riporta la matematica ad un fenomeno socio-culturale, è forse riduttiva per certi aspetti, ma ha il pregio, secondo me, di pensare alla matematica come ad una disciplina plasmabile e, soprattutto, riconducibile al contesto culturale in cui si sviluppano le altre arti e

[30] Si potrebbe dire che i teoremi di Gödel hanno avuto sulla matematica un impatto rivoluzionario tanto quanto la relatività di Einstein in fisica.
[31] A rigore, neppure il platonismo lo spiega: rende solo un po' più tranquilli sul piano dell'esistenza.
[32] Hersh in (Hersh, 2000) cita come molti matematici di professione si sentano formalisti nei giorni feriali e platonisti in quelli festivi.

scienze. In base a queste considerazioni, quale preposizione utilizzare per mettere in relazione matematica e cultura occidentale: Nella? Con? Della?
La risposta che suggerisco è implicita nel sottotitolo: l'illusione DELLA ragione.
La matematica è riconosciuta come linguaggio universale; è quindi difficile sostenere la tesi di una matematica 'occidentale'. Ciò che invece è occidentale è l'idea di una matematica garante delle basi della scienza. L'illusione dell'occidente è di poter avere delle certezze, pensando alla matematica come lo strumento garante dello scopo. Non è importante che la matematica abbia dimostrato di avere i piedi di argilla e che non abbia nella natura una garanzia sul piano semantico. L'importante che sia riconosciuta come 'solida'. Si parlava in precedenza della frattura, nell'ottocento e agli inizi del novecento, tra la matematica e le scienze empiriche, frattura che è, sia ben chiaro, sul piano concettuale e dei fondamenti e non su quello della sua 'utilità'. Ed è su questo ambiguo rapporto che si inserisce l'illusione di aver trovato il riferimento per un'idea di certezza. Si potrebbe però obiettare che anche questa non è una prerogativa dell'occidente. Se quindi la matematica come linguaggio è indubbiamente universale, ciò che cambia e la rende 'occidentale' sono le sue basi epistemologiche. La matematica 'fa i conti' con la cultura del tempo e del luogo in cui si sviluppa e questa cultura rimane ancorata nella costruzione dei suoi concetti da parte di chi l'apprende. L'epistemologia connota, quindi, la tipologia della conoscenza, anche e soprattutto in termini di dubbi e di crisi.
Quando occorre fare un esempio di un ente matematico simbolo del rapporto con l'epistemologia, è quasi immediato pensare allo zero. Lo zero risulta essenziale nella rappresentazione posizionale dei numeri. A sua volta la notazione posizione è essenziale per l'applicazione degli algoritmi nelle operazioni. Eppure lo zero non è di origine occidentale. Come sottolinea Rotman in (Rotman, 1988), *"Il concetto di niente – il vuoto, la vacuità, ciò che non ha essere, il non esistente, ciò che non è – è una fonte ricca e immediata di pensiero paradossale: il segno 'niente' indica qualcosa al di fuori di sé e perciò attribuisce la condizione di esistenza a ciò che non ha, ...".* Lo zero quindi non è solo un numero, ma è un concetto a cui dare una rappresentazione. È un non Essere che, in termini occidentali, deve trovare un suo posto nell'Essere. Se in matematica il rapporto tra la rappresentazione di un concetto (ambito semiotico) e l'acquisizione del concetto (ambito noetico) è quanto mai complesso e ambiguo[33], per quanto riguarda lo zero diventa epistemologicamente conflittuale: la sua rappresentazione diventa la manifestazione di un qualcosa. I babilonesi, ad esempio, lasciavano uno spazio vuoto per indicare lo zero: il nulla veniva rappresentato col nulla; purtroppo la coerenza semiotica pagava il dazio dell'ambiguità nella scrittura, non essendo sempre chiaro se lo spazio tra due segni rappresentasse un nulla che significava qualcosa, la mancanza, o l'assenza assoluta, anche della mancanza. Nell'esempio dei babilonesi è significativo come esista un 'vuoto' linguistico e un 'vuoto' metalinguistico. La cifra 0 esprime quindi il nulla linguistico e il segno che lo individua esprime bene l'idea di un delimitare uno spazio (vuoto) che rappresenta la mancanza dell'Essere. Se si pensa alla fatica che ha avuto ad affermarsi nella cultura (matematica) occidentale tutto ciò che ha nel *non* (o nella negazione in genere) una sua caratterizzazione, non devono stupire le difficoltà che ha avuto lo zero ad affermarsi e ad essere accettato anche attualmente a livello psicologico. Alcuni esempi: il trattino utilizzato nella moltiplicazione in colonna al posto dello zero, lo stesso trattino spesso usato da diversi insegnanti (anche di matematica…) per indicare la mancanza di assenza di un alunno, l'uso della locuzione 'niente' quando il risultato di un'addizione è zero (l'espressione 'non rimane niente', spesso utilizzata, nega allo zero l'idea di numero come esprimente una quantità), sono tutti esempi in cui lo zero viene evitato anche quando concettualmente ci si riferisce a quello. Si potrebbero trovare altri esempi e invito a farlo, prestando solo attenzione alle espressioni utilizzate nel linguaggio comune, o anche a livello didattico, quando è coinvolto lo zero. Nella letteratura di didattica della matematica si parla,

[33] Al punto da generare forme di paradosso (vedi (D'Amore, 2005)): non esistendo in natura gli oggetti matematici, è possibile riconoscerli solo dopo averli rappresentati, ma la loro rappresentazione è possibile solo in relazione ad una loro esistenza.

relativamente allo zero, di ostacolo epistemologico. *Ostacolo epistemologico*[34] è molto più di una difficoltà relativa al concetto: è una ammissione di 'distanza' tra il concetto e la cultura sulla quale il concetto si inserisce. Lo zero ha lo stesso significato ovunque, ma costituisce un ostacolo epistemologico per la cultura occidentale che ha posto l'Essere al centro della sua ricerca e, conseguentemente, della sua struttura culturale.
Le considerazioni precedenti riportano tutto ad una riflessione interna alla matematica occidentale la quale deve fare i conti con i propri oggetti e con la sua capacità di fondarli. Capita così che da una parte la matematica sia usata come scienza esatta e dall'altra si scoprano 'bachi' sul piano dei fondamenti. La matematica 'funziona' e questo basta all'anima meccanicistica dell'Occidente; ma la matematica è fragile e questa fragilità trova le sue ragioni d'essere sul senso di precarietà e di relativizzazione delle certezze che ha sorretto la cultura occidentale negli ultimi due secoli[35]. L'universalità della matematica deve fare i conti col suo 'essere locale'; e le sue contraddizioni sembrano rispecchiare bene le contraddizioni dell'Occidente. Il dubbio, al solito, è che queste contraddizioni non siano 'a immagine' di chi le ha prodotte. Perché in fondo il problema della matematica è sempre quello: di cosa, 'realmente', si occupa? Quali sono i suoi oggetti? Vengono prima i concetti matematici o la loro rappresentazione? Quest'ultima domanda pone prioritariamente il ruolo del linguaggio e, come detto, quale rapporto ci sia tra concetto matematico e linguaggio per rappresentarlo, proponendo l'eterno dilemma dell'uovo e della gallina.
Queste domande potrebbero trovare una risposta nella proposta di Hersh: *"Le proprietà degli oggetti matematici sono proprietà di idee socialmente condivise"* (Hersh, 2000). Se si accetta questa posizione, la matematica diventa parte di un implicito contratto sociale: quindi non solo opera dell'uomo, ma opera delle relazioni tra gli uomini. Questo aspetto relazionale è ciò che toglie la matematica da una ipotetica torre d'avorio in cui spesso viene collocata (o si colloca) per farla diventare culturalmente viva e dinamica nella sua interazione con le altre forme culturali[36].
Questo le fa forse perdere il suo ruolo di fedele descrittrice del mondo, ma probabilmente la rende più vicina all'uomo.
Abbiamo iniziato questa conversazione con Zenone e mi piace concludere con qualcosa riferito a Zenone; il testo è di Borges ed esprime bene, a mio avviso, la caduta delle illusioni relative alla conoscenza:
"Lo abbiamo sognato resistente [il mondo]*, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nella sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità, per sapere che è finito".* (J.L.Borges, *Metempsicosi della tartaruga.*)

