

CURIOSITÀ PER LA MATEMATICA 'INUTILE' UNO STRUMENTO PER MIGLIORARE IL PENSIERO CRITICO¹

Achille MAFFINI, Carlo MARCHINI², Angela RIZZA, Angela SPERONI

Abstract. An Advanced Mathematical Teaching/Learning experience with eighteen 15 - 18 year older students, from two different High Schools, dealt with 'The finite'. The activity was conducted in a mathematical laboratory environment. This activity laid the basis for a theoretical enquiry about the meaning of mathematical laboratory and the relevance of non curricular topics in the learning of mathematics. Moreover we outline how the laboratory was realized.

INTRODUZIONE.

L'occasione della ricerca

La diminuzione progressiva delle iscrizioni ai corsi universitari delle cosiddette *hard-sciences* (Matematica, Fisica e Chimica) è un fatto che riguarda quasi tutti i paesi europei (e non solo), come segnalato da Jensen *et al.* (1998). Con qualche anno di ritardo, nel 2005, anche in Italia il ministero dell'Università ha varato un progetto, denominato 'Progetto Lauree Scientifiche' (PLS), allo scopo di attrarre gli studenti ad iscriversi ai corsi delle *hard-sciences*.

Per quanto riguarda la Matematica, variabili esogene, quali le poche o poco remunerative prospettive di lavoro dopo la laurea, sicuramente influenzano negativamente la scelta ad iscriversi ai nostri corsi. La relativa scarsità dei corsi di laurea in Matematica, poi, con la prospettiva di pendolarismo o di residenza lontana da casa, ha impatto non positivo sulle iscrizioni. Questi fattori sono indipendenti dai contenuti, o dal modo in cui la Matematica viene insegnata nella scuola preuniversitaria. Un nostro intervento che sortisca effetti favorevoli (alle iscrizioni) può agire solo su alcune variabili endogene, riguardanti, appunto, la Matematica ed il suo insegnamento (Bloch, 2005).

Le realizzazioni del PLS hanno assunto i più diversi aspetti, secondo le sedi che hanno partecipato. La sede di Parma, sulla base dell'esperienza di ricerca nella Didattica della Matematica, ha individuato come principale un obiettivo a lungo termine, quello di migliorare negli studenti preuniversitari l'immagine della disciplina e le competenze relative all'argomentazione ed al ragionamento. In questo modo noi speriamo che possa crescere il numero degli studenti che manifestino inclinazione per la Matematica, aumentando il numero di iscritti a Matematica nell'immediato e nelle generazioni future. Con uno slogan: vorremmo porre le basi perché i figli degli attuali studenti preuniversitari non trovino nei genitori un ostacolo ad iscriversi a Matematica, quando dovranno scegliere l'università.

¹ Lavoro svolto nell'ambito delle attività dell'Unità locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma e nel Progetto Lauree Scientifiche ...

² indirizzo: Carlo Marchini – Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Viale G.P. Usberti 53/A, 43100 PARMA. E-mail: carlo.marchini@unipr.it

La situazione della Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado in Italia

In questo ‘sottoparagrafo’ riferiamo una nostra impressione generale, relativa, forse, alla sola situazione locale che abbiamo sotto gli occhi come insegnanti e come formatori coinvolti nella Scuola di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario (SSIS). Ci pare che nella Scuola Secondaria di Secondo Grado, in Italia, la Matematica sia esposta spesso con enfasi sugli algoritmi e le loro regole d’applicazione, come sottolineano i nomi stessi delle proprietà che invece di chiamarsi ‘Teorema’ o ‘Proposizione’ assumono tradizionalmente nomi vari quali ‘Formula’, ‘Criterio’ ‘Regola’ ‘Legge’, ‘Principio’, ecc. È in atto una sostanziale sottovalutazione pratica gli aspetti educativi della Matematica, pur se conclamati nei programmi e nelle indicazioni, che rimangono ascoltate tanto quanto le grida di manzoniana memoria. Un aspetto di questa sottovalutazione si riscontra nella assai scarsa attenzione al problema (vero!), ai modi diversi di pensiero: euristico o dimostrativo ed, in particolare, alle dimostrazioni, come si può osservare scorrendo una qualsiasi dei manuali oggi in uso. Queste ultime, le dimostrazioni, spesso sono proposte dall’insegnante come episodi isolati, avulsi da un contesto teorico che sia presentato chiaramente in modo da motivarne la presenza e la necessità. Dall’esperienza della SSIS, non sono pochi i casi (registrati dagli specializzandi, in fase d’osservazione) nei quali l’insegnante detta la ‘Formula’ o il ‘Criterio’, ecc., dichiarando che lo fa per aiutare i ragazzi (aggiungendo spesso, anche per ‘non perdere tempo’).

Cosa si può fare

Per mutare l’immagine della Matematica nell’ultimo segmento della scuola preuniversitaria, così da favorire anche le iscrizioni al nostro corso di laurea, riteniamo che la nostra scienza non debba essere introdotta solo come un linguaggio o uno strumento utile ad altri scopi. Per realizzare il cambiamento di prospettiva abbiamo cercato di potenziare la curiosità degli studenti verso i contenuti della disciplina. Si sono così pianificate varie attività e qui ne presentiamo una che ha avuto i seguenti obiettivi:

- sviluppare il pensiero matematico in studenti dotati per la matematica;
- dare l’opportunità di osservare studenti dotati per la disciplina o particolarmente motivati alle prese con un concetto matematico complesso;
- sviluppare la loro curiosità per arricchire la loro predisposizione al pensiero critico.

