RELAZIONE SU ATTIVITA'

GRUPPO DI MATEMATICA

a cura di Achille Maffini

SOMMARIO

ALLEGATI

ALLEGATO 1: Attività Scuola dell'Infanzia
ALLEGATO 2: Attività I Elementare
ALLEGATO 3: Riflessioni sulla programmazione – Classi I, II, III Elementare - Note
ALLEGATO 4: Riflessioni sulla programmazione – Classe IV Elementare - Note
ALLEGATO 5: Riflessioni sulla programmazione – Classe V Elementare
ALLEGATO 6: Le frazioni – Attività a cura delle insegnanti della Scuola Elementare - Note
ALLEGATO 7: L'insieme Q^+ dei numeri razionali assoluti
ALLEGATO 8: Operare con i numeri relativi

NB. Le Note di cui si parla per gli allegati 3, 4, 6 si riferiscono ai riferimenti presenti nel testo di ciascun allegato indicati con la notazione (n).

0. INTRODUZIONE

Questa relazione fa il punto sulle attività viste ed analizzate quest'anno, sia in fase di programmazione che in fase di osservazione in classe.

0.1 Tipologia delle attività

a) incontri plenari
b) incontri a gruppi ristretti
c) analisi di materiale prodotto
d) partecipazione ad attività in classe (tutte le classi coinvolte, tranne la seconda elementare).

In queste note vorrei sintetizzare
a) il lavoro come si è configurato nei vari ordini di scuole
b) i punti di raccordo tra i vari ordini di scuole
c) i problemi evidenziati sia a livello interno che come collegamenti tra i vari ordini
d) i problemi aperti
e) il lavoro futuro

0.2 L'obiettivo del percorso e la sua attuazione nei vari ordini di scuole

Il "filo rosso" del percorso, incentrato sul concetto di numero, è costituito dal graduale aumento di astrazione relativamente ai concetti trattati. Sinteticamente, rispetto ai vari ordini di scuola:

0.2.1 Materna

La quantità come criterio di classificazione (quantità come primo livello di astrazione rispetto alle "cose")

0.2.2 Elementari I ciclo

Numero come astrazione della quantità. Operazioni come modifiche delle quantità. Concetto di operazione: definire.
Problema da definire: dall'operazione come "operare" all'operazione come funzione.

0.2.3 Elementari II ciclo

Gli operatori come funzioni sulle grandezze;
a) il problema del continuo e del discreto
b) il problema degli oggetti coinvolti
c) il problema della traduzione di proposizioni dal linguaggio naturale in linguaggio formale coinvolgente gli operatori

La divisione
Gli insiemi numerici e la loro rappresentazione

0.2.4 Medie Inferiori

Passaggio dagli operatori che operano "su oggetti" alle operazioni sugli operatori. Problemi:
a) traduzione dal linguaggio naturale a quello formale
b) il concetto di operazione e il legame con gli insiemi coinvolti

c) la terminologia (frazioni proprie, improprie, apparenti, numeri misti)
d) ancora sul rapporto discreto/continuo

Dalle frazioni (operatori) ai numeri razionali: un esempio di concetto di equivalenza
Dalle frazioni ai numeri decimali: numeri decimali come "proprietà macro" (rappresentante) dei numeri razionali.
I numeri relativi e l'astrazione verso i numeri negativi: il distacco del numero dalla quantità.
I numeri relativi ed il rapporto segno/operazione.
Il problema della definizione di un'operazione in relazione ad un nuovo insieme: ampliamenti degli insiemi numerici

0.2.5 Medie Superiori

Dagli insiemi numerici alle strutture: studio delle proprietà delle operazioni.