Bibliografia

Andriani M.F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vannucci V.: 2005, *Oltre ogni limite*, Pitagora

D'Amore B.:2005, *Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica, in Insegnare la Matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*, Ghisetti e Corvi

Dehaene S.: 2000, *Il pallino della matematica*, Mondadori

Euclide (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), 1996, *Gli Elementi*, UTET

Giusti E.: 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri

[34] La definizione di ostacolo epistemologico è dovuta a Brusseau il quale lo intende come una conoscenza che ostacola l'apprendimento; l'ostacolo è quindi dovuto alle difficoltà del concetto in sé.
[35] A scanso di equivoci a mio modo di vedere la forza della cultura occidentale è proprio in questa capacità di mettere in discussione se stessa e finalizzare questo processo alla ricerca di sé.
[36] Nella strutturazione dei nuovi curricoli per la scuola inferiore e superiore si parlava esplicitamente di "matematica del cittadino", sostituita nelle ultime proposte in "matematica della persona"

Hankel H.: 1869, *Die entwicklung der mathematik in des letzen Jahrhunderten*, Tübingen

Hersh R.: 2000, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi

Kline M.: 1976, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli

Kuhn T.:1969, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Einaudi

Maffini A.: 1998, *Un commento del Menone. Platone tra matematica e filosofia*, La Nuova Secondaria, n°3-15 novembre 1998 - Editrice La Scuola

Maffini A.: 1999, *Le origini dell'Analisi non-standard: quattro passi nel mondo degli infiniti e degli infinitesimi in atto*, Quaderni di ricerca in didattica n°8- Palermo 1999- G.R.I.M.

Maffini A.: 2004, *La bellezza degli enti matematica. Primi lineamenti di un'estetica della matematica*, Su NUMERO E FORMA – Contributi sul rapporto tra arte e scienza, a cura di E. De Caro – Ed. Mimesis

Robinson A.: 1966, *Non standard analysis*, North-Holland Publishing Co.

Rotman B.:1988, *Semiotica dello zero*, Spirali

Serres M.: 1994, *Le origini della geometria*, Feltrinelli

Tiles M.: 1991, *Mathematics and the Images of Reason*, Routlenge

Toth I.: 1997, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Vita e Pensiero

Toth I.: 1998, *Lo schiavo di Menone*, Vita e Pensiero

Trudeau R.: 1991, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri

Allegato.

LE RISPOSTE AL PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA (AT)

Analisi e considerazioni su breve raccolta bibliografica
a cura di Achille Maffini

Per chi ha la ventura di imbattersi nel paradosso di Achille e la Tartaruga, la sensazione è sempre quella di avere risposte inadeguate e di non essere mai pienamente convinto della spiegazione che ci si è dati o che ci viene data. Quella che segue è una breve raccolta di risposte date al paradosso in questione che ho classificato per tipologia di approcci[37]. Verrà riportata sinteticamente la risposta proposta dall'autore (in corsivo[38]) e il testo in cui rintracciarla o l'autore della risposta. Seguiranno poi alcuni miei commenti alle risposte.
Parte del materiale presentato è stato utilizzato in un laboratorio sul concetto di infinito tenuto presso l'indirizzo di Scienze Umane della SSIS Emilia Romagna - Sezione di Parma
La cosa importante del paradosso, come del resto di (quasi) tutti i paradossi di Zenone, è che il suo interesse ha trasceso le intenzioni del suo autore. Chi si preoccupa, adesso, se Parmenide avesse torto o ragione? E perché, allora, hanno suscitato tutto questo interesse? Il problema della staticità dell'Essere è ancora importante per noi? E a quale livello di conoscenza si colloca?
Guardando la storia della filosofia e l'annessa storia della matematica, si ha la sensazione che Zenone e i suoi paradossi si pongano in una sorta di spartiacque: da una parte una realtà da studiare e conoscere, dall'altra gli strumenti razionali necessari per farlo che svilupperanno il cosiddetto pensiero razionale alla base della matematica greca. I paradossi di Zenone pongono l'attenzione su delle incongruenze tra questi due 'mondi': la ragione ha strumenti che approssimano la percezione della realtà, ma che devono utilizzare aspetti che le sono propri; e questi 'aspetti' non è detto che collimino con la realtà o se invece contribuiscano a 'costruirla'. I paradossi di Zenone potrebbero quindi essere liquidati come una distanza tra mondo 'reale' e mondo 'mentale', tra l'Essere e il nostro modo di percepirlo, se non che, nel tentativo di dare loro una risposta, hanno permesso di mettere meglio a fuoco su cosa si basa la nostra ragione. Nell'esame delle varie risposte si cercherà di mettere in evidenza proprio queste basi.

A1. RISPOSTE MATEMATICHE

Iniziamo la nostra analisi da una delle risposte più accettate per il paradosso di Achille e la Tartaruga, quella che viene citata in genere come risposta più attendibile e che fa riferimento alla *serie convergente*[39], dovuta a Gregorio da S. Vincenzo (1584-1667) (in [O]). In [D'A] si sottolinea *come la serie convergente costituisca una risposta matematica, facendo una distinzione rispetto agli aspetti filosofici*: Zenone inserisce i suoi paradossi in un contesto filosofico in cui la ricerca dell'Essere si trova a dover fare i conti con l'infinito.
La valenza dell'aspetto matematico relativo alla serie convergente è riportato anche in [Z], dove lo strumento matematico utilizzato è di fatto il concetto di limite nella formalizzazione di Weierstrass, la quale si basa su una concezione potenziale dell'infinito. Secondo Weyl (citato in [Z]), *il processo al limite sembra mutare l'Essere (statico) in Divenire (dinamico)*. Questo aspetto è emerso anche durante le attività svolte durante il citato laboratorio presso la scuola di specializzazione: alcuni specializzandi avevano associato sottolineato all'infinito in atto un'idea di staticità e all'infinito potenziale quella di dinamicità relativa. Le loro percezioni sono state per me importanti, anche in relazione alle attività svolte nel laboratorio, proprio perché provenivano da persone non particolarmente condizionate da questione matematiche in senso tecnico. Ciò che comunque è

[37] Come tutte le classificazioni fatte su concetti 'sfumati' anche questa può essere discutibile e non pretende quindi di essere corretta. La speranza che è potesse mettere in evidenza gli ambiti coinvolti dal paradosso AT.
[38] La parte in corsivo non riporterà fedelmente il testo dell'autore, ma il senso complessivo della sua posizione. In questo modo si vuole evidenziare la distinzione tra la risposta e il commento alla stessa.
[39] Per considerazioni più tecniche riferite ai concetti matematici trattati, si veda il successivo paragrafo.