Con questi scopi, non era possibile adottare un approccio didattico puramente trasmissivo, abbiamo quindi scelto un ambiente di tipo laboratoriale, deducendolo da una precedente esperienza riportata in Maffini (2001).

QUADRO TEORICO

L’esperienza che descriviamo ci ha posto una serie di problemi teorici che vogliamo illustrare, confrontando la nostra posizione con quella teorizzata da alcuni recenti studi.

Abbiamo utilizzato un ambiente - laboratorio?

Il nome ‘laboratorio’ fa pensare immediatamente alle situazioni tipiche delle Scienze naturali in cui lo studio dei fenomeni si avvale di strumentazione idonea. La dizione ‘laboratorio matematico’ fa pensare, quindi, al fatto che la Matematica sia una scienza naturale, opzione che presenta Speranza, 2008, invece che una scienza sociale. Quindi, sotto sotto, ci potrebbe essere già una scelta epistemologica non esplicitata. Per accertarci se la metodologia che abbiamo scelto si possa considerare un ‘laboratorio’ abbiamo

cercato di desumerlo dalla letteratura a nostra disposizione, in particolare: Polo (2002), UMI-CIIM (2003) e Chiappini & Reggiani (2004). Con Polo (2002) abbiamo scelto la “*metodologia del laboratorio* [...] la condizione di funzionamento della pratica didattica nella quale l’insegnante è mediatore dei processi di apprendimento con interventi neutri rispetto al sapere in fase di costruzione [...] al fine di scardinare la rigidità di funzionamento della dialettica della *relazione didattica*”

e in questo siamo stati facilitati dalla presenza contemporanea di alunni di classi diverse, che si sono messi a lavorare assieme accettando, di fatto, un contratto didattico completamente diverso da quello consueto. Come proposto da UMI-CIIM (2003):

“Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici”

e nella nostra realizzazione il luogo in cui si è svolta la maggior parte dell’attività è stata un’aula scolastica, dotata del minimo: lavagna sedie e banchi.

Chiappini & Reggiani (2004) usano l’acronimo MLA (*Mathematical Laboratory Activity*), prendendolo a prestito da un lavoro precedente, Chiappini (2002), e specificano le condizioni in cui MLA è utile per l’apprendimento della Matematica. I due autori distinguono tra due differenti approcci alla conoscenza: quello percettivo-motorio e l’approccio ricostruttivo-simbolico. Il primo è aspetto peculiare delle prime fasi dello sviluppo cognitivo, inoltre è coinvolto nei processi più avanzati di apprendimento (ad esempio nelle rappresentazioni grafiche). Il secondo approccio è il modo più intelligente per apprendere. Potrebbe essere presente già all’inizio dello sviluppo cognitivo del soggetto, ma è una modalità che opera principalmente sui simboli e aiuta a ricostruire significati e rappresentazioni mentali; esso richiede padronanza delle procedure, presa in carico dei simboli e del loro significato. Entrambi gli approcci alla conoscenza sono mediati da strumenti opportuni che, secondo Vygotsky (1978), potrebbero essere di diversa natura: tecnici e psicologici.

I tre lavori citati sopra hanno però per sfondo, o indicano esplicitamente come elementi costitutivi intrinseci del laboratorio, artefatti e software adeguati. Nel nostro caso, invece, il mezzo di conoscenza è stato individuato in un concetto specifico, utilizzato a sua volta come pretesto di approccio alla conoscenza e strumento d’indagine.

Il soggetto della nostra proposta di ambiente laboratoriale è stato ‘Il finito’.

Prima di proseguire nel testo chiediamo al lettore di fare una breve riflessione su quali sono le sue conoscenze di tipo matematico di tale argomento, per poter meglio apprezzare la proposta. Ora è facile esprimere che un insieme ha 5 o 7 elementi, ma ben più difficile dire che un insieme è finito, in particolare senza fare riferimento ad oggetti/concetti matematici esterni all’insieme, come i numeri naturali, biezioni, ecc. e senza fare riferimento all’infinito.

L’argomento prescelto ha aspetti di pensiero matematico ‘avanzato’, ma appare affrontabile anche senza strumenti tecnici, vale a dire quelli che possono essere controllati a livello percettivo-motorio, giacché, ragionevolmente, noi dubitiamo che penne e libri, discussioni tra i partecipanti, enciclopedie e biblioteche possano essere considerati strumenti tecnici. Abbiamo lavorato, invece, con gli strumenti psicologici, quelli che intervengono nell’azione di formare e controllare la comunicazione tra pari, nell’approfondimento della coscienza delle procedure (Engestrom, 1987) e hanno per scopo la padronanza o il controllo esercitato da ciascuno studente sui suoi propri processi comportamentali. Questi strumenti non producono trasformazioni su oggetti concreti o virtuali, così come fanno gli strumenti tecnologici.

Secondo il paradigma di Vygotsky, il nostro approccio potrebbe essere considerato incompleto, poiché l'autore russo nota che lo sviluppo delle funzioni psicologiche più alte coinvolte in tutti i processi di comprensione e costruzione di significati, è il risultato di un'integrazione nell'attività degli strumenti tecnici e psicologici. Tuttavia abbiamo potuto osservare il processo di *internalizzazione*, così come lo definisce Vygotsky. Questo processo consiste nella ricostruzione interna di pratiche esterne. Qui 'pratica' è intesa come il ponderare questioni o la lettura di un testo matematico o entrambi.