Le attività osservate non sono esaurienti per quanto riguarda il percorso intrapreso, ma vogliono essere una base di partenza per un confronto che si possa fare su considerazioni di fondo. Secondo questo spirito sono da vedere anche le analisi delle attività seguite in classe. Tale analisi non dovranno essere viste in senso individuale, ma come occasione di riflessioni su attività-tipo. Toccherà alle varie insegnanti individuare all'interno di queste attività quelle che presentano modalità di lavoro in cui maggiormente si riconoscono o a cui sono più vicine.
Ringrazio pertanto le colleghe che hanno dato la disponibilità a che seguissi il loro lavoro in classe, indispensabile base per gli sviluppi futuri.

0.3 Note alla lettura

Il lavoro così configurato manca ancora di un'opera di sintesi tra le varie parti, lavoro che a questo punto dovrebbe essere fatto dalle insegnanti in accordo con le insegnanti degli ordini di scuole limitrofi.
La relazione è integrata[1] con alcune schede delle varie attività che vi sono descritte e che potrebbero essere usate (opportunamente adattate) anche in ordini di scuole diversi.
Oltre al testo normale, ci sono frasi in *corsivo* e in ***corsivo grassetto***: le prime si riferiscono a osservazioni e ipotesi di lavoro; le seconde a dubbi, domande, richieste di analisi su problematiche che dovrebbero costituire "l'ossatura" del lavoro estivo…..
Per quanto riguarda le attività presentare, gli insegnati che hanno proposto tali attività dovrebbero:

a) integrarla con le schede di lavoro proposte agli alunni;
b) breve relazione sulle difficoltà emerse e sui risultati conseguiti con l'attività
c) modifiche eventualmente proposte sulla base delle osservazioni e delle difficoltà evidenziate
d) proseguimento successivo del percorso

NB. A tutti è comunque chiesto di rispondere a tutte le parti in corsivo grassetto, in relazione alla propria esperienza e alle proprie esigenze.

[1] Negli allegati.

1. OSSERVAZIONI ED ANALISI DELLE ATTIVITA’

1.1 Materne

Scuola Materna di Rivarolo del RE

Attività: la classificazione degli insiemi secondo il criterio della quantità (gruppo dei grandi). Allegato 1.

Vengono raccolti in cesti o scatole un certo numero di oggetti di diverse forme e dimensioni col criterio del colore. Viene quindi chiesto ai bambini come si fa a sapere quanti sono di più.

I bambini cominciano a contare gli oggetti. Francesco fa qualche errore, per cui ci si pone il problema di come essere sicuri se, come nel caso di Francesco, non si è sicuri di contare correttamente. Gli oggetti vengono allora messi in fila per costruire corrispondenze fra i due insiemi[2].

Tra le difficoltà evidenziate, sembra che i bambini facciano fatica a sganciarsi dalle “dimensioni” dell’oggetto. L’oggetto più grande “vale di più” rispetto a quello più piccolo.

Ciò che mi ha spiazzato, è stata la dimestichezza dei bambini col concetto di numero: se il numero è una astrazione della quantità (come è stato introdotto? Si tratterebbe di rivedere le attività con bambini più piccoli), sembra sia difficile ritornare, una volta acquisito lo “strumento” del contare (più del concetto), al tipo di realtà di cui il numero costituisce una forma di astrazione. A questo punto si è anche pensato di far sovrapporre gli oggetti di un insieme agli oggetti di un altro insieme (corrispondenza uno-uno) per vedere quali rimanevano fuori.

Si tratta di valutare, in proiezione futura, se e come gestire il legame numero-quantità, anticipando eventualmente le attività ai bambini più piccoli.

[2] Può essere opportuno osservare che col contare (approccio ordinale al numero) si ottengono informazioni in più, rispetto a quella richiesta. Può essere un’occasione per evidenziare le risposte alle specifiche richieste, mediante l’approccio cardinale al numero, basato sul concetto di corrispondenza biunivoca.