interessante è stata questa 'traslazione' dall'ambito matematico a quello filosofico: un concetto quale quello di infinto è stato percepito anche da loro come essenziale nello studio di un problema filosoficamente peculiare come quello dell'Essere.
Su posizioni analoghe si colloca anche [LR] il quale sottolinea *come siano in gioco sempre e solo successioni*. Secondo l'autore, *lo scopo di Zenone è quello di ridurre all'assurdo le tesi pitagoriche sulle monadi, visto che nell'idea dei pitagorici la somma di un numero crescente di segmenti, anche se sempre più piccoli, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascuno conterrebbe un numero intero di atomi dotati di dimensioni*. Questa posizione atomista, oggi di scarso rilievo sul piano matematico, tende comunque a ricalcare una percezione largamente diffusa che porta a confondere l'infinità degli addendi con il valore della somma. Come riportato in diversi studi in materia (si veda ad esempio Andreani & altri, 2005), questa identificazione tra cardinalità degli addendi e natura del risultato è causa di diversi ostacoli sul piano didattico. Il legame con gli aspetti più propriamente epistemologici è immediato: se si cercano modalità di rappresentazione e studio della realtà, non si può che procedere per approssimazioni successive, fermo restando che l'origine delle immagini ingenue è connesso ad una idea di immediatezza delle immagini mentali necessarie per la costruzioni di un concetto, ma proprio per questo la formazione di tali immagini risente del contesto culturale in cui si formano. Secondo la posizione di [LR], quindi, i paradossi di Zenone si configurerebbero come una rottura sul piano epistemologico di una modellizzazione ingenua della realtà fisica.
Sempre in [Z] è riportata la posizione di *Grünbaum il quale ha dimostrato che l'applicazione della teoria aritmetica dei limiti alla risoluzione del paradosso è giustificata dalla struttura metrica del tempo fisico*. Non è ininfluente osservare che si parla di dimostrazione, quindi ci si sta muovendo, da un punto di vista tecnico, in un ambito sintattico. Risulta quindi chiaro come il tipo di 'dimostrazione' sia strettamente legato alle scelte che sono state fatte, scelte che a loro volta sono intrinsecamente legate al modo con cui si guarda la realtà e ai modelli che, ai nostri occhi, meglio la descrivono. Si ritornerà su questo punto quanto si analizzeranno la risposta di tipo fisico-cinematico.
In [B] la risposta con *la serie convergente è riportata con una notazione analitica, in cui con δ viene indicata la distanza percorsa e con Δt l'intervallo di tempo*. La ragione della serie geometrica è data quindi dal rapporto tra la velocità della Tartaruga e quella di Achille, cioè v_T/v_A che risulta essere minore di 1. Di fatto utilizza per la convergenza nozioni di carattere cinematico oltre ad una sostanziale identificazione dei concetti di spazio e tempo. Anche secondo [B], quindi, *l'erroneità nella argomentazione di Zenone risiede nel confondere l'infinità degli addendi con l'infinità della loro somma.*
La serie geometrica convergente sembra quindi una buona, anzi ottima risposta matematica, ma lascia alcune perplessità sul piano prettamente filosofico. L'incongruenza in tal senso è ben espressa da Black riportata in [F]: *il problema non è trovare un risultato di una somma infinita, ma determinare se sia possibile che Achille e la Tartaruga portino a termine infiniti atti in un tempo finito*. In pratica si tratta di vedere come conciliare la condizione temporale soggiacente al processo (potenziale) che consiste nel sommare un termine alla somma dei termini precedenti.
Per chiarire il primo punto, riprendiamo in modo critico la soluzione del paradosso di Achille e la Tartaruga per mezzo della serie geometrica. In questo tipo di soluzione si sovrappongono due aspetti, uno linguistico l'altro metalinguistico relativi al tempo: c'è il tempo degli intervalli e il tempo dei movimenti. In pratica si 'sommano' intervalli via via decrescenti, ma il 'conteggio' di questi intervalli (i movimenti) avviene ad un livello diverso, esterno al processo.
Un modello per evidenziare questa distinzione è stato proposto da Thomson (1970).
Riportiamo a questo proposito il seguente brano tratto da [GR], pag. 42.
«La lampada di Thomson
Disponiamo di una lampada munita di un interruttore a pressione. A mezzogiorno, si preme l'interruttore e la lampada si accende. Una mezzora più tardi, si preme nuovamente l'interruttore:

la lampada si spegne. Si ripreme un quarto d'ora dopo, poi un ottavo di ora, poi un sedicesimo, ecc. All'una, la lampada sarà spenta o accesa?
Ci si rende presto conto che è impossibile determinare lo stato della lampada all'una, cioè dopo un'infinità di cambiamenti.
Questo problema permette di distinguere bene tra problemi fisici, matematici e metafisici. La situazione è fisicamente impossibile. Non si tratta dunque di un problema fisico. È una ragione sufficiente per rifiutare di prenderlo in considerazione? [...] Quale potrebbe essere qui la modellizzazione matematica? Se 0 rappresenta lo stato «spento» e 1 lo stato «acceso», il problema diventa quello di chiedersi a quale numero converge la successione
1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . .
la risposta è immediata: non converge. L'interesse del paradosso di Thomson è di aver trasformato questo problema matematico non troppo imbarazzante, nel quale l'infinito appare solo in forma potenziale, in un problema metafisico perturbante, nel quale l'infinito appare in forma attuale. Ed è proprio uno strumento matematico, cioè la serie geometrica, che rende possibile questa trasformazione, in quanto tramite la sua convergenza essa permette di portare l'infinito nel finito.»
Rispetto a quanto sostenuto da Gilbert e Rouche, mi sembra opportuno sottolineare un altro aspetto relativo alla lampada di Thomson. Come detto in precedenza, essa mette in evidenza due tempi: il tempo degli intervalli e il tempo in cui la durata di questi intervalli è sommata.
C'è un meta-tempo che sorregge la somma degli addendi della serie e questo quanto 'dura'? Sono determinabili gli stati? E ancora: è possibile che Achille e la Tartaruga portino a termine infiniti atti (dove questo 'infinito' è da intendere come attuale) in un tempo finito?
Le considerazioni precedenti possono essere riassunte in una questione di fondo: quando si è nelle condizioni di parlare di somma[40]? Il salto, in termini concettuali, è tutt'altro che semplice e, soprattutto, intuitivo ed è lo stesso salto concettuale riscontrabile nel passaggio dal finito (anche 'grande') all'infinito.
Il modello relativo alla lampada di Thomson serve per distinguere gli atti dai loro effetti (potremmo dire, 'gli atti da ciò che vi succede'), tendendo così a discretizzare il fenomeno fisico del moto. Il problema quindi che pone è se con strumenti 'discreti' è possibile descrivere un fenomeno 'continuo', dove questi termini vanno intesi sempre rispetto a modellizzazioni matematiche. Il rischio è quello di procedere in modo autoreferenziale e le riflessioni sulla risposta ottenuta mediante la serie convergente credo costituiscano una buona occasione di analisi critica di un percorso di soluzione.
A questo si aggiunge, come sottolinea Grünbaum (riportato in [Z]), *l'ambito non trascurabile di atto mentale*. Fino ad ora si è parlato di 'atto fisico' e di 'atto matematico', ma questi rischiano di essere 'fotografie' statiche di una realtà dinamica[41]. L'atto mentale assume quindi il ruolo di collante, ma se si tentasse un'infinita contemplazione cosciente di tutti gli intervalli della successione questa si realizzerebbe concretamente in un'infinità numerabile di atti mentali, e la durata di ciascuno di essi dovrebbe essere maggiore, in grandezza, della soglia minima di tempo consentita dalla percezione sensoriale e mentale. In pratica l'atto mentale deve fare i conti con un tempo di soglia minimo che apparentemente ne limita l'utilizzo, ma che di fatto ne favorisce l'astrazione e la deduzione.