Non condividiamo in modo completo la nozione di Laboratorio Matematico suggerita da Chiappini (2002), cioè lo studio delle trasformazioni culturali dell'insegnamento di oggetti matematici per mezzo della tecnologia o di materiali concreti proposta anche da Lesh (1981) e UMI-CIIM (2003). Nella nostra esperienza abbiamo avuto le prove della trasformazione culturale, o meglio di un miglioramento, dell'immagine della matematica negli studenti, per mezzo di matematica 'inutile'. Nella nostra opinione l'immagine della matematica dovrebbe essere uno degli scopi precipui (indiretti) dell'insegnamento, poiché non avrebbe senso aspirare a trasformare ogni studente di Scuola Secondaria in un futuro ricercatore in Matematica, ma noi vorremmo migliorare l'apprezzamento della matematica, specialmente nei giovani culturalmente e cognitivamente dotati.

Possiamo affermare che dovrebbe esserci una nozione più ampia d'ambiente laboratoriale di quanto proposto dalla letteratura citata: nel nostro caso artefatti e strumenti tecnologici erano assenti, tuttavia abbiamo osservato in ciascuno dei partecipanti il controllo dei propri processi comportamentali e le trasformazioni culturali.

Su quali argomenti far svolgere, con 'successo', un laboratorio di Matematica?

In tempi abbastanza recenti, in molte Scuole Secondarie di secondo grado sono iniziati corsi aggiuntivi, a contenuto matematico, rivolti specialmente agli studenti interessati alla prosecuzione, all'università, in corsi scientifici o d'Ingegneria. Queste attività, spesso, si esauriscono nella ripetizione-ripasso o anticipazione dell'Algebra o dell'Analisi matematica traendola dai curricula ufficiali della Scuola Secondaria. In molte sedi Scuola ed Università collaborano alla realizzazione di tali corsi, i cui risultati non sembrano molto soddisfacenti, come attesta la richiesta più recente del Ministero del nuovo approccio per mezzo del PLS.

La scelta adottata a Parma per il PLS è stata inconsueta e rischiosa, cioè quella di coinvolgere gli studenti invitandoli a riflettere e studiare un argomento che ha un ridottissima letteratura (recente), tanto dal punto di vista accademico, quanto dal punto di vista didattico: il concetto di finito.

'Il finito' è 'inutile', o più precisamente, 'non ha applicazioni' nel senso che non viene mai citato esplicitamente come concetto all'interno dei vari curricula della Scuola Secondaria; per di più non può essere usato come una sorta di palestra intellettuale (in modo diretto) per migliorare le valutazioni scolastiche sugli esercizi standard di tale tipo di scuola. E' un argomento puramente teorico che non può avvalersi delle consuete procedure di visualizzazione.

La 'inutilità' del finito permette di evitare qualunque interferenza con l'usuale insegnamento della Matematica. Questo aspetto è importante se, come nel nostro caso, gli studenti partecipanti al laboratorio provengono da classi e scuole diverse.

Abbiamo ritenuto che un primo approccio al tema avrebbe potuto essere fattibile sfruttando la normale conoscenza linguistica anche in assenza di una conoscenza matematica specifica, parafrasando un motto di Noss & Hoyles (1992): *using before knowing (usare prima di conoscere)*. Inoltre si tratta di un problema stimolante per la sua

ricchezza di aspetti epistemologici. Ci attendevamo che questa scelta sarebbe stata un buon 'cavallo di Troia': avrebbe potuto ravvivare la 'curiosità' degli studenti, fornendo una buona base per una discussione culturale mediante la quale introdurre argomenti di matematica avanzata.

Per il successo dell'attività proposta, abbiamo scommesso su questi aspetti teorici piuttosto che sulla loro applicabilità ad argomenti scolastici. E, al termine dell'esperienza, ci sembra di avere raggiunto lo scopo.

La metodologia che abbiamo adottato è simile a quella del movimento francese *Maths en Jeans*³:

“Fare ricerca in matematica, cosicché ci sia la possibilità di scoprire la matematica in modo diverso: dall'interno”.

Un connotato fondamentale che distingue la nostra proposta è che nella scelta degli argomenti non abbiamo cercato quegli aspetti di piacevolezza che sembrano importanti per il movimento francese, uno dei cui scopi è fare della “matematica rilassata, per il gusto di farla”.

Tarski (1924) è stato il nostro riferimento matematico. I tentativi di caratterizzare il finito e di esprimerlo mediante definizione sono stati in gran voga all'inizio del XX secolo, grazie a contributi di Dedekind, Russell, Whitehead, Peirce, Kuratowski, Sierpinski, Stäckel, ecc. In anni a noi più vicini l'argomento sembra attrarre solo sporadicamente l'interesse dei ricercatori matematici. L'oggetto del laboratorio, il finito, viene insegnato raramente in Italia e solo nei corsi di laurea specialistica in matematica. Per quanto ne sappiamo anche all'estero non viene trattato frequentemente. Il suo trattamento richiede conoscenze anche approfondite di teoria assiomatica degli insiemi e di Logica matematica, richiedendo così aspetti matematici avanzati.

