UN PROBLEMA DI EQUIESTENSIONE COME OCCASIONE DI CONFRONTO FRA AMBIENTI DIVERSI

Achille Maffini - Angela Rizza [1]

1. Introduzione

Diversi recenti studi (ad esempio Boero (1995), Furinghetti (1997)) sottolineano la valenza formativa dell'attività dimostrativa in ambito geometrico. Dopo un periodo che ha visto la progressiva esclusione della geometria sintetica dai curricoli della scuola superiore, a vantaggio di quella analitica, si assiste ora ad una ripresa di tale insegnamento, inteso non solo come ripetizione di teoremi dimostrati dall'insegnante ma anche come costruzione autonoma da parte degli allievi di enunciati e dimostrazioni. Tale tendenza è stata favorita anche dal diffondersi di software come Cabri-Géomètre (nel seguito CG) che permettono agli studenti di gestire direttamente l'esplorazione dinamica di situazioni geometriche (Laborde (2000), D'Ignazio, Suppa (2001), Olivero, Paola, Robutti (2001)). Ci sembra che questi strumenti possano contribuire a restituire alla geometria il suo ruolo di primaria importanza nella formazione matematica e a rivalutarne in particolare l'aspetto costruttivo, mediante la proposta di problemi in cui l'esistenza di una soluzione sia dimostrata attraverso la sua effettiva costruzione.

In questo articolo un problema di equiestensione diventa lo spunto per mostrare alcune differenze fra le costruzioni con riga e compasso (che nel seguito indicheremo brevemente con RC) e le costruzioni possibili in Cabri (che chiameremo CG). Lo scopo che ci proponiamo è quello di far emergere le diversità fra i due ambienti, ma anche di mostrare come essi possano interagire nella "costruzione" della soluzione di un problema.

---

[1] Achille Maffini - Liceo Scientifico G. Falcone – Asola (MN)
Angela Rizza - Istituto Magistrale A. Sanvitale - Parma
Entrambi gli autori fanno parte dell'Unità Locale di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma

L'articolo si conclude con la dimostrazione di una proprietà e una osservazione sulla definizione di trapezio: si possono vedere come approfondimenti scaturiti da riflessioni sul problema iniziale, e questo evidenzia come alcune situazioni possano essere viste come "pretesto" per arrivare ad esplorare contesti più complessi o che richiedono approfondimenti sugli oggetti matematici coinvolti.

2. Gli ambienti RC e CG

Non è superfluo osservare che la geometria euclidea "classica" è LA geometria RC[2] e che molti problemi nati in questo ambiente sono stati alla base di sviluppi successivi di importanti settori della matematica. A questo aspetto storico-epistemologico ne va aggiunto sicuramente un altro legato più alla valenza formativa di questo tipo di geometria: in un momento in cui il dibattito su cosa sia la matematica è quanto mai attuale e si rivede con occhio pesantemente critico la matematica sintattico-strutturale del bourbakismo, riprendere metodi che riscoprono la valenza semantica del "fare" in matematica, ci sembra possa andare incontro alle esigenze attuali. Forse può sembrare paradossale che questo si realizzi attraverso la geometria euclidea, che rappresenta la forma di matematica più "datata" (ma forse per questo anche più legata al nostro bagaglio culturale); in questo senso allora CG può costituire un valido ponte tra la tradizione e le possibilità tecnologiche attuali. In CG sono possibili costruzioni non realizzabili con riga e compasso, come la trisezione di un angolo o la costruzione di poligoni regolari con ad esempio 7, 11, 13 lati[3] e questo rende apparentemente tale ambiente "più ricco" rispetto a RC. Questa ricchezza però è garantita da uno strumento informatico che fa perdere di vista all'utilizzatore le logiche seguite da chi l'ha prodotto. Chiarita,

---

[2] "Sembra sia stato Platone a chiedere che i problemi si dovessero risolvere facendo uso solo di una *riga* e di un *compasso*. In linea di massima si può vedere in queste limitazioni un'aspirazione estetica……; più precisamente l'appello alla riga e al compasso significa utilizzare solo 'linee elementari', le rette e le circonferenze" Speranza (1996)