1.2Elementari I ciclo

Elementi a disposizione: Riflessioni sulla programmazione (divisione: Allegati 3, 4, 5); colloquio.
Concetti evidenziati:
Numero. Continuando il percorso iniziato con la materna, il concetto di numero è ulteriormente legato a quello di astrazione della quantità. Un ruolo decisivo è svolto dalla corrispondenza biunivoca.
Cosa si intende per "contare ricorrendo alla corrispondenza biunivoca"? *(Pag. 1 Allegato 3)*
Operazione. In questa fase si dovrebbe definire, a livello ovviamente intuitivo, il concetto di operazione. L'impressione è che tale concetto sia strettamente legato al verbo "operare" inteso come "fare qualcosa su qualcos'altro. Andrebbero, secondo me, potenziate, delle attività che facciano vedere che in alcuni casi si riesce ad operare ed in altri no.

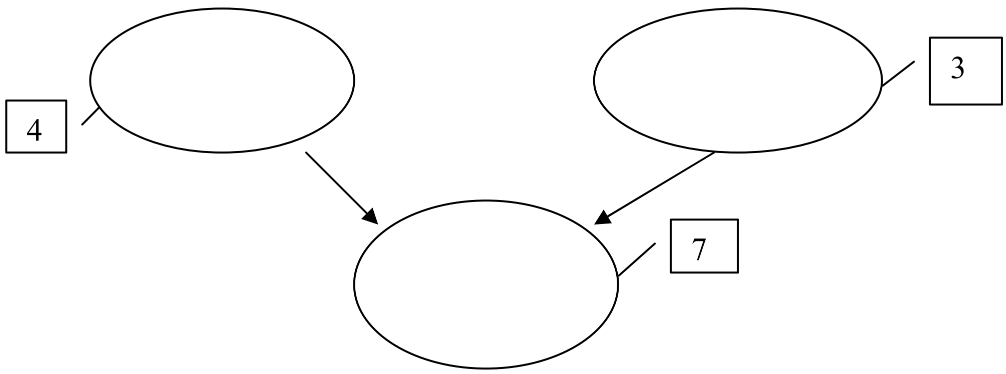
I Elementare

I Rivarolo del Re (4/3/03)

Attività sull'addizione di numeri naturali. Allegato 2.
Le bambine prendono gli abitanti del lago ed un bambino li conta (sono 7). Poi il bambino li suddivide in due gruppi (uno per maestra: 6+1). Un secondo bambino forma altri due gruppi (5+2), mentre un bambino alla lavagna scrive le operazioni.
Osservazioni:
I numeri delle operazioni vengono scritti nell'ordine (sx-dx) con cui sono messi i gruppi.
Successivamente vengono ridistribuiti gli animali (e quindi le bambine) ad addendi invertiti rispetto alle maestre.

Poiché questa attività viene contemporaneamente portata avanti con una rappresentazione grafica, il dubbio che ci si è posti è: vale la pena, nello scambio, considerare gli stessi animali o animali diversi; cioè, è meglio sganciare la quantità dalla qualità o in prima istanza procedere in analogia? Aspetto da approfondire in sede di discussione e in sede di attività future.

Valutazioni su rappresentazione grafica e difficoltà incontrate.



In un'attività precedente fatta con maschere, le maschere sono state disegnate in due insiemi distinti e successivamente messe nello stesso insieme. Per un bambino, malgrado la rappresentazione della corrispondenza, le maschere non erano le stesse. E' come se l'oggetto in contesto "quantità", cambi i suoi connotati di qualità. Una seconda considerazione sulla difficoltà può essere legata al tipo di rappresentazione: la "freccia", in termini di corrispondenza, fa pensare ad una associazione, che è poi quello che viene proposto in ambiti insiemistici e relazionali successivi. In quest'ottica, l'oggetto è "diverso" ed ha solo la valenza di esserne il corrispondente dell'altro, ma non è l'altro.