La scarsa attenzione che la letteratura riserva al finito è una risorsa: ci è sembrato un buon punto di partenza per costringere gli studenti a lavorare coi propri mezzi mentali in prima persona, realizzando così uno specifico ambito didattico escludente il supporto di libri o Internet (Google fornisce circa 64 milioni di possibili siti web per il termine inglese *'finite'*, di fatto troppi per un controllo completo). Al contrario, nell'insegnamento pre-universitario di matematica si affronta l'infinito (nella Teoria degli Insiemi oppure in Analisi matematica), un argomento che può attrarre gli studenti principalmente per la 'risonanza' filosofica del termine 'infinito'. La letteratura, anche recente, mostra più attenzione all'infinito, ad esempio: Gilbert & Rouche (2001); AA.VV. (1992).

È utile l'inutilità? – Il paradosso della pianificazione

La proposta di attività inutile, nel senso sopra citato, va in controtendenza rispetto a quanto presentato da Ainley *et al.* (2006) in cui si presenta *the planning paradox* (il paradosso della pianificazione):

“*Il paradosso della pianificazione*: se l'insegnante pianifica attività strettamente incentrate sull'obiettivo di apprendimento, le consegne che esse propongono sono possibilmente poco gratificanti per i ragazzi, e matematicamente impoverite. Se l'insegnamento viene pianificato attorno a consegne più accattivanti l'attività dei ragazzi può essere di gran lunga più ricca, ma è possibile che sia meno focalizzata e che l'apprendimento sia più difficile da valutare” (Ainley *et al.*, 2006)

³ Indirizzo del sito web *Maths en Jeans*: <http://www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm>. In esso l'insegnante potrà trovare interessantissimi spunti per problemi non banali e attività matematiche di supporto

Ci sembra che questa situazione, per altro crediamo ben nota ad ogni insegnante, non si accordi perfettamente con la nostra attività di laboratorio e neppure con quanto propone il movimento *Math en Jeans*.

Una prima differenza è quella che nella riflessione di Ainley sembra trasparire l'attività curricolare standard, con tanto di programmi e di valutazioni. La proposta del nostro laboratorio è totalmente staccata dalla routine della lezione e non si propone l'apprendimento di parti del curriculum,

Noi abbiamo pianificato cosa fare avendo di mira un obiettivo di apprendimento strettamente focalizzato e, da quanto abbiamo visto nel modo di porgersi degli studenti durante i laboratori, ci sembra che la consegna sia stata gratificante e matematicamente più ricca di quanto ci potessimo aspettare. Non nascondiamo che non abbiamo avuto chiari protocolli di valutazione dei risultati in forma quantitativa e che il numero limitato dei partecipanti al laboratorio non permette significative valutazioni statistiche su base quantitativa.

Ainley *et al.* (2006) propongono due costrutti teorici che sembrano offrire una soluzione del paradosso della pianificazione.

“*Scopo*, nell'uso che diamo al termine, si riferisce alle percezioni del ragazzo piuttosto che ad ogni uso della matematica al di fuori del contesto classe. Definiamo una consegna idonea allo scopo una che ha un risultato significativo per il ragazzo, nei termini di un prodotto reale o virtuale, o la soluzione di un problema coinvolgente [...]

Accanto allo scopo, identifichiamo un secondo aspetto dell'apprendimento [...] che chiamiamo l'*utilità* delle idee matematiche. Con questo intendiamo che l'apprendimento della matematica racchiude non soltanto le abilità di compiere procedure, ma pure la costruzione dei significati in cui queste idee matematiche sono utili.” (Ainley *et al.*, 2006)

Seguendo queste idee, possiamo affermare che la consegna da noi individuata è stata idonea allo scopo anche se in essa non vi è posto per procedure. Inoltre l'idea matematica di (insieme) finito ha utilità solo dal punto di vista teorico e in un contesto matematico ampiamente formalizzato. Scorrendo l'elenco degli argomenti del movimento *Maths en Jeans* abbiamo avuto l'impressione che i temi prescelti siano relativi ad importanti idee matematiche, con poca o punta utilità.

“L'attenzione esclusivamente sullo scopo può produrre consegne che sono ricche e motivanti, ma ricadono nella seconda parte del paradosso della pianificazione, mancando di un 'centro' matematico” (Ainley *et al.*, 2006)

Questa affermazione è in contrasto con la nostra attività; potrebbe dipendere dalla posizione rispetto al paradosso della pianificazione illustrata sopra. Potremmo essere generalmente d'accordo con quanto proposto in quest'ultima citazione, specialmente quando si tratta della matematica di base, ma col finito potrebbe essere possibile un approccio diverso, poiché lo scopo è differente; inoltre riteniamo che ciò potrebbe accadere in molti casi in cui il pensiero matematico avanzato è coinvolto.

Possiamo concludere che la nostra attività è basata su matematica inutile (o meglio senza utilità) nel senso che il finito è un'idea matematica che non ha cittadinanza nella scuola, anche se ha utilità per scopi più avanzati, quindi non siamo in sintonia con l'affermazione

“Congetturiamo che la comprensione delle idee matematiche senza la comprensione della loro utilità porti ad un apprendimento significativamente impoverito.” (Ainley *et al.*, 2006).