[3] Si ricorda che i poligoni regolari aventi un numero p di lati (con p numero primo) che si possono costruire con riga e compasso sono quelli e solo quelli per cui

p= $(2)^{2^k}+1$, con $k \in N$

anche con gli studenti, questa fondamentale differenza, può comunque risultare interessante valutare la possibilità di una soluzione "più debole" in ambiente CG di un problema non risolubile in ambito RC. In questo caso il software informatico diventa un nuovo contesto in cui ha senso porsi e risolvere problemi particolari, contesto per gli studenti più suggestivo e più vicino alla loro realtà. Inoltre la relativa richiesta di abilità manuali permette di dedicare una maggiore attenzione alle problematiche proposte. In sostanza rispetto a RC l'alunno perde il controllo degli strumenti utilizzati, ma, si spera, dovrebbe controllare di più gli oggetti su cui lavora. I due ambienti diventano in questo senso quasi complementari l'uno all'altro e per questo può essere opportuno, nella prassi didattica, affiancarli.

3. Un problema e la sua soluzione RC

Consideriamo il seguente
Problema 1
<u>costruire un triangolo equilatero equiesteso ad un triangolo assegnato</u>
e chiediamoci se esso ammette una soluzione RC.

L'*esistenza* di una soluzione è supportata da considerazioni algebriche; infatti, indicata con A l'area del triangolo assegnato, la misura del lato del triangolo equilatero è la soluzione positiva dell'equazione (1):

$$(1) \qquad \frac{1}{4}\sqrt{3}\,x^2 = A$$

Tuttavia, com'è noto, trovare la misura di un segmento che risolve un problema e *costruire* con riga e compasso quel segmento sono questioni diverse e possibilità della prima non comporta automaticamente la soluzione della seconda.[4]
Per dimostrare la risolubilità RC del problema 1, consideriamo un problema più generale:

---

[4] I segmenti che si possono costruire con riga e compasso e che risolvono i relativi problemi geometrici sono quelli le cui misure sono espresse, rispetto ad un'unità di misura fissata, con un numero finito di operazioni razionali e di radici quadrate.

Problema 2

<u>costruire un triangolo isoscele avente un angolo congruente a quello di un triangolo assegnato e a questi equiesteso</u>

Se ABC è il triangolo assegnato, si tratta di determinare i segmenti[5] congruenti [BD] e [EB] in modo che il triangolo isoscele BDE risulti equiesteso ad ABC. (figura 1)

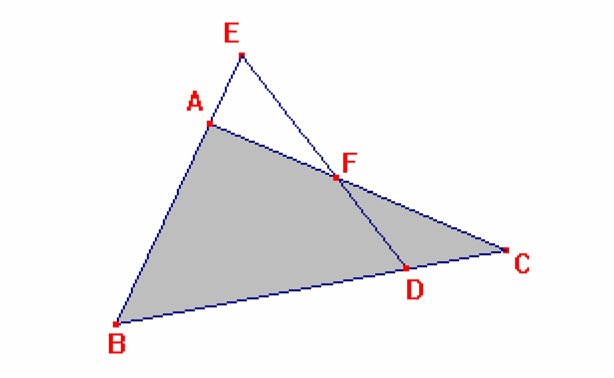


figura 1

Tali segmenti, di misura "intermedia" fra quelle di [AB] e [BC], devono essere scelti in modo che il segmento [ED] individui i triangoli DCF e AFE equiestesi. Questo si verifica quando la lunghezza comune dei segmenti [BD] e [EB] risulta media proporzionale fra quelle dei due segmenti [AB] e [BC].
Infatti, le aree dei triangoli sono uguali se e solo se (figura 2) le basi sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze, cioè:

|BC|:|BD|=|EK|:|AH|.

---

[5] nel seguito verranno utilizzate le seguenti "scritture":
AB: indica la retta individuata dai punti A e B
[AB]: indica il segmento chiuso (non orientato) di estremi A e B
|AB|: indica la lunghezza di [AB]
Gli angoli invece si indicheranno con $A\hat{B}C$ di cui B rappresenta il vertice mentre i triangoli verranno indicati semplicemente con ABC.