In questo senso c'è un principio di identità secondo cui solo un oggetto (in questo caso una rappresentazione) è uguale solo a se stesso.
In questa prima fase non vengono fatte considerazioni sulla proprietà commutativa. E' stato fatto un accenno solo alla fine, in cui comunque i bambini sembravano averne colto la valenza.

1.2.1 II Elementare

Osservazioni relative al percorso presentato: divisione. (Allegato 3)
Per quanto riguarda la classe seconda, credo si tratti di stabilire cosa si intende per quantità, parti uguali, sottrazione (è già stata vista?), disomogeneità termini al punto a) (pag.2-Allegato 3)
Divisione. Nella classe seconda si ha un graduale passaggio dall'idea di divisione per partizione a quella per contenenza.

Dubbio 1. Perché non vengono proposti esempi con resto?[3] E' successo che, in casi di divisioni "con resto" (ad esempio una distribuzione di caramelle che non sia multiplo del numero di bambini) qualche bambino abbia detto "non si può fare"? Non è un'occasione per mostrare la differenza tra quelle che vengono "definite" operazioni: alcune si possono sempre fare altre no?
Dubbio 2. I due tipi di divisione (partizione/contenenza) mi sembra portino a condizioni, anche per i bambini, diverse.

Consideriamo gli esempi proposti. Se ho 17 caramelle e 5 bambini e distribuisco le caramelle una ad una, si può ammettere che qualcuno, fissando un criterio, ne abbia di più. Il numero di bambini che ha caramelle "eccedenti" individua il resto della divisione.
Nel caso della divisione per contenenza, possono invece crearsi situazioni opposte; ad esempio nel caso delle macchinine, se il numero di automobiline non è multiplo di 3 (supponiamo siano 17) se il mio scopo è metterle via mi serve comunque una scatola anche per il resto (non piena). In questo caso si potrebbe far osservare (magari in classi successive) che solo determinati numeri permettono di avere un numero di scatole tutte piene (si riallaccia al discorso di terza).
Diverso l'esempio proposto in quarta (la capanna di Natale - Allegato 4): in questo caso se rimane un numero di mollette inferiore a 9 (ma maggiori di 0) queste sono inutilizzabili per lo scopo.
In sostanza il tipo di problema (e soprattutto l'obiettivo che si pone il problema) può condizionare la risposta, nel caso in cui le cose "non funzionano come si deve". Non bisogna mai dimenticare il fatto, quando si fa riferimento a problemi che richiamano un vissuto emotivo forte dei bambini, che i loro obiettivi possono essere diversi dai nostri e che questo può condizionarne la risposta. Nel caso delle macchinine con resto, ad esempio, la nostra risposta "ne avanzano 2" potrebbe non essere accettata dal bambino che si preoccupa di mettere a posto anche quelle e quindi richiede una scatola in più.
Un'attività che si può valutare se vale la pena fare è quella di proporre problemi che abbiano lo stesso numero di elementi coinvolti, ma oggetti diversi, per vedere se le risposte, rispetto al resto, dei bambini mutano. Ad esempio, il problema delle macchinine può essere sostituito con dei fiori da mettere in un vaso (3 per vaso); non è improbabile che i maschi rispondano in modo diverso rispetto ai vasi e alle scatole necessarie.

1.3 Elementari II ciclo

Elementi a disposizione: Riflessioni sulla programmazione (divisione – Allegati 4, 5); colloquio.