LA PROGETTAZIONE DELL'ATTIVITÀ

Il nostro progetto mira a aprire la mente verso la Matematica ponendo in risalto gli aspetti culturali e metodologici della disciplina. L'attività è stata presentata alle scuole partecipanti come un laboratorio per il potenziamento degli studenti migliori, ma le direzioni scolastiche hanno preferito lasciare la partecipazione degli studenti su base volontaria. Abbiamo scelto di agire in ambito di laboratorio di matematica al di fuori dell'orario scolastico.

La nostra progettazione è stata, di fatto, in sintonia con quanto propone il movimento *Maths en Jeans*:

“Ingredienti standard: 1 matematico, 2 implementazioni e in ciascuna di esse un insegnante; circa 20 studenti che abbiano scelto di partecipare all'attività; un pacchetto di argomenti seri, ma invitanti; un anno solare di incontri settimanali (lavori di gruppo di un'ora e mezza – due ore); 4 seminari cui partecipino tutti gli aderenti; e una presentazione ‘ufficiale’ dei risultati (in un congresso + una relazione scritta). E, di conseguenza, ‘un metodo’ per regolamentare la ricerca”

La nostra esperienza è stata realizzata, nell'A.S. 2005/2006, in due Scuole di Parma: il Liceo Scientifico ‘Giacomo Ulivi’ (LS) e il Liceo Socio-Psico-Pedagogico ‘Albertina Sanvitale’ (LP).

In alcuni casi gli studenti dei due gruppi hanno lavorato assieme. Una sessione preliminare di presentazione del progetto e la sessione finale si sono tenute presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma. Nella sessione conclusiva hanno preparato e svolto una lezione agli studenti della SSIS – Indirizzo FIM.

Gli insegnanti-ricercatori Maffini e Rizza hanno operato nelle loro scuole LS e LP, rispettivamente. La terza insegnante-ricercatrice Speroni ha preso parte all'attività in veste di osservatore.

Il progetto didattico iniziale, comune a LS e LP, prevedeva i seguenti momenti:

- Analisi del termine ‘finito’ in ambito linguistico e matematico e indagine sulla presenza del termine nei manuali scolastici in uso per i vari tipi di Scuole Secondarie di secondo grado.
- Scelta di una definizione tra differenti ambiti matematici.
- Teoria degli insiemi e, in particolare, il testo di Tarski (1924), come possibile percorso per giungere ad una definizione, inserita in opportune teorie formali.

Gli studenti erano responsabili del loro apprendimento; ciascun partecipante affrontava i problemi con approcci diretti e critici. Il ruolo dell'insegnante in classe era quello di proporre problemi, stimolare la riflessione e suggerire letture in modo che potessero emergere i fondamentali epistemologici dell'argomento matematico. In certo senso, la proposta, prevede interventi neutri dell'insegnante rispetto al sapere in costruzione (Polo, 2002); inoltre è in accordo col *guidance principle* di Ven den Heuvel-Panhuizen (2000) in base al quale l'insegnante fornisce consegne che permettono di sollevare un dubbio sistematico su quanto gli studenti suppongono di sapere. Nell'attività abbiamo applicato la

“euristica per creare consegne idonee allo scopo [...]

(a) presenta un *esplicito prodotto finale* di cui gli studenti devono prendersi cura [...].

(b) Coinvolge il fatto di fare *qualcosa per un altro utilizzatore* del prodotto.

(c) Sia ben focalizzato, ma contenga ancora *opportunità perché gli studenti siano attori di decisioni significative*” (Ainley et al., 2006).

I prodotti finali delle attività sono stati: un questionario (LS) ed un gioco (LP) per altri studenti. La preparazione di questi documenti ha costituito un momento importante perché ha dato ai partecipanti all'attività l'opportunità di prendere decisioni sulla base dell'acquistata conoscenza teorica.

METODOLOGIA E ATTIVITÀ DI LABORATORIO

Maffini (LS) e Rizza (LP) hanno concordato una metodologia comune, simile a quella sperimentata e riportata in Maffini (2001). Hanno usato una varietà di approcci didattici: guida delle discussioni, presentazione di problemi, suggerimenti di lettura.

Sono stati adottati alcuni aspetti del socio-costruttivismo. La prima domanda sul significato del finito ha permesso di introdurre gli studenti in una fase di destabilizzazione delle convinzioni degli studenti sull'argomento. Una breve ricerca sui manuali di matematica per la Scuola Secondaria ha mostrato solo definizioni 'negative' quali: "un insieme è *finito* se non è *infinito*", oppure definizioni 'esterne' mediante l'uso di numeri naturali, biezioni. In alcuni libri di testo si sono incontrate pseudo-definizioni quali: "un insieme è finito se ha un numero finito di elementi" oppure "se i suoi elementi sono limitati". Una definizione 'positiva', 'interna' che usi possibilmente solo la relazione di appartenenza, non è stata trovata.

Gli studenti avevano a disposizione alcune *schede di lavoro*, contenenti una sorta di traccia della ricerca. All'inizio queste schede sono state elaborate da tutti gli autori assieme, ma appena ciascun gruppo di studenti ha preso strade diverse, i materiali sono stati prodotti individualmente da ciascun insegnante, in accordo con le attività dei gruppi da loro seguiti. La curiosità degli studenti, infatti, ha condotto i partecipanti, per strade diverse, a fare rilevanti esperienze matematiche su temi differenti.