A2. CONSIDERAZIONI MATEMATICHE

In relazione a quanto esposto in precedenza, penso sia opportuno riportare alcune considerazioni di carattere più propriamente tecnico rispetto ai problemi presentati.
La risposta analizzata si fonda sullo studio di una serie. Parlando di serie, mi sono sempre riferito ad un 'oggetto' individuato dalla seguente definizione:

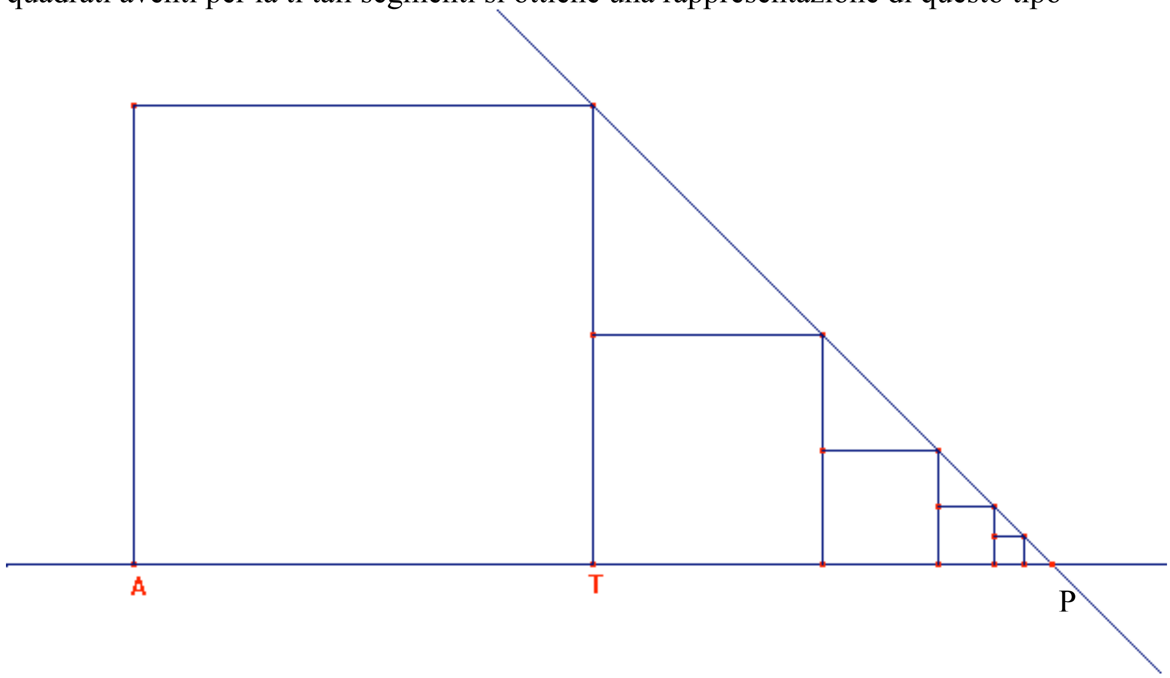
---

[40] Per somma si intende il risultato dell'operazione di addizione.
[41] Significativo, a questo proposito, il paradosso del girino: se si filmasse la vita di una rana, quale sarebbe il fotogramma che decreta il passaggio da girino a rana? Che è poi come dire, se si filmasse la vita di un uomo, quale fotogramma segnerebbe il passaggio dall'adolescenza all'età adulta?

Definizione. Data una successione *a*: N→R, sia[42] $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ **(somma dei primi *n*+1 termini della successione). Chiamiamo serie associata alla successione *a* la successione *S*: N→R tale che *S*(*n*)=*S*$_n$.**

Quindi una serie è una successione costruita a partire da una successione. Il limite di una serie è identificabile, se esiste, con la 'somma' degli 'infiniti termini' della successione *a*. La frase, molto virgolettata, va presa con cautela, in quanto utilizza termini quali 'somma' e 'infiniti' che andrebbero meglio raccordati. Questo raccordo è attivato dal concetto di limite, il quale permette proprio di fare questo salto dal finito all'infinito.

Non mi sembra opportuno riportare considerazioni matematiche sul concetto di serie, reperibili, per chi fosse interessato, su ogni libro di analisi matematica. Ricordo solo che si parla di serie geometrica se la successione che la genera è una successione geometrica (o comunemente detta progressione geometrica), cioè è tale che il rapporto tra il termine n+1-esimo e il termine n-esimo sia costante (tale costante è detta ragione della progressione). Nel caso in cui ad esempio Achille andasse ad una velocità doppia rispetto a quella della Tartaruga, gli spazi percorsi da Achille relativi a quelli percorsi dalla Tartaruga costituirebbero una progressione geometrica di ragione ½ . La serie associata a tale progressione (come tutte le serie generate da progressioni geometriche con ragione strettamente compresa tra -1 e 1) converge. Tradotto in termini pratici, pensando di sommare tutti gli infiniti termini della successione si otterrebbe un risultato finito. Questo aspetto, come detto, è tutt'altro che intuitivo. Per visualizzarlo meglio può essere utile una rappresentazione grafica della situazione. Indicati su una retta i segmenti percorsi da Achille e dalla tartaruga, costruendo i quadrati aventi per la ti tali segmenti si ottiene una rappresentazione di questo tipo



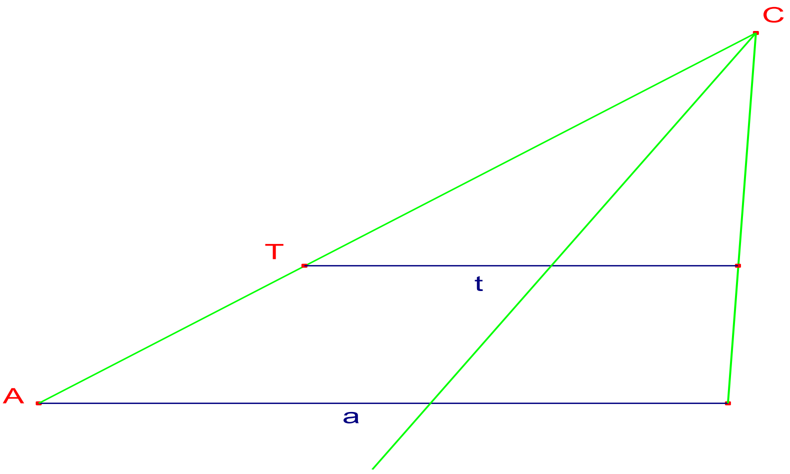
Nella rappresentazione si è supposto che Achille proceda ad una velocità doppia rispetto a quella della Tartaruga. La retta congiungente i vertici in altro a destra dei quadrati permette di individuare il punto in cui Achille raggiungerà la Tartaruga.

[42] Adeguandomi ad una modalità terminologica ormai consolidata, indico con a_n l'immagine di n della successione *a*, cioè, in altri termini, *a(n)*.