---

[3] In generale non è opportuno introdurre il termine "quoto", visto che tra l'altro il tipo di nomenclatura discende dal fatto di non ritenere 0 un numero (nota a cura di C. Marchini)

Nel colloquio avuto sono emersi i problemi soprattutto relativi ad operazione ed operatore, concetti su cui torneremo in seguito.
Divisione. Il livello di astrazione richiesto in terza sulla divisione è relativo al passaggio dagli oggetti alle relazioni (divisibilità) tra numeri.
Credo che i casi con resto andrebbero anticipati (anche nel caso di esempi con oggetti) e, nel caso della terza, sottolineata maggiormente.
Rispetto al resto, inoltre, si potrebbe far notare che le divisioni con resto non si possono scrivere in forma compatta.
Relativamente poi alla stessa scrittura usata per le divisioni per partizione e quelle per contenenza, si può osservare un'altra cosa: nelle divisioni per partizione, sono fissati (nei problemi relativi) due enti distinti, aventi "marche" che non si influenzano a vicenda. Il tipo di richiesta determina "la marca" del risultato.
Esempio: ho 20 caramelle e 5 bambini. Quante caramelle riceve ciascun bambino? Prima delle domanda finale, gli enti coinvolti (caramelle e bambini) non erano collegati tra di loro. La domanda finale stabilisce che il risultato finale sarà "marcato" con caramelle/bambini (o, impropriamente visto che ricorda una moltiplicazione, caramelle per bambino)
Consideriamo invece il problema: ho 5 torte e 20 bambini. Quanti bambini mangeranno una torta?
In questo caso il risultato ha come "marca" torte per bambini, ma, come prima, prima della richiesta i due enti non sono coinvolti.
Da un punto di vista "alto" è come se si costruisse una funzione dall'insieme delle caramelle (nel primo problema) all'insieme dei bambini che ad ogni caramella fa corrispondere il bambino a cui è destinata. E' opportuno osservare che il numero delle caramelle e il numero dei bambini (cardinalità dei due insiemi) sono fissati. Questa funzione (suriettive) induce una relazione di equivalenza sull'insieme delle caramelle ("vanno allo stesso bambino") e una relativa partizione (che ne giustifica il nome) su tale insieme. Il quoziente della divisione è il numero di elementi di ciascun insieme della partizione.
Sostanzialmente diverso il caso della divisione per contenenza. Qui uno degli enti coinvolti ha già, nella sua marca, un legame con gli enti dell'altro insieme.
Esempio: ho 12 macchinine e delle scatole e in ogni scatola ci stanno 3 macchine. Quante scatole servono?
In questo caso già prima della richiesta è fissato un legame tra 12 e 3 espresso dalle marche (dove il macchinine per scatola è di fatto un macchinine/scatole). La formulazione del problema dovrebbe far intuire che il risultato, ancor prima della esplicitazione della richiesta, dovrebbe essere "scatole".
In pratica il "3 macchinine per scatola" funge da funzione dall'insieme delle macchinine all'insieme delle scatole (precursore a sua volta del concetto della frazione come operatore); in questo caso il numero delle scatole del codominio non è fissato (mentre è fissato il numero di elementi, le macchinine, del dominio). Il quoziente della divisione è la cardinalità dell'insieme delle immagini.
Rispetto al caso precedente cambia sostanzialmente il contesto a cui si riferisce il quoziente.
E' solo il caso di osservare che nelle due tipologie divisore e quoziente si "scambiano le marche".
Quello che si vuole sottolineare è che la classificazione del tipo di divisione (per partizione o per contenenza) non è legato solo alle modalità, ma anche e soprattutto alla struttura del problema e alla presentazione dei dati. Quindi è vero che la divisione risolve entrambe le situazioni problematiche (ulteriore livello di astrazione), ma questo vale nel momento in cui si opera con i numeri senza "marche"; la divisione, quando non è più posta distinzione, diventa quindi una astrazione anche di tipologie di problemi e non solo di situazioni. (vedi pag. 3 Allegato 4).

Credo (ma è un aspetto su cui confrontarci) che diverse difficoltà sulla divisione siano legare a questi due registri diversi. (specificare il concetto di "fare confusione" a pag. 3 Allegato 4)
Si potrebbe allora procedere presentando in parallelo tipologie di problemi che richiamino la divisione per contenenza e quella per ripartizione.