Erano state programmate, per ogni scuola, dieci sessioni di laboratorio, ciascuna di due ore, condotte dall'insegnante della scuola con la presenza di Speroni come osservatrice.

La partecipazione degli studenti, dovuta principalmente alla loro curiosità innata, è divenuta costante: hanno frequentato 11 studenti di LS (5 di terza, 4 di quarta e 2 di quinta) e 7 di LP (5 di quarta e 2 di quinta, tutte femmine). Un'altra insegnante di LS è stata frequentemente presente come auditrice. Entrambi i gruppi erano composti di studenti con differenti valutazioni scolastiche (tra il buono e l'ottimo nel complesso delle materie, medio-alto in matematica).

Le attività di LP hanno si sono svolte, come da progetto, su 20 ore complessive, mentre gli studenti di LS hanno richiesto di prolungare l'attività tenendo 25 incontri, per un totale di 50 ore. Inoltre gli studenti del LS hanno richiesto di proseguire l'attività anche nell'A.S. 2006/2007.

Le attività di laboratorio hanno seguito un o stesso canovaccio nelle due scuole, ma le sessioni di LP hanno trattato argomenti meno approfonditi rispetto a quelli analizzati in LS. Per lo più, gli incontri degli studenti si sono svolti nelle rispettive scuole. Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma ha fornito supporto durante la presentazione del progetto (da parte di Marchini), con la biblioteca, per ricerche bibliografiche e nella presentazione finale.

Il primo passo del progetto riguardava le convinzioni degli studenti riguardo al finito. Questa fase esplorativa ha permesso di analizzare questioni quali il ruolo del contesto, i sistemi numerici, le definizioni ed i concetti ad esse collegati ed ha messo in luce alcuni argomenti ed alcuni termini che nelle successive sessioni sono divenuti gli argomenti principali: le relazioni tra finito ed infinito, tra limitato e illimitato. Durante queste

sessioni di *'brain storming'* sono apparse rilevanti le differenze tra linguaggio matematico e filosofico, risalendo indietro nel tempo ai pitagorici ed ai paradossi di Zenone.

Il passo successivo, vale a dire la ricerca di una definizione di 'finito' nei manuali scolastici, ha richiesto una riflessione critica sui termini 'definizione', 'teorema', 'assioma' e degli ambiti in cui essi acquisiscono significati. L'attenzione degli studenti si è concentrata principalmente sulla Teoria degli Insiemi e sugli ambiti numerici. Le discussioni tra i partecipanti sono state per loro di grande aiuto nell'identificazione dell'ambito insiemistico come quello più idoneo per un trattamento scientifico del concetto di finito, e successivamente hanno riconosciuto come fosse anche necessaria una opportuna formalizzazione per la trattazione di argomenti di matematica. Il raggiungimento di questa consapevolezza ha implicato un'analisi critica della Teoria assiomatica degli Insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZF), di cui sono venuti a conoscenza grazie all'insegnante, quando nei ragazzi si era già avvertita l'esigenza di una precisazione dei termini. Da tale teoria hanno preso spunto per riflessioni sulla natura ed il ruolo di un sistema formale e sulla sintassi, nel produrre ed articolare la conoscenza matematica.

La definizione di Tarski (1924) di insieme finito come un esempio (non unico) di una definizione 'positiva' ed 'interna', mediante l'uso della sola appartenenza, ha occupato l'attenzione della seconda parte del laboratorio. Questa definizione è stata fornita dall'insegnante, insieme al testo originale del pensatore polacco ed è stata analizzata mediante esempi e contro-esempi. In questa fase gli studenti di LS hanno richiesto all'insegnante le dimostrazioni di alcuni teoremi, per meglio comprendere le idee di Tarski. La parte successiva delle attività di LS è stata riservata alle definizioni di Sierpinski e di Russell, ponendo attenzione alle loro condizioni induttive.

L'attività è stata molto più complessa di quanto non si riesca esprimere qui in poche righe, soprattutto per la presenza di digressioni dall'argomento principale, proposte dagli studenti, sotto lo stimolo della loro curiosità per altri temi matematici non previsti dai programmi, ma di cui avevano letto o sentito parlare nella fase di ricerca, su Topologia, Analisi, Geometrie finite e non euclidee.

Gli studenti di LS hanno proposto un questionario sul concetto di finito, mettendo il luce, con le loro domande, aspetti problematici del tema. Alla fine, una prima versione del questionario è stata sottoposta ad un campione di studenti ed insegnanti, per poter scegliere l'insieme più appropriato di quesiti. Un esempio delle domande della versione finale (Ottobre 2006) è il seguente:

- “19 – Barra le caselle relative agli insiemi finiti tra quelli del seguente elenco: 1. l'insieme delle cifre di un numero razionale; 2. l'insieme delle cifre di un decimale periodico; 3. l'insieme delle soluzioni di un sistema indeterminato; 4. l'insieme delle soluzioni di un'equazione; 5. l'insieme dei numeri razionali compresi tra 0 e 2.”

Le studentesse di LP, hanno creato un gioco di carte per studenti della Scuola Secondaria di secondo grado: 'Il tunnel del Finito'. In esso i giocatori devono formulare degli enunciati veri utilizzando termini matematici differenti scelti a caso gettando un dado, da un mazzo di 37 carte, tenendo altresì conto di uno schema precedente di 37 domande come quella seguente:

“Si assuma la seguente definizione: un insieme A è un *elemento irriducibile* di una classe K di insiemi se:

- 1) A appartiene a K ; 2) nessun sottinsieme proprio di A appartiene a K .