La serie determina quindi l'esistenza metrica della distanza del punto d'incontro; la costruzione geometrica lo visualizza. Sembra quindi esserci perfetto accordo tra l'ambito aritmetico (discreto) e quello geometrico (continuo), ma nessuno dei due stabilisce COME avviene tale ricongiungimento. In pratica i due strumenti permettono di giustificare il termine del processo di rincorsa, ma non come si sviluppa tale processo. Lo strumento matematico evidenzia in questo contesto la sua atemporalità: tutto avviene al di fuori del tempo e i risultati sono staticamente definiti. Se il passaggio al limite della serie fa pensare al potenziale processo di addizione degli addendi successivi, il limite della serie riporta l'infinto in forma attuale: 'tutti' gli addendi devono essere presi 'contemporaneamente' e questa contemporaneità è visibile nella somma, cioè nel risultato di quel processo. Il ruolo del tempo si sposta in modo significativo dall'aspetto linguistico legato al fenomeno a quello metalinguistica legato alla comprensione del fenomeno: c'è il tempo degli intervalli e il tempo dei movimenti (mentre Achille raggiunge il punto in cui si trovava la Tartaruga, la Tartaruga percorre ecc.). In questo passaggio, su questo duplice piano di percezione, si insinua il paradosso. Ciò a cui non si riesce a rispondere è 'quanto dura' il meta-tempo che sorregge il processo di addizione degli addendi della progressione. L'indeterminatezza degli stati, ben descritta dalla lampada di Thomson vista in precedenza, evidenzia la frattura. La serie ci fornirà un numero, la geometria un punto, ma questo risultato viene pagato con una rinuncia alla comprensione.
Il risultato matematico sembra comunque esserci; la difficoltà nella collocazione del processo può essere relativizzata se il risultato basta a garantirci la risposta. Ma cosa significa risultato matematico? Le considerazioni che normalmente vengono fatte a proposito del paradosso di Achille e la Tartaruga coinvolgono numeri e rapporti 'onesti': la distanza iniziale tra i due è data dalla misura di un segmento espressa da un numero intero, il rapporto tra le velocità da un numero razionale. La benignità della natura viene aiutata. Ma se la distanza iniziale fosse espressa da una misura irrazionale (ad esempio, vantaggio Tartaruga = misura circonferenza di raggio 1 m; la posizione della Tartaruga rispetto ad Achille potrebbe essere individuata, ad esempio, facendo percorrere ad una ruota di raggio 1 m un giro completo)? o se la ragione fosse irrazionale (Achille percorre la diagonale di un quadrato mentre la Tartaruga ne percorre il lato)? Nel caso (malaugurato) fossero verificati entrambe queste condizioni, la distanza che Achille dovrebbe percorrere per raggiungere la tartaruga (cioè il limite della serie) sarebbe data da $S=2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)$ m.
Esiste in questo caso il punto d'arrivo, individuabile col modello geometrico precedente? C'è una differenza tra la risposta aritmetica, quella geometrica e quella fisica? Il risultato irrazionale trovato numericamente rende non banale la risposta: come nel caso del Menone, il risultato geometrico ha una rappresenta numerica compatibile solo col piano teorico, dove questo 'teorico' si riferisce a ciò che è ritenuto necessario per studiare la realtà, ma non su quello fisico.
Un esempio analogo a quelli trattati, anche in relazione al doppio ruolo svolto dal tempo e alla compatibilità con i modelli descrittivi, è quello di una pallina elastica che cade e rimbalza ripetutamente: cosa descrivere il fenomeno? Una somma finita di infiniti termini o il tempo infinito in cui la teoria colloca lo studio di un moto (smorzato) di questo tipo? Quale modello matematico è più pertinente?
Può essere opportuno, in questi casi, parlare di infinto naturale, concetto a cui si è accennato nel testo.

A3. ALTRE RISPOSTE MATEMATICHE: GLI INSIEMI EQUIPOTENTI

In [R], Russell fornisce una risposta del paradosso immaginando di 'distinguere' i segmenti *a* e *t* percorsi rispettivamente da Achille (A) e la Tartaruga (T) e mostrando la corrispondenza biunivoca tra i punti toccati da A e quelli toccati da T nel loro percorso (vedi figura):



In [BJ] viene riportata una significativa obiezione di James alla risposta di Russell: Rassell, secondo James, *elude la vera difficoltà che riguarda la categoria crescente dell'infinito e non la categoria stabile* (l'unica presa da lui in considerazione quando presuppone che la corsa è stata compiuta ed il problema è quello di equilibrare i percorsi). In sostanza, Russell giustifica come mai Achille ha raggiunto la Tartaruga, ma non mostra come ciò sia avvenuto. I presupposti matematici su cui si basa la risposta di Russell si riferiscono alla definizione di insieme infinito di Cantor, come insieme di cui sia possibile individuare una corrispondenza biunivoca tra l'insieme e un suo sottoinsieme proprio. Questa spiegazione quindi si fonda sul concetto di infinito attuale e sul fatto che, secondo Russell, *il paradosso si regge sulla nozione comune (euclidea) secondo cui la parte è minore del tutto*. Questo tipo di risposta e la sua motivazione pone conseguentemente alcuni significativi problemi di carattere semantico: cosa si intende per parte? Cosa si intende per minore? La nozione comune euclidea è vera? Cosa si intende per 'nozione comune'? E per vera?
In ambito insiemistico, se per parte si intende un sottoinsieme proprio di un insieme A e per minore si intende che gli 'mancano' alcuni elementi di A, allora Euclide ha ragione, ma Euclide non 'ragiona' in modo insiemistico. Se per minore s'intende che ha 'meno' elementi[43], nel caso di insiemi infiniti Euclide ha, in generale, torto.
Nella figura precedente si evidenzia come qualunque semiretta uscente da C incontri in uno ed un solo punto i segmenti *t* ed *a*, individuando così una corrispondenza biunivoca tra i punti dei due segmenti. Tale corrispondenza 'garantisce' (in analogia a quanto viene fatto per gli insiemi finiti) che i due segmenti (visti come insiemi di punti) hanno la stessa cardinalità. Il questo caso gli elementi dei due insiemi non vengono 'contati', ma si mostra che ad ogni punto di un segmento ne corrisponde uno ed uno solo dell'altro e viceversa.
Anzi, questa proprietà diventa un modo per definire gli insiemi infiniti (definizione data in positivo e non in negativo): *un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio* (la parte, il tutto…)
Anche la risposta di Russell ha però diversi punti deboli:

1) Questo modo di procedere presuppone la continuità della retta.
2) Si presuppone che Achille e la Tartaruga si incontrino; ma chi garantisce che questo avvenga (giustificazione a posteriori: obiezione già vista in precedenza)?
3) Tutti i punti dovrebbero essere toccati (e questo, per la densità della retta, porterebbe ad una situazione di staticità proprio a causa della adimensionalità dei punti).
4) L'infinito coinvolto è un infinito attuale (i punti del segmento non vengono "a costruirsi" ma devono essere dati in atto).
5) Spazio e tempo si comportano in questo modo?

L'ultima delle precedenti domande apre il capitolo delle risposte cinematiche date al paradosso.

---

[43] Dove questo 'meno' è riferito alla cardinalità degli insiemi, cioè ha un 'numero' inferiore di elementi.

A4. RISPOSTE FISICHE (CINEMATICHE)

Secondo quanto riportato in [F], i paradossi di Achille e la Tartaruga e quello della dicotomia confutano l'idea di tempo e spazio continui; quelli della freccia e dello stadio l'idea di tempo (non composto da istanti) e spazio (non composto da punti) discreti. Questo tipo di motivazione presuppone però che sia chiaro cosa si intende per istante e per punto. La percezione adimensionale che si ha di questi concetti induce una conseguente difficoltà nel vederli in un'idea di continuità dimensionale; soprattutto la adimensionalità non collima con l'immagine mentale (per il punto) o percettiva (per il tempo) di una 'forma' o di una 'durata'. Nel paradosso della freccia, ad esempio, l'estensione temporale assomiglia ad una estensione spaziale, facendo assumere agli 'istanti' la connotazione di (infinitesimi?) indivisibili (ma non senza durata). Com'è noto, il primo a cercare di dare una spiegazione ai paradossi di Zenone fu Aristotele nella *Fisica* (ed è del resto grazie ai suoi scritti se sono giunti a noi). Le risposte di Aristotele si riconducono tutte ad un assunto: la negazione che il tempo sia un'estensione di istanti indivisibili; quindi è riconducibile alla sua negazione dell'infinito e infinitesimo attuale.

La concezione moderna di spazio e tempo porta invece a concettualizzarli come estensioni dello stesso tipo utilizzando un modello insiemistico per i punti e per gli instanti. Questa visione unitaria, se risponde ad una tendenza all'aritmetizzazione dei concetti di spazio e tempo, lascia tuttavia aperta una domanda cruciale: c'è differenza tra *pensare* lo spazio-tempo e *misurarlo*? Che l'identificazione tra punto-istante ed elemento di un insieme e, a maggior ragione, tra segmento e sua misura, crei ostacoli significativi sul piano didattico è evidente agli insegnati che si sono trovati a presentare questi concetti. Ma le difficoltà degli alunni sono anche difficoltà epistemologiche, legate a loro volta ai contesti culturali in cui questi concetti sono nati e si sono sviluppati. La modellizzazione insiemistica si avvicina più alla concezione pitagorica, per cui per diversi alunni l'immagine mentale discreta di un segmento "formato" da punti si traduce in una tendenza alla discretizzazione della corrispondente misura[44].