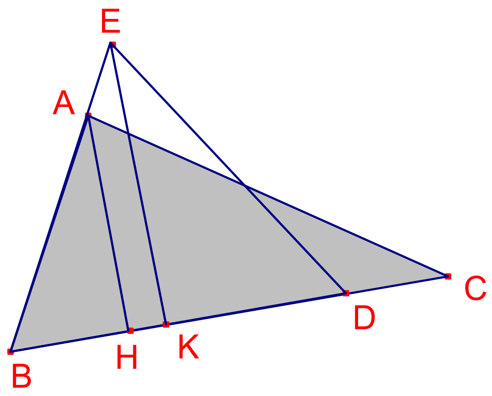


figura 2

Poiché i triangoli BAH e BEK sono simili, vale la proporzione:

$$|EK|:|AH|=|BE|:|AB|$$

Se [BD]≅[BE] , si ha: $|BC|:|BD|=|BD|:|AB|$,

cioè la lunghezza del segmento [BD] è media proporzionale fra quelle dei due segmenti [AB] e [BC].

Il problema 2 ha dunque una soluzione RC, in quanto la costruzione del segmento di lunghezza media proporzionale fra le lunghezze di due segmenti dati, è nota (è riportata, in due diverse varianti, nell'appendice 1).

In questo caso l'uso di Cabri non è essenziale ai fini dell'effettiva costruzione del triangolo richiesto, tuttavia tale strumento può essere utilmente affiancato all'ambiente "carta e matita" per rendere la risoluzione più veloce, favorendo la produzione di congetture e la scelta fra di esse di quella corretta.

Anche il problema 1 è risolubile in ambiente RC, attraverso i due passaggi seguenti:

1) Trasformazione del triangolo dato in un triangolo ad esso equiesteso, con un angolo di misura $\frac{\pi}{3}$;

2) Trasformazione del nuovo triangolo in un triangolo equilatero, avente come lato un segmento di lunghezza media proporzionale fra quelle dei due lati che comprendono l'angolo di $\frac{\pi}{3}$.

Per quanto riguarda il punto 1), il triangolo dato ABC viene trasformato in un triangolo A'BC equiesteso e con un angolo di $\frac{\pi}{3}$ ricalcando la nota costruzione del triangolo equilatero di lato assegnato (figura 3).

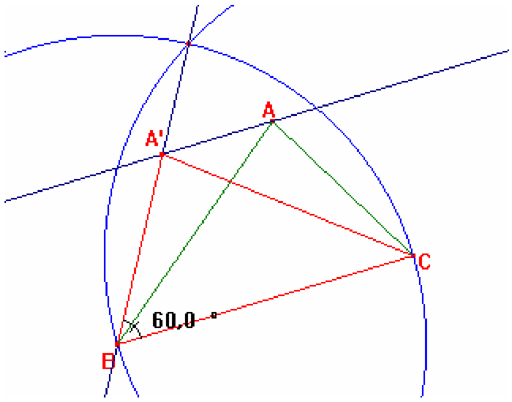


figura 3

Per il punto 2), utilizzando quando visto per il Problema 2, si costruisce il segmento di lunghezza media proporzionale fra i segmenti di lunghezza |A'B| e |BC|, che costituisce il lato del triangolo equilatero BDE equiesteso ad A'BC.

4. Una generalizzazione del problema e la sua soluzione CG

Una possibile generalizzazione della situazione descritta nel paragrafo precedente è rappresentata dal seguente:

Problema 3

<u>costruire un poligono regolare di n lati</u>
<u>equiesteso ad un triangolo assegnato</u>

Da un punto di vista teorico la soluzione consiste nel dividere il triangolo dato in n triangoli equiestesi (per fare questo basterà dividere un lato del triangolo in n segmenti congruenti) e trasformare ciascuno

di essi in un triangolo isoscele equiesteso con l'angolo al vertice avente misura 2π/n, servendosi della costruzione precedente del medio proporzionale. La costruzione garantisce che tali triangoli sono tutti tra loro congruenti in quanto il rapporto tra la lunghezza della base (prendendo come base il segmento ottenuto dalla suddivisione precedente) e quella dell'altezza relativa è costante. Con gli n triangoli isosceli ottenuti si ricompone il poligono regolare.
Ma tale costruzione è realizzabile con riga e compasso?
Il punto delicato è la trasformazione di un triangolo in un triangolo equiesteso avente un angolo di ampiezza 2π/n. Tale costruzione si può ottenere con riga e compasso solo per alcuni valori di n, corrispondenti ai poligoni regolari costruibili in tal modo. Si tratta in ogni caso, ad eccezione di pochi valori di n (come ad esempio n=3, n=4 o n=6), di costruzioni non banali.
La costruzione è invece possibile nell'ambiente CG, nel quale un apposito comando permette la costruzione di poligoni regolari per ogni valore di n minore o uguale a 30.
Riportiamo un esempio di costruzione con n=7.
Il primo passo consiste nella suddivisione di un lato del triangolo in 7 segmenti congruenti, mediante la nota costruzione basata sul teorema di Talete (figura 4).