Una ulteriore considerazione, si riferisce ad un contesto "alto" del concetto di funzione. Nel caso della divisione per partizione, individuata come visto da una funzione suriettiva, si tratta di costruire una funzione suriettiva (evidenziata ad esempio dall'attività a pag. 3 dell'Allegato 3) in modo che ogni elemento del codominio abbia lo stesso numero di controimmagini; nel caso della divisione per contenenza, invece, si procede facendo corrispondere ad un numero di elementi del dominio pari al divisore la stessa immagine e, alla fine, si "contano" gli elementi dell'insieme delle immagini. In entrambi i casi la funzione che risolve il problema non è unica. Questo comporta che nel tipo di problemi che portano alla divisione per contenenza o per partizione è coinvolto l'assioma di scelta, assioma non costruttivo. Dal punto di vista didattico questo potrebbe comportare che i bambini "vedano" in modo diverso divisioni ottenute con funzioni diverse.
Se si pensa poi alle operazioni "belle" (quelle che si possono sempre fare: addizione, moltiplicazione) e quelle "brutte" (divisione, sottrazione; a margine non so se è il caso si pensare a questa classificazione che dà un giudizio di merito. Si possono cercare terminologie idonee), si può far vedere l'analogia tra la moltiplicazione come addizione ripetuta e la divisione come differenza ripetuta. Il fatto che questa analogia leghi due operazioni dello stesso tipo può giustificare il fatto che si possano sempre fare oppure no.
Pag. 6 Allegato 4: sarebbe opportuno fare un'analisi delle difficoltà che incontrano i bambini in questi problemi e nei precedenti.
Pag. 9 Allegato 4. Alcuni aspetti da modificare nel diagramma di flusso

Si tratta di valutare se introdurre con attività operazioni tipo DIV (dati due numeri interi a e b, con b non nullo, fornisce il quoziente della divisione di a per b) o MOD (nelle ipotesi precedenti, fornisce il resto della divisione), in accordo con quanto fatto alle superiori.

1.3.1 Il concetto di frazione come operatore nell'attività di Alba

L'attività non è stata direttamente seguita. L'analisi è stata fatta a seguito di un colloquio avuto con l'insegnante e sulla base di alcune considerazioni scritte da lei presentate.
Problemi evidenziati: L'intero può essere rappresentato solo da un oggetto.
Differenza rispetto alla concezione dell'insegnante: intero come oggetto inteso come grandezza continua (mela, pera, torta, pizza, ecc.) oppure come grandezza discreta, cioè insieme di oggetti (scatola cioccolatini, scatola di pennarelli, ecc.)
In questa contrapposizione si possono vedere non solo due approcci diversi, ma anche due modi di intendere la frazione. Nel primo cosa siamo effettivamente in presenza della frazione come operatore, nel senso che la pizza potenzialmente la posso dividere in quante parti voglio. Nel secondo caso siamo invece più nell'ottica della divisibilità così come è stata vista in precedenza (divisione di multipli del divisore e quindi non siamo più nell'ottica dell'operatore, ma della relazione funzionale). Sembra che i bambini abbiano quindi più intuitivo il concetto di continuo di quanto non si creda. Con la frazione si aspettano di trovare qualcosa "di analogo" (da una scatola di pennarelli ottengo invece alcuni pennarelli, non una scatolina più piccola).
La tendenza a rendere "discreto" il continuo è tipica dell'insegnamento (riscontrabile anche alle medie e anche alle superiori: i segmenti sono quasi sempre espressi in quadretti) che se da un lato agevola un certo tipo di procedure dall'altro crea conflitto. In questo caso sembra risultare forte nei bambini l'esigenza di funzione (che vuol dire, in soldoni, che sono sempre garantito dal trovare qualcosa qualunque cosa applichi al mio "oggetto") che giustificherebbe le difficoltà evidenziate. Forse vale la pena insistere di più, anche in contesti più alti, su questioni legate al continuo, soprattutto in relazione agli enti geometrici (vedere attività di divisione del segmento, soprattutto per far capire che un segmento, come ente geometrico, può essere diviso in un numero qualunque di parti, così come la pizza).
Se alle elementari l'approccio al continuo può essere fatto solo a livello intuitivo, alle medie dovrebbe essere accentuato (esempio: suddivisione di un segmento utilizzando il teorema di Talete).