Il problema di fondo del paradosso della freccia è in che modo passa da un istante all'altro. Di fatto il paradosso comporta una riflessione sul movimento.

In [F] viene riportata la posizione di Russell: *movimento non come stato, ma come luoghi diversi occupati in momenti diversi*. Un esempio per illustrare ciò: differenza tra palla in movimento e foto della palla in movimento. I fotogrammi della palla in movimento non sono diversi da quelli della palla ferma. Potremmo quindi dire che in ogni istante la palla è 'ferma'. Nella realtà quindi non esiste uno stato di movimento, ma questo, secondo Russell, non permette di concludere che il movimento non esista e la fallacità del ragionamento sta proprio in questa errata identificazione tra, ci verrebbe da dire, oggetto e processo.

In questa identificazione la matematica ha un ruolo non marginale. La definizione di velocità istantanea, ad esempio, risulta essere una misura geometrica statica identificabile con un particolare limite. I metodi matematici forniscono così risposte effettive sul piano pratico, ma non sono in grado di definire il movimento. Il motivo risiede negli strumenti usati dalla matematica, ma soprattutto nell'approccio alle grandezze coinvolte: il tempo è una variabile non dissimile da altre grandezze. Il tempo in matematica viene congelato e i processi matematici diventano processi svolti al di fuori del tempo fisico. La matematica prende spunto dalla realtà, ma per spiegarla deve costruirsi altri strumenti che la trascendano. Il caso della geometria è emblematico: l'impostazione assiomatica hilbertiana o lo stesso programma di Erlanger fanno passare da un'idea anche etimologicamente dinamica di 'movimento rigido' come strumento di confronto tra figure (l'idea di uguaglianza come idea di sovrapponibilità: la fisicità degli oggetti coinvolti è evidente) a quella statica di trasformazione vista come funzione che fa corrispondere punti a punti. Il 'moto' matematico diventa quindi un moto relativo ad una percezione.

[44] Aspetti di questo tipo sono stati evidenziati in attività da me proposte nella scuola Primaria e nella Scuola Secondaria di Primo Grado, attività strutturate, in relazione all'età degli alunni, sul passo dello schiavo del dialogo platonico del Menone e sul paradosso di Achille e la Tartaruga.

Come si diceva in precedenza, l'immagine del segmento spaziale e del segmento temporale come insieme di punti-istanti, non rende conto della continuità di tali enti, aspetto che risultava invece scontato per Euclide al punto da pensare gli enti di dimensioni inferiore (come ad esempio i punti) come delimitanti oppure ottenibili da intersezioni (costruzioni) di enti di dimensioni superiori di una unità (ad esempio le linee). Questa impostazione euclidea, modernamente criticabile nella sua mancanza di esplicitazione formale del ruolo della continuità, evidenzia però il modo con cui il geometra greco guarda la realtà. Gli oggetti geometrici individuano un mondo in cui i paradossi di Zenone possano trovare una loro risposta. La sfida che Zenone lancia è quella di fornire una descrizione del mondo che sia compatibile col mondo. La proposta euclidea è sintatticamente coerente, ma rimane il dubbio se è anche semanticamente veritiera col mondo.
Le teorie matematiche sono quindi incapaci di rappresentare in modo soddisfacente il movimento continuo? Le risposte, secondo Grünbaum, possono essere opposte:
a) Sì: il concetto matematico di continuità non descrive in modo soddisfacente il movimento.
È importante sottolineare l'idea di 'concetto matematico di continuità': l'idea intuitiva di continuità può essere giustificata con la difficoltà percettiva nel riconoscere la separazione[45]. La sua definizione matematica necessita di altro: richiede il concetto di limite, il quale regge, nella sua formulazione potenziale, un quantificatore universale sugli intorni di un punto (o di una famiglia di aperti, se si pensa alla definizione topologica globale di continuità). Il quantificatore universale toglie illusioni all'intuizione e alla possibilità di farsi un'idea sorretta da un'adeguata immagine mentale. Il quantificatore universale nasconde, ma non troppo, quell'infinito da cui la formalizzazione matematica dello spazio-tempo non può prescindere.
Su questa posizione troviamo Whitehead (citato in [F]) il quale supera i paradossi di Zenone teorizzando *l'universo fisico come estensione spazio-temporale continua, porzioni delle quali vengono ad esistere come unitarie o non esistono affatto*. La divisibilità quindi è possibile solo nell'esistente, ma l'atto di divenire è indivisibile. In pratica è solo dopo la materializzazione dell'Essere che è possibile riconoscervi un'infinita e potenziale divisibilità, ma il percorso per arrivare a questo oggetto, il processo dinamico che porta alla costruzione mentale del concetto-oggetto è indivisibile. La dinamicità richiede l'esistenza di 'mattoni' che ne permettano la costruzione. Un esempio in tal senso è il già citato paradosso di Anfibio; ma ciò che sembra esserci in questo paradosso è anche la inadeguata applicazione di un mezzo; l'errore starebbe quindi nel pensare il mezzo come un garante referenziale. Se filmare la vita di Anfibio (così come filmare la corsa di Achille, visto che la descrizione di Zenone si potrebbe configurare come tale) porta ad un paradosso, Whitehead sembra dirci che è il mezzo che è inadeguato: il fotogramma che segna l'essere rana o testimonia il superamento di Achille ai danni della Tartaruga mostrerebbe l'avvenuta mutazione degli stati dell'Essere, ma la difficoltà ad indicare quale sia il fotogramma (e quindi a riconoscere questa mutazione), non dice se è immutabile l'Essere o se è inadeguato il mezzo.
Gödel (riportato in [RK]) distingue tra l'insieme dei punti descritto nell'analisi insiemistica e la retta continua dell'intuizione spaziale: *"Secondo questo concetto intuitivo, anche se mettiamo insieme tutti i punti non otteniamo la retta, ma semplicemente i punti di un certo tipo di impalcatura presente nella retta"*. La 'teoria' aiuta l'intuizione spaziale fornendo 'un'impalcatura'. L'intuizione spaziale cerca una formalizzazione e la trova nella teoria degli insiemi.
b) No. L'esempio che fa Grünbaum è quello di un "Achille staccato" il quale percorre a balzi la distanza che di volta in volta lo separa dalla Tartaruga (un balzo per ogni distanza): anch'esso, pur facendo successione infinita di operazioni discrete, porta a termine tale successione in un

[45] Questo è uno degli aspetti che, secondo me, giustifica la nostra percezione dell'infinito e dell'infinitesimo. In un contesto di realtà che non permette di esperire empiricamente questi concetti, l'infinito può risultare una fuga dall'incapacità di percepire il finito grande. Questa idea è riconducibile al concetto antropologico di infinito di cui si parla anche negli atti e individuerebbe nel salto finito-infinito il superamento di un limite percettivo umano. L'infinito si configurerebbe quindi come una non accettazione di una incapacità. Le stesse considerazioni si potrebbero fare a proposito degli infinitesimi.

tempo finito. Questo, secondo James (riportato in [F]), confermerebbe come i paradossi di Zenone forniscano la prova *che tutti i processi temporali sono discontinui per natura*.

"Processi temporali discontinui per natura": ciascuno di questi termini racchiude un mondo di idee, pensieri teorie, tutte strettamente connesse allo sviluppo della cultura matematico-scientifica occidentale. Se James ha ragione, basterebbe questo per assegnare a Zenone il ruolo di padre della filosofia matematica occidentale.