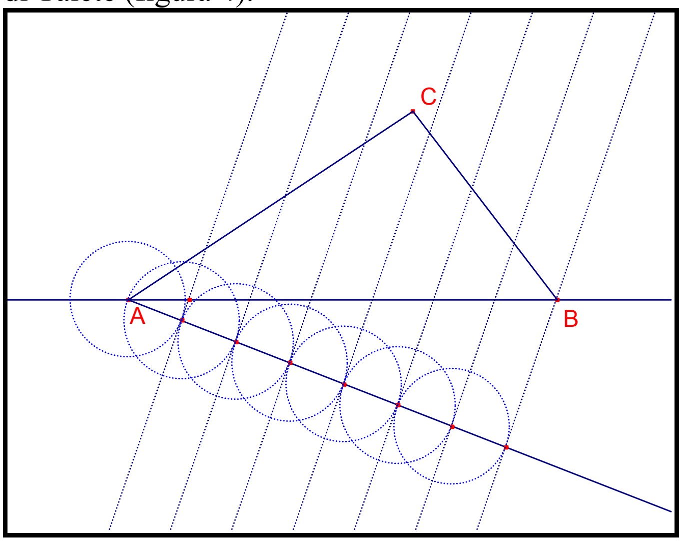


figura 4

Successivamente si costruisce un ettagono regolare con centro nel vertice A e avente un vertice su [AB], si traccia la retta passante per A e il vertice consecutivo al vertice su [AB] posto nel semipiano individuato da AB contenente C e si considera il punto di intersezione di tale retta con la parallela ad AB passante per C (G nella figura 5). Tale costruzione permette di ottenere il triangolo ADG, equiesteso a ADC e con l'angolo GAD di ampiezza $2\pi/7$.

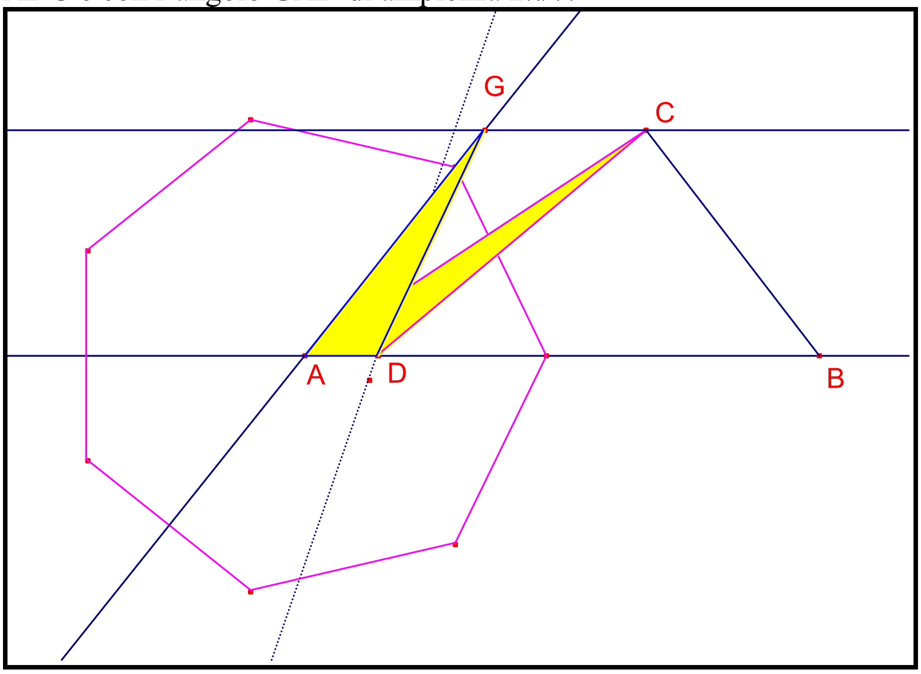


figura 5

Quindi, con una delle costruzioni riportate in appendice, si costruisce il segmento di lunghezza media proporzionale tra quelle di [AG] e [AD] e il triangolo ANM equiesteso a ADC (figura 6).