Dato ora $K = \{\{\heartsuit\}, \{\square, O\}, \{\star, \heartsuit\}, \{O, \square, -\}, \{\star, \square, \triangle\}\}$, trovare eventuali elementi irriducibili di K .”

RISULTATI DELL'ATTIVITÀ

Risultati quantitativi

Il coordinamento nazionale del PLS per la matematica ha preparato un questionario anonimo da somministrare a tutti gli studenti coinvolti nelle attività realizzate nell'A.S. 2005/2006, allo scopo di valutare le attività stesse. Presentiamo le risposte degli studenti partecipanti ai laboratori (in grassetto le risposte degli studenti di LP, in corsivo quelle degli studenti di LS)

“Nell'insegnamento della matematica prestereste attenzione maggiore a (massimo tre risposte): aspetti pratici e sperimentali (**5, 1**); aspetti formali (*8*); inquadramento storico (**2, 7**); fondamenti (**5,2**); relazioni con altri rami della conoscenza e alle applicazioni tecnologiche (**6,4**); implicazioni nella vita quotidiana (**3,1**).

In genere passate un po' del vostro tempo libero ad imparare della matematica? Si (**5,6**); No (**1,5**).”

| | scarso | insufficiente | sufficiente | buono |
|--|-------------|---------------|-------------|--------------|
| Quanto era il vostro interesse per l'argomento? | | 1 | <i>6</i> | 6, 5 |
| Come erano le vostre conoscenze scolastiche precedenti? | 2 | 3, 1 | <i>2, 7</i> | <i>3</i> |
| Come valutate l'attività al fine di capire cosa sia la matematica? | | | 4, 3 | 3, 7 |
| Come valutate le attività per la scelta dei vostri studi successivi? | 1, 1 | 1, 1 | 1, 5 | 4, 4 |
| L'attività è stata rilevante? | | | 1, 1 | 6, 10 |

| Durante l'attività ci sono state : | occasionale | frequente |
|---|--------------|--------------|
| spiegazioni teoriche date dall'insegnante | 3, 2 | 4, 9 |
| dimostrazioni date dall'insegnante | 5, 10 | 2, 1 |
| attività personali o di gruppo | 6 | 1, 11 |

Altri risultati oggettivi sono stati il tempo extra richiesto per le sessioni, i rapporti scritti degli studenti ed i loro 'prodotti di ricerca', cioè il gioco ed il questionario.

Risultati qualitativi. Partecipazione degli studenti e cambio di atteggiamento verso la matematica. Linguaggio e miglioramento del pensiero critico.

L'attiva partecipazione al laboratorio ha confermato l'interesse per l'attività, che, in qualche modo, ha soddisfatto le aspettative matematiche dei giovani partecipanti. L'ambiente di laboratorio ha permesso a tutti gli studenti, anche ai più timidi, di condividere frequentemente le loro idee e di contribuire in modo adeguato alle discussioni con gli altri partecipanti.

Un altro risultato positivo è stato il cambiamento di atteggiamento nei riguardi della matematica e la curiosità sia per argomenti di matematica avanzata che di speculazione filosofica. Un argomento apparentemente 'innocuo' quale il concetto di finito è stato opportuno per presentare aspetti essenziali della conoscenza matematica, divenendo uno

stimolo per il pensiero critico a riguardo degli aspetti epistemologici. I pochi riferimenti bibliografici, non sempre appropriati, hanno comunque contribuito a definire un percorso di ricerca proprio grazie alle stesse incertezze che provocavano negli studenti. Abbiamo inoltre rilevato un graduale, ma significativo affinamento sia del livello linguistico, sia dell'atteggiamento generale che potremmo definire 'il divenire fiduciosi nell'incertezza'. Gli studenti hanno sviluppato una buona padronanza della profondità dei problemi soggiacenti alla fondazione dei concetti matematici; allo stesso tempo hanno apprezzato che l'incertezza nell'approccio alla matematica (che spesso nella pratica didattica è erroneamente mostrata come la scienza della certezza) può essere considerata una risorsa piuttosto che un ostacolo. La certezza che le cose possono essere come non sembrano è divenuta motivo per un'indagine speculativa, con lo scopo di ottenere una costruzione coerente della conoscenza. Gli studenti sono diventati progressivamente consci dei problemi inerenti al trattamento di un concetto, dal punto di vista matematico.

Per quanto riguarda il miglioramento del linguaggio matematico, il questionario e il gioco, per la loro formulazione, hanno costretto gli studenti ad usare termini e regole rigorose. Gli esempi mostrati di una domanda del questionario degli studenti di LS, e della domanda su una carta del gioco, delle studentesse di LP, evidenziano l'adeguatezza del linguaggio raggiunta al termine del laboratorio. Ulteriore riprova si può ricavare dai commenti, una vera analisi a priori, degli studenti di LS relativi alla domanda 19 del questionario:

“ La questione ha lo scopo di verificare non solo di come sono considerati gli insiemi elencati nella domanda, ma anche le convinzioni connesse con questi insiemi. Da questo punto di vista alcune delle proposte sono 'distrattori' [come spiegato in seguito]. Noi non consideriamo alcun caso 'limite' cioè insiemi finiti difficili da riconoscere (ad esempio l'insieme delle cellule viventi di un corpo umano, o l'insieme degli atomi dell'Universo, ecc.) Anche se sarebbe possibile considerare questi casi, preferiamo porre attenzione maggiormente sugli aspetti linguistici, piuttosto che su insiemi particolari.