Infine una disquisizione sul ruolo dei 'numeri' utilizzati in ambito fisico.
La cinematica descrive il moto (visto quindi nella sua attualità), ma non lo giustifica.
Quali sono i 'numeri' coinvolti nella risposta cinematica? Sono i numeri della fisica? E quali sono "i numeri" della fisica? Per fare un esempio di ciò che si intende, si consideri la legge oraria dei moti uniformemente accelerati, $s=(^1/_2)at^2$. Da un punto di vista matematico individua una funzione dall'insieme dei numeri reali non negativi ai numeri reali; ma se ci si chiede dopo quanti secondi, con una accelerazione di 2 m/s^2, verrà raggiunta una distanza di 10 m, il risultato (irrazionale) non può corrispondere ad un intervallo di tempo misurabile fisicamente: la realtà si accontenta, laddove la matematica pretende di essere esauriente. I numeri reali non 'misurano' la realtà fisica, ma una sua 'idea'.

A5. PERCETTIVA E PSICOLOGICA

L'analisi infinitesimale è stata formalizzata, nell'ottocento, su una concezione potenziale dell'infinito e dell'infinitesimo. In precedenza si è parlato di infinito come fuga. In questo tipo di risposta c'è un indubbio riferimento antropologico alla nostra percezione del mondo fisico. La realtà evidenziata dal paradosso AT è una realtà che fa scontrare la nostra percezione con la nostra soglia di percettibilità. È quanto ad esempio sostiene Grünbaum (riportato in [Z]), secondo cui *la coscienza umana del tempo ammette un limite inferiore di percettibilità. Noi non sperimentiamo i sottointervalli in cui dividiamo l'unità del percorso come trascorrenti in una forma metricamente corrispondente alla loro natura.*
Se volessimo tradurre 'formalmente' tale posizione, dovremmo cercare di capire se a livello di psicologia della percezione esistono le forme attuali di infinito e di infinitesimo: in pratica esiste una soglia temporale espressa da un numero reale positivo ε che noi percepiamo e tale che qualunque altra soglia temporale espressa da un numero reale positivo δ minore di ε che individua un parte del percorso non è da noi percepita. Formalmente, indicando con P il predicato binario '*x percepisce y*', e indicando con U il predicato unario '*x è uomo*' la condizione precedente diventa (per comodità, si utilizzando i quantificatori relativizzati)
$\exists\varepsilon\in R^+\forall x(U(x)\rightarrow P(x;\varepsilon)\wedge\forall\delta\in R^+(\delta<\varepsilon\rightarrow\neg P(x;\delta))$.
L'enunciato precedente potrebbe essere semplificato (ad esempio sottintendendo la categoria 'Uomo'), ma ciò che conta è che evidenzia un 'minimo' tra i numeri reali positivi su basi antropologiche.
Bergson in [BE] (citato in [F], [O] e [BJ]) riporta la questione sul piano dinamico e sulla connotazione dell'Essere: il problema, secondo Bergson, *non sta nella continuità del divenire, quanto nell'incapacità intellettuale di comprenderla*. La percezione del divenire è quindi conseguenza di *un'intuizione* di carattere metafisico e non riconducibile ad un contesto logico o matematico.
Bergson distingue *tra la divisibilità di un oggetto e l'indivisibilità di un atto. Se è vero che lo spazio percorso è infinitamente divisibile, ognuno dei passi di Achille è un indivisibile*. Bergson sembra quindi sostenere che se la realtà si può anche immaginare continua, la nostra percezione rimane discreta. Il modello matematico che poggia sulla matematica del continuo (che secondo Grünbaum, criticando Bergson, risulta essere corretta e coerente con la realtà) rimane una forma di astrazione rispetto alla descrizione dell'atto. Il paradosso risiede nell'identificazione degli atti indivisibili con lo spazio (omogeneo) che li sorregge. Achille sorpassa la Tartaruga perché ogni loro passo è un

indivisibile in quanto movimento e sono diversi in quanto spazio percorso. Ci sarebbe quindi una confusione tra movimento e spazio percorso: i passi reali sono discreti, mentre Zenone li avrebbe sostituiti con passi virtuali.
Un esempio che tende a evidenziare questo aspetto dell'indivisibilità dell'atto è proposto da James: quando la gallina fa l'uovo lo fa intero, non mettendo insieme la metà, poi un quarto e così via; analogamente l'esperienza sensibile è fatta di atti compiuti. Il possedere una soglia minima riconducibile alla psicologia della percezione sottolinea la discretezza degli atti riconosciuti come tali e non la loro continuità.
Il rapporto tra spazio e atto del movimento sembra quindi essere un rapporto di potenzialità e attualità: la continuità dello spazio-tempo permette agli atti discreti di manifestarsi. Bergson ci sembra dire che noi ci muoviamo a livello percettivo nella struttura del discreto, la quale è retta dalla continuità: l'aspetto 'potenziale' del movimento è permesso dalla 'attualità' della struttura, così come, secondo Cantor, l'infinito potenziale è possibile grazie all'infinito attuale soggiacente (ad esempio, i numeri naturali possono essere dati in potenza per mezzo della funzione *successore*, ma questo perché l'insieme dei numeri naturali è a sua volta infinito in atto).
Questa posizione trova un illustre sostenitore in Kant (riportato in [O]) che nella *Critica della ragion pura* sostiene *l'illegittimità della nozione di mondo* (deducibile dalla seconda antinomia della ragion pura[46]). L'intelletto ne percepisce, infatti, la finitezza come una limitazione innata, ma non sa concepirne l'infinitezza in maniera comprensibile, ritornando così alle difficoltà connesse con la percezione dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande.
Se i tentativi di risposta riferibili all'ambito fisico-matematico tendono a gestire il paradosso con strumenti 'predisposti' a **studiare** la realtà, le risposte di carattere percettivo e psicologico tendono invece a riportarlo a questioni legate all'**analisi** della realtà. Il piano quindi diventa più propriamente filosofico e coinvolge direttamente il rapporto tra chi conosce e cosa è studiato.
Tale distinzione è proposta da Shopenhauer ne *Il Mondo come volontà e rappresentazione*: sostenendo che non si può conoscere se stessi, induce di fatto una distinzione di tipo linguaggio–metalinguaggio. Questa distinzione, riconducibile ad un processo semantico di ricerca dell'ambito in cui poter parlare di verità, è ciò che porta Shopenhauer a distinguere, nella conoscenza, l'osservatore dall'osservabile. La sua conclusione è che non si può dare una descrizione (*in ottica "scoperta della verità"*) quantistica dell'universo. Per fare ciò sarebbe infatti necessario un osservatore esterno all'universo.
Infine vale la pena citare Carroll che in un dialogo riportato in [H] (e citato in [O]) tra Achille e la Tartaruga argomenta come non siano possibili i sillogismi, distinguendo tra implicazione linguistica e deduzione metalinguistica. La questione si sposta quindi su un piano prettamente logico. Se la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio è ormai una conquista assodata nella logica moderna, come lo stesso Odifreddi ricorda (citando il teorema di deduzione come superamento della distinzione evidenziata in precedenza), è interessante osservare quali ambiti abbia invaso il paradosso di Zenone. La corsa di Achille e la tartaruga è diventata ormai un pretesto per indagare le basi stesse del sapere occidentale.

A6. CONCLUSIONI

Al di là delle varie tipologie di risposte che sono state date al paradosso di Achille e la Tartaruga[47], un aspetto è indubbio: da questo paradosso in poi la cultura occidentale deve fare i conti con l'infinito. Secondo molti commentatori il vero contributo del paradosso AT è di aver posto in modo improrogabile la trattazione e la gestione di questo concetto.

[46] Tale antinomia afferma che il mondo non può essere né costituito da elementi atomici, né infinitamente divisibili. Da un lato, la materia ha, infatti, estensione spaziale, ed è quindi soggetta all'infinita divisibilità dello spazio stesso. Dall'altro, l'infinita divisibilità porta ad un regresso all'infinito, al termine del quale non rimane più nulla e nel quale la materia si dissolve.
[47] È interessante osservare come le varie risposte siano funzionali agli scopi di chi le pone. In pratica è come se il paradosso AT si 'prestasse' ad essere letto in relazione alle finalità di chi lo legge.