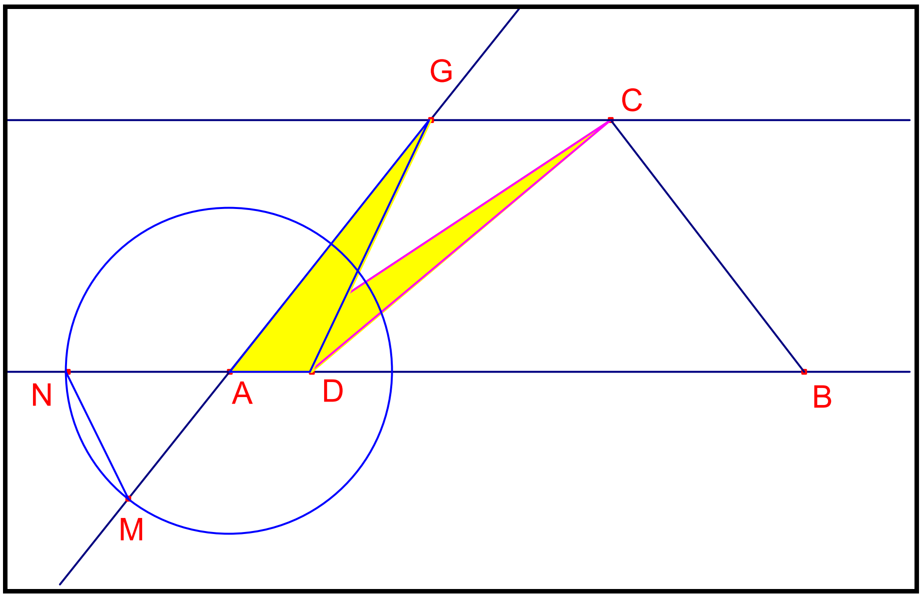


figura 6

Infine, applicando opportune simmetrie assiali, si ottiene tutto il poligono; nella figura 7 è riportato il risultato finale:

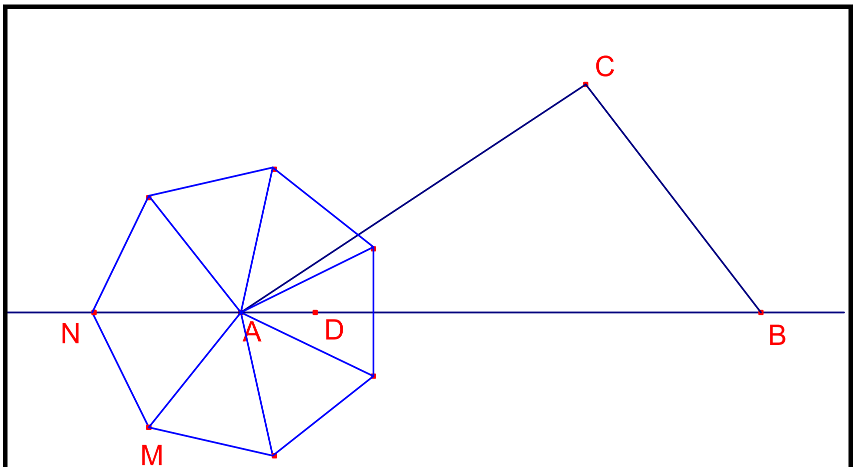


figura 7

Nonostante le analogie nell'enunciato dei due problemi, le soluzioni dei problemi 1 e 3 presentano caratteristiche estremamente diverse. Nella prima, Cabri veniva utilizzato "per comodità", per realizzare una costruzione RC in modo più veloce e preciso, mentre nella seconda ha assunto un ruolo decisivo al punto che si può parlare di una vera e propria costruzione CG con sue caratteristiche e proprietà particolari. Ad esempio in tale costruzione, la misura degli angoli riveste un ruolo importante, anche se implicito, perché su di essa si basa la costruzione dell'ettagono regolare fornita dall'apposito strumento di Cabri.
E' in ogni caso opportuno osservare che anche Cabri non risolve *tutti* i problemi di questo tipo in quanto nella costruzione del poligono regolare occorre fare i conti con i limiti intrinseci del programma.