Questo sarà utile soprattutto negli anni successivi (ad esempio alle superiori) quando si cercherà una relazione forte tra enti geometrici e enti algebrici, soprattutto nell'ottica dei corrispondenti modelli.

Di seguito vengono riportate le analisi delle proprietà direttamente seguite.

1.3.2 III Elementare

<u>III Vicomoscano. (9/4/03)</u>

Argomento: Frazioni come parti di un intero.
Attività precedenti: parti di torte, panettoni, fogli piegati.
In questa attività si vuole valutare cosa succede quando si applica una frazione a grandezze discrete.
Problema proposto: numero di caramelle da suddividere in parti uguali (giorni rimanenti della settimana).
Durante l'attività il primo problema che si è posto è come suddividere le caramelle (18 in 3 giorni). Un bambino propone un metodo per partizione; la maestra propone di utilizzare la divisione, già acquisita dagli alunni. In sostanza al metodo per partizione viene sostituito quello per contenenza, andando verso l'ulteriore livello di astrazione di cui si parlava anche in precedenza.
La frazione viene vista come doppio comando: dividere prima in parti uguali e poi prendere quello che serve.
Viene quindi rimarcata l'idea di frazione come operatore, aspetto su cui si è tornati successivamente. Al termine dell'attività infatti si è messa in evidenza la profonda differenza dell'aver a che fare con panettoni, pizze o fogli (grandezze continue) piuttosto che con caramelle (grandezze discrete; un bambino ha parlato di "numeri"). Ciò che si vuole evidenziare è che l'operatore frazione non è sempre applicabile ai numeri naturali. Quindi la frazione, applicata al discreto, non è più una funzione, ma una relazione funzionale. Di fatto però, nella prassi didattica, succede il contrario: fissata cioè la quantità, si vanno ad individuare le frazioni che "operano" su quella quantità, cioè si vanno ad individuare le frazioni (viste come relazioni) che hanno nel loro insieme di definizione il numero assegnato. In sostanza, indicata con f la relazione definita da una frazione p/q su NxN, il processo che si fa è quello di associare alla coppia (n,f) il numero naturale, quando esiste, f(n). Si tratta quindi di una relazione i cui elementi appartengono all'insieme NxP(NxN)xN (dove con P(NxN) si intende l'insieme delle parti di NxN). Il grado di complessità dell'insieme coinvolto può giustificare anche le difficoltà nel vedere la frazione come operatore, soprattutto se, come appunto si fa di solito, si fissa in numero naturale e si "adatta" la frazione. Si è arrivati alla conclusione, ad esempio, che questo è possibile quando il numero è multiplo del denominatore.
Questo ha evidenziato un'altra questione, riscontrabile anche in un'altra attività (vedi V): cosa si intende per frazioni equivalenti? Se il numero deve essere multiplo del denominatore, rispetto al 9 le frazioni 1/3 e 5/15 non sono equivalenti. Inoltre se il concetto di frazione equivalente si manifesta nella possibilità di "passare" dall'una all'altra mediante la moltiplicazione di numeratore e denominatore per un fattore (intero) comune, 4/6 e 6/9 non sono equivalenti?

Il concetto di frazione equivalente è uno di quelli, in generale, da mettere a posto e su cui lavorare, anche con attività. L'impressione è che, in ogni ordine di scuola, le frazioni vengano classificate come equivalenti in relazione al risultato ottenuto se applicate ad una quantità. In sostanza il concetto non viene posto come relazione di equivalenza tra frazioni. Il criterio di applicazione alle quantità, può comportare non pochi problemi (vedi anche attività V Vicomoscano).