Il primo a riconoscergli questa valenza è stato proprio Aristotele ([A]) che evidenzia la sfasatura tra realtà (finita) e possibilità mentale (infinita divisibilità). *Il paradosso quindi risiede nel pensare che l'infinito sia applicabile alla realtà.*
"L'infinito sia applicabile alla realtà"; questa frase è molto più di una considerazione filosofica: è una vera e propria sentenza. Indica la biforcazione, la rottura tra ciò che comunemente è inteso come realtà e ciò che invece è peculiarità dell'uomo. Se la cultura orientale ha nell'equilibrio tra uomo e natura il suo obiettivo primario, ricerca sorretta da una presunta simbiosi e armonia tra uomo e natura, la cultura occidentale sembra fondarsi su un presupposto di distinzione di ambiti: l'uomo è osservatore esterno della realtà e il suo obiettivo è di dominarla per mezzo del processo di conoscenza[48]. L'applicazione acritica dei suoi costrutti mentali può però provocare i danni di cui il paradosso AT è un inquietante esempio. Il paradosso quindi è una possibilità che ci è stata data per metterci in guardia da una forma di presuntuosa onnipotenza.
Di questo è assolutamente convinto Borges il quale in [BJ] sostiene che AT è incontestabile **a meno di confessare l'idealità di spazio e tempo**[49] e, soprattutto, in [BJ1] individua il grande male nel concetto di infinito, *corruttore e ammattitore degli altri concetti*. L'infinito è visto come un concetto che *una volta ammesso in un pensiero esplode e lo uccide*. Immaginare qualcosa di più culturalmente devastante è difficile: ciò che caratterizza l'uomo, proprio perché non fa parte della sua realtà sensoriale, è anche ciò che porta effetti distruttivi nei concetti che lo coinvolgono. Non è superfluo osservare che la matematica non solo fa largamente uso del concetto di infinto, ma addirittura si fonda su di esso, seppure in diverse formulazioni. La matematica è quindi una prova della rottura del patto tra l'uomo e la natura? L'ipotesi potrebbe essere azzardata, ma quando ci si chiede, anche a livello autorevole, se la matematica è nella realtà delle cose o è una creazione dell'uomo, sembra si ammetta implicitamente questa separazione. Il tentativo aristotelico di riportare l'infinito secondo connotazione proprie dell'uomo è nel disconoscere l'infinito in forma attuale: l'infinto potenziale, legato ad un processo e alla connotazione temporale (percepibile) relativa al processo, è l'unica forma riconducibile al patto uomo-natura. Ma Zenone a quale infinito fa riferimento? In [D'A] vengono date due possibili risposte, tra loro contrapposte.
Una risposta potenziale: *non esiste un più piccolo tratto indivisibile (in contrapposizione con la filosofia di Pitagora) poiché se così fosse in quel tratto Achille e la Tartaruga si incontrerebbero.*
Una risposta attuale: *Zenone salva la filosofia Pitagorica. Achille raggiunge la Tartaruga, quindi esiste un "segmentino" in cui non sarà più possibile distinguere la posizione di Achille da quella della Tartaruga (giunti ad essere separati da una monade, alla successiva Achille raggiunge o supera la Tartaruga).*
Secondo quest'ultima interpretazione, il paradosso si configurerebbe come una sorta di dimostrazione per assurdo.
Sta di fatto che la cultura cerca di tutelarsi dai possibili 'danni' che l'infinito può provocare. L'esempio più evidente di questo tentativo è espresso dal *Regressus in infinitum*, in genere usato per negare. Aristotele lo usa in più circostanze, ma soprattutto, sul piano matematico, produce l'esigenza di parlare di termini primitivi e assiomi.
S. Tommaso: se ne serve per affermare l'esistenza di Dio.
Bradley (1897) lo usa non solo per combattere la relazione causale, ma per negare tutte le relazioni.
Il *Regressus in infinitum* risulta sostanzialmente applicabile a tutti gli argomenti, dall'estetica al problema più generale della conoscenza. Assume quindi il ruolo di fondatore di un modo di

[48] Significativa, a tale proposito, la peculiarità che Dio nella Genesi (Genesi….) assegna ad Adamo: "Dai un nome a tutte le cose". La possibilità di nominalizzare è potere sulla cosa nominalizzata. L'uomo può usare la conoscenza per controllare e governare la natura. Il percorso di conoscenza diventa quindi percorso di conquista. In questo modo, però, l'uomo prende distanza dall'oggetto studiato, stabilendo piani diversi all'interno del creato tra ciò che è uomo e ciò che è non-uomo. Ancora una negazione a segnare delle fratture.
[49] Per rafforzare la sua tesi, Borges cita in [BJ] James, secondo cui il paradosso di Zenone *è un attentato non solo alla realtà dello spazio, bensì a quella più invulnerabile e sottile del tempo.*

strutturare le argomentazioni, ma lo si può anche vedere come una implicita ammissione della incapacità e della impossibilità dell'uomo di andare oltre il finito. Per dirla con Borges (in [BJ]), *questa presa di coscienza desta l'uomo dal carattere allucinatorio con cui guarda il mondo*. Senza il paradosso di Achille e la tartaruga *il nostro sogno sarebbe così preciso e coerente che finiremmo per crederci. I personaggi zenoniani vi introducono smagliature di assurdità che finiscono per rivelarne l'irrealtà.*
Al di là dell'aspetto poetico, la rilevanza del timore manifestato da Borges sta nell'idea che l'intuizione dell'infinito diventi per l'uomo una perdita di coscienza: il mondo non è per ciò che è, ma per come noi lo vediamo. L'uomo occidentale, nel suo esasperato meccanicismo, vede anche ciò che non c'è: la realtà deve adeguarsi agli strumenti che la studiano. La difficoltà nel conciliare la percezione con la ragione ci è evidenziata dai tarli che la cultura occidentale si costruisce, come eterno monito alla inadeguatezza di risposte su chi sia l'uomo.

BIBLIOGRAFIA SUL PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA

[A] Aristotele: 1973, Opere (Fisica, Del cielo), Laterza
[B] Bagni G. T.: 1996, Storia della Matematica, Pitagora
[BE] Bergson H.: – Saggio sui dati immediati della conoscenza,
[BJ] Borges J.: 1984, La perpetua corsa di Achille e la tartaruga, in Tutte le opere, Meridiani Mondatori
[BJ1] Borges J.:1984, Metempsicosi della tartaruga, in Tutte le opere, Meridiani Mondatori
[BO] BoyerC. B.: 1976, Storia della matematica, Mondatori
[D'A] D'amore B., Arrigo G.:1992, Infiniti, Franco Angeli
[F] Falletta N. :1983, Il libro dei paradossi, Longanesi & C,
[G] Gardner M.: 1978, Sui paradossi di Zenone, in Verità e Dimostrazione, Le Scienze
[H] Hofstadter D.: 1984, Gödel, Escher, Bach, Adelphi
[LR] Lobardo Radice L.: 1981, L'infinito, Editori Riuniti
[O] Odifreddi P.: 2001, C'era una volta un paradosso, Einaudi
[R] Russell B. 1971, I principi della matematica, Newton
[RK] Rucker R.: 1982, La mente e l'infinito, Muzzio
[T] Toth I.: 2001 "Come diceva Filolao il Pitagorico.." Filosofia, Geometria, Libertà , in Federico Enriques, Matematiche e Filosofie , Belfonte,
[TV] Tagliasco V., Vincenti A.: 1998, Dietro le formule… , Bollati Boringhieri
[Z] Zellini P.: 1980, Breve storia dell'infinito, Adelphi