5. Da un problema a un teorema
L'esplorazione della situazione descritta nel paragrafo 3 conduce ad interessanti sviluppi che permettono di collegare in modo piuttosto generale proprietà apparentemente lontane come quelle legate al parallelismo, alla proporzionalità e alla equiestensione.
Tornando alla situazione descritta nella figura 2, si costruiscano i due triangoli isosceli CBI e HBA. (figura 8)

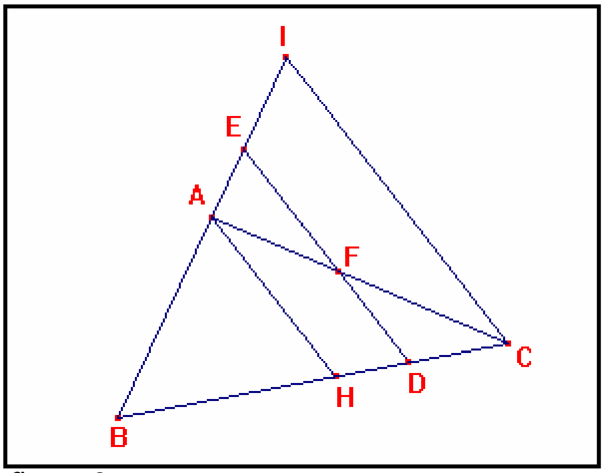


figura 8

Il problema di tracciare il segmento [ED] parallelo ad [AH] e [IC] in modo che sia verificata l'equiestensione richiesta dei triangoli ABC e BDE, può essere riferito al trapezio isoscele AHCI e posto in questi termini: come deve essere tracciata una corda parallela alle basi affinché individui con i lati obliqui e una diagonale due triangoli equiestesi (nella figura 6, i triangoli AFE e FDC)?
La risposta alla questione precedente costituisce un risultato, valido per tutti i trapezi, che può essere sintetizzato nel seguente:

Teorema
Dato un trapezio ABCD di basi [AB] e [CD] (supponiamo |AB|>|CD|), sia [HK] una corda parallela alle basi (figura 9). Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) |HK| è medio proporzionale tra |AB| e |CD|;
2) Le rette DK e BH sono parallele;
3) I triangoli DLH e LKB sono equiestesi.

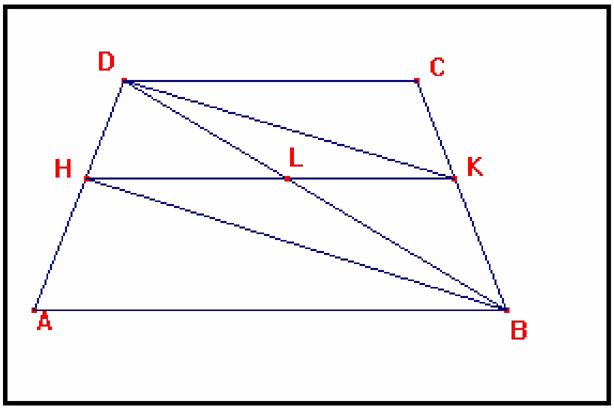


figura 9

Dimostrazione
L'equivalenza tra (2) e (3) è immediata:
se DK//BH, i due triangoli DLH e BLK sono equiestesi per un noto risultato relativo ai triangoli individuati dalle diagonali di un trapezio; viceversa se i triangoli DLH e BLK sono equiestesi ne consegue che

BDH e BKH sono equiestesi per cui, avendo un lato comune ([BH]) hanno la stessa altezza e quindi DK//BH.
Dimostriamo che (1) è equivalente a (2):
(2)⇒(1)
Sia DK//BH; essendo $C\hat{D}K \cong D\hat{K}H$ e $D\hat{K}H \cong K\hat{H}B$, si ha che $C\hat{D}K \cong K\hat{H}B$ e poiché $D\hat{K}C \cong K\hat{B}H$ e $D\hat{C}K \cong B\hat{K}H$, i triangoli DCK e HKB sono simili, per cui |HK|:|DC|=|KB|:|CK|
Analogamente sono simili i triangoli AHB e HDK, per cui |AB|:|HK|=|AH|:|HD|.
Poiché |AH|:|HD|=|KB|:|CK| (teorema di Talete), |HK|:|DC|=|AB|:|HK| e quindi |HK| è medio proporzionale tra le lunghezze delle due basi del trapezio.
(1)⇒(2)
Sia |HK| medio proporzionale tra |AB| e |CD|.
Prolungando AD e CB, sia O il punto di intersezione (figura 10):