Pertanto con le prime due questioni vogliamo valutare se un insieme di cifre (che non può avere più di dieci elementi) può essere confuso con la successione delle cifre nella rappresentazione decimale di un numero irrazionale; cioè se sono prevalenti l'aspetto morfologico (il modo in cui un numero è scritto) e la presenza di una successione infinita.

Le proposte 3 e 4 sono distrattori. La nostra questione sui sistemi indeterminati non richiede, nella risposta, la precisazione di cosa sia un simile tipo di sistema, e neppure in quale campo numerico debba essere risolto. Lo stesso per l'insieme delle soluzioni di un'equazione in quanto non è indicato che tipo di equazione potrebbe essere. Una risposta positiva a queste due equazioni potrebbe essere il risultato di una prevalenza delle equazioni algebriche (differenti dalle identità algebriche).

La proposta 5, che riguarda i numeri razionali, è connesso col concetto di densità; è propedeutica alla domanda 21.

La densità (per gli insiemi numerici) è un concetto che usa la relazione d'ordine (in questo caso l'ordine nei numeri razionali); questo concetto potrebbe essere sconosciuta. Vogliamo investigare se gli studenti sono consci della densità.”

Ricadute in classe

In entrambi i laboratori, LP e LS, gli studenti hanno realizzato un cambiamento di atteggiamento nei confronti della loro esperienza quotidiana in classe: essi hanno testimoniato un uso più opportuno ed un'attenzione migliorata al linguaggio scientifico richiesto nella matematica scolastica. Alcuni insegnanti di LS, colleghi dell'insegnante-ricercatore Maffini hanno confermato, spontaneamente, che l'attività di laboratorio ha avuto un buon effetto nelle loro classi, in quanto gli studenti partecipanti al progetto hanno incrementato i loro voti ed hanno interagito coi loro compagni di classe, riferendo loro l'esperienza vissuta in laboratorio e i risultati conseguiti. La migliore immagine della matematica per i partecipanti al laboratorio è evidente nell'affermazione di uno studente: "il mio mondo è cambiato!".

BIBLIOGRAFIA

- AA.VV., 1992, *Histoire d'infini*, Actes du 9^{ème} Colloque Inter-Irem, Irem de Brest.
- Ainley, J. & Pratt, D. & Hansen, A., 2006, 'Connecting engagement and focus in pedagogic task', *British Educational Research Journal*, Vol. 32, 23 – 38.
- Antinucci, F., 2001, *La scuola si è rotta*, Laterza, Bari.
- Bloch, I., 2005, 'Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie', *Petit x*, n. 69, 7 – 30.
- Chiappini, G.P., 2002, 'Laboratorio di matematica e tecnologia', in Anichini, G. (Ed.), *Atti XXII Convegno UMI-CIIM, Ischia (Na)*, Suppl. Notiziario U.M.I., Novembre 2002, 53 – 63.
- Chiappini, G.P. & Reggiani, M.: 2004, 'Toward a didactic practice based on mathematics Laboratory activities', *Cerme 4 Proceedings*.
- Engestrom, Y., 1987, *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki.
- Gilbert, T. & Rouche, N., 2001, *La notion d'infini. L'infini mathématique entre raison et mystère*, Ellipse, Paris. (*L'infinito matematico tra mistero e ragione*, edizione italiana a cura di S. Gregori, L. Grugnetti, C. Marchini, A. Rizza, Pitagora Editrice Bologna, 2004).
- Jensen, J.H. & Niss, M. & Wedege, T. (eds.), 1998, *Justification and enrolment problems in education involving mathematics or physics*, Frederiksberg: Roskilde University Press.
- Lesh, R., 1981, 'Applied mathematical problem solving', *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235 – 264.
- Maffini, A., 2001, 'Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore', in Anichini, G. (Ed.), *Atti XXI Convegno UMI-CIIM, Salsomaggiore (Pr)*, Suppl. Notiziario U.M.I., Ottobre 2001, 90 – 104.
- Noss, R. & Hoyles, C., 1992 'Looking back and looking forward', in Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.), *Learning mathematics and Logo*, MIT, Boston, MA.
- Polo, M., 2002, 'Verso un modello di analisi della *pratica didattica*: il caso di un percorso di insegnamento/apprendimento su contenuti di geometria nella scuola elementare', in Malara, N.M. & Marchini, C. & Navarra, G. & Tortora, R. (Eds.) *Processi innovativi per la matematica dlla scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna.
- Speranza, F., 2008, *Appunti di matematiche complementari*, in stampa.
- Tarski, A., 1924, 'Sur les ensembles finis', *Fundamenta Mathematicae*, 6, 45 – 95.
- UMI-CIIM, 2003, 'Ciclo secondario: la matematica del cittadino (seconda parte)', *L'educazione Matematica*, 2, 38 – 49.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., 2000, *Mathematics education in the Netherlands: a guided tour* (Freudenthal Institute CD ROM for ICME 9) Utrecht University, Utrecht.
Vygotsky, L.S., 1978, *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press, Cambridge, MA.