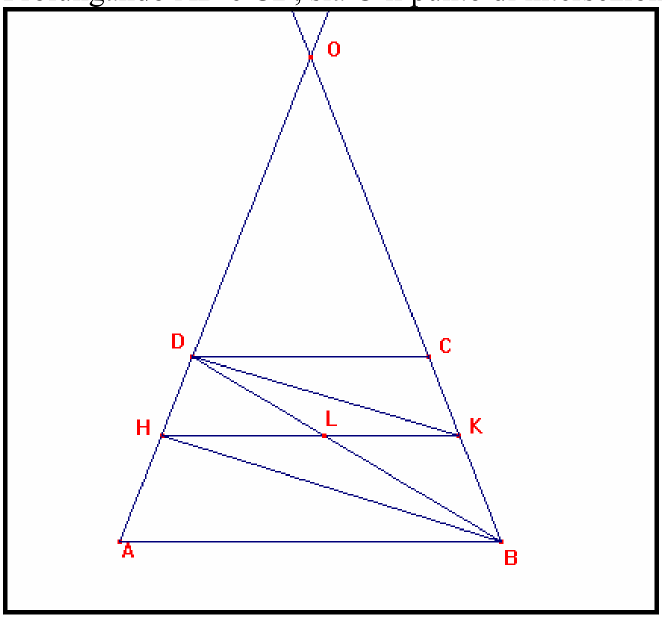


figura 10

Dalla similitudine dei triangoli DOC, HOK, AOB si ha:
|HK|:|DC|=|HO|:|DO|

|AB|:|HK|=|BO|:|KO|
Essendo per ipotesi |AB|:|HK|=|HK|:|DC| si ha che |BO|:|KO|=|HO|:|DO| e quindi i due triangoli BHO e KDO sono simili da cui BH//KD.

6. Da un teorema a una definizione

Il precedente teorema ci conduce ad una riflessione sulla definizione di trapezio. Tale definizione non è presentata in modo univoco dai vari libri di testo; potremmo anzi dire che più o meno si equivalgono coloro che lo definiscono come un quadrilatero con due lati paralleli e coloro che lo definiscono come un quadrilatero con *solo* due lati paralleli. Nel primo caso, ovviamente, i parallelogrammi risultano essere un caso particolare di trapezio. Dal punto di vista didattico è sempre opportuno far notare queste differenze, ricordando nel contempo che ogni definizione stabilisce in modo implicito le proprietà dell'ente definito: la scelta risulta quindi funzionale alle proprietà che si vogliono mettere in evidenza.
Nel caso del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, la definizione di trapezio sottintesa è quella in cui *solo* due lati devono essere paralleli. Si può, a questo proposito, sottolineare che utilizzando l'altra definizione il teorema non vale, in quanto non si può dimostrare per i parallelogrammi[6]. Si tratta di un ulteriore esempio per giustificare una scelta piuttosto che un'altra.

9. Conclusioni

L'interesse delle questioni qui proposte sta, a nostro parere, più che nella ricerca di una soluzione di alcuni problemi particolari, negli spunti offerti dalla situazione, che consentono di porsi sempre nuovi problemi più complessi e generali, in un atteggiamento di curiosità e di ricerca che è tipico dell'attività matematica e che purtroppo spesso resta estraneo alla esperienza scolastica degli studenti. Esiste una soluzione? Esistono altre proprietà geometriche collegabili alla soluzione? Esistono soluzioni di problemi più generali? Possono

[6] Infatti ogni corda parallela a due lati avrebbe avuto lunghezza media proporzionale tra le lunghezze dei lati, ma solo con la corda congiungente i punti medi dei lati opposti si avrebbe l'equivalenza con i punti (2) e (3).

essere costruite con riga e compasso? E con CG? Queste questioni di esistenza e di “costruttibilità” dovrebbero emergere in modo piuttosto spontaneo a partire dal problema in esame, eventualmente con la mediazione dell’insegnante, ed innescare un processo di esplorazione nel quale gli studenti si possano sentire attivamente coinvolti.
Un’ultima considerazione: la matematica che viene proposta negli usuali corsi della scuola media superiore è spesso non costruttiva, anche se questo aspetto non è quasi mai rilevato. La geometria con riga e compasso è un bell’esempio di matematica costruttiva: l’ente di cui si predica l’esistenza è tale se ne è possibile la costruzione. Questo può essere un limite (anzi lo è sicuramente), ma permette di dare, in un certo senso, una nozione “intuitiva” di esistenza, ricollegandosi così direttamente alla tradizione euclidea. Non dimentichiamo infatti che una delle prime preoccupazioni che si pone Euclide è di dimostrare che gli enti di cui parlerà esistono, dove il concetto di esistenza è espresso proprio dalla costruttibilità con riga e compasso. In quest’ottica quindi attività come questa diventano una occasione non solo per “fare geometria” ma anche per porre problemi di più ampia portata come quelli legati al concetto di esistenza e realtà degli oggetti matematici.

Bibliografia

Boero P. (1995) A proposito di intuizione e rigore nell’insegnamento-apprendimento della geometria: il problema dell’approccio agli enunciati e alle dimostrazioni, in Micale B., Pluchino S. (a cura di) *Atti del XVII Convegno U.M.I. L’insegnamento della Geometria: temi di attualità*, Edizioni U.M.I, Bologna, 95-110

D’Ignazio I., Suppa E. (2001) *Il problema geometrico. Dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramo

Furinghetti F. (1997) Insegnamento-apprendimento della geometria nella scuola secondaria superiore. Riflessioni su strumenti e prescrizioni a disposizione degli insegnanti, in MPI-UMI, *L’insegnamento della geometria. Seminario di formazione per Docenti Scuole Medie Superiori*, Matteoni, Lucca, 15-69

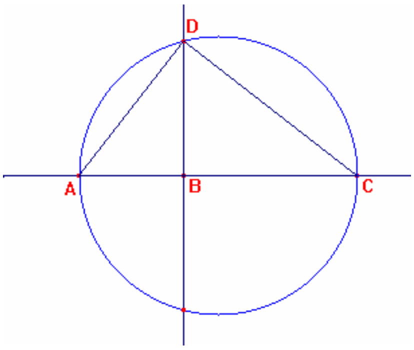
Laborde, C. (2000) Insegnare la geometria nel 2000 con Cabri Géomètre: quali cambiamenti per insegnanti e allievi? in Centro

Didattico Cantonale (ed.) *Bollettino dei docenti di matematica*, 41, 71-85
Olivero F., Paola D., Robutti O. (2001) Avvio al pensiero teorico in un ambiente di geometria dinamica, L'educazione Matematica, 3, 127-148
Speranza F. (1996) Aspetti epistemologici e storici della geometria, in in MPI-UMI, *L'insegnamento della geometria. Seminario di formazione per Docenti Istruzione Secondaria di Primo Grado*, Matteoni, Lucca, 147-179

Appendice

Costruzione del segmento di lunghezza media proporzionale fra quelle di due segmenti dati.

Costruzione n.1 (metodo utilizzato: Secondo Teorema di Euclide)



Si vuole ottenere un segmento di lunghezza media proporzionale fra |AB| e |BC|. Tracciata la circonferenza di diametro [AC] e la perpendicolare in B al diametro, si indichi con D uno dei punti di intersezione di tale retta con la circonferenza. La lunghezza del segmento [BD] risulta, per il secondo teorema di Euclide, media proporzionale fra |AB| e |BC|.

Costruzione n.2 (metodo utilizzato: Teorema della secante e della tangente)

Si vuole costruire un segmento di lunghezza media proporzionale fra |AB| e |AC|. Tracciata la circonferenza di diametro [BC] ed indicato con O il suo centro, si costruisca una seconda circonferenza di diametro [AO]. Indicato con D uno dei punti di intersezione fra le due circonferenze, il segmento [AD], per il teorema della secante e della tangente, è il segmento richiesto. .