Con i bambini si è poi fatto il parallelismo con le grandezze continue e si è arrivati piuttosto facilmente alla conclusione che in quel caso la suddivisione era sempre "potenzialmente" fattibile, qualunque fosse il denominatore della frazione. A parte un problema di esistenza (si può sempre fare) c'è anche un problema di infinito che rispetto alla possibilità assume le caratteristiche del potenziale (a dire il vero qualche bambino ha messo in dubbio questa possibilità di dividere in parti sempre più piccole: il limite fisico è ancora forte, ma probabilmente non è solo quello). In sintesi, si è sottolineato il diverso comportamento delle frazioni a seconda degli enti su cui vengono applicate: con la pizza si ha sempre qualcosa di analogo; invece con ad esempio le caramelle si hanno, non

sempre, numeri di… (e non parti di….). In pratica si modifica il concetto di grandezza: dall'oggetto all'insieme (o meglio, alla sua cardinalità).
Potrebbe essere opportuno proporre attività in cui si prendono insiemi aventi un diverso numero di oggetti (omogenei o non, anche questo andrebbe valutato in relazione al contesto in cui tale attività è inserita o presentata) e, fissata una frazione, far scoprire ai bambini su quali insiemi[4] la frazione agisce, cioè con quali insiemi viene fornito un risultato. In questo modo, implicitamente, si chiede al bambino di individuare l'insieme di definizione della relazione individuata dalla frazione, avvicinandola così da una parte al concetto di relazione funzionale (livello alto), dall'altro all'idea di applicabilità, aspetto antecedente a quello di "risultato"[5].
Ritornando all'attività, si possono evidenziare altri due aspetti: la simbologia usata e l'idea di contratto relativa alla presentazione dell'attività come situazione problema.
Sul primo punto torneremo in seguito per un discorso più generale.
Per il secondo punto, se si impostano le attività come situazioni-problema, queste possano diventare un vincolo agli sviluppi successivi.
Rispetto all'attività specifica, la maestra ha proposto di prenderne 2/3 il primo giorno; diversi bambini hanno contestato a questo punto una suddivisione non equa delle caramelle: la difficoltà a passare dall'unità frazionaria ad un suo multiplo è stata condizionata dal contesto reale, in cui, secondo i bambini, l'intero <u>deve</u> coprire tutto il periodo considerato (3 giorni).
Il problema del contesto si pone anche in seguito: la situazione-problema prevede di dover dividere 32 liquirizie tra 4 nipoti. Alla notizia che ad uno di essi (Simone) non piace la liquirizia, la maestra decide di dare la parte di Simone a Valentina. I bambini contestano questa scelta, ritenendo giusto suddividere la parte di Simone tra gli altri tre. In questo caso la contestazione nasce dalla rottura del contratto didattico secondo cui la suddivisione deve essere fatta in parti uguali. Le regole del contratto sono cambiate nel momento in cui l'esigenza didattica (l'introduzione del numeratore) ha prevalso sull'esigenza di equità. Anche in questo caso è il vissuto del bambino che viene intaccato, senza essere messo in crisi.
Al termine dell'attività i "comandi" imposti dalla frazione (prima moltiplico, poi divido), sembrano chiari.
A margine: la frazione 2/4 corrispondente alla parte di Valentina, è equivalente ad ½ ("che è anche ½"). Un bambino si chiede se Valentina ha il doppio o meno degli altri.
Analizzare il dubbio di tale bambino e trovare motivazioni di tale dubbio.

<u>III B Casalmaggiore (2/5/03)</u>
Attività con sottomultipli di Euro.
(Attività precedenti: rappresentazione dell'unità come quadrato di lato 10 quadretti e dei centesimi dell'unità come i 100 quadretti in cui è suddiviso il quadrato)
Vengono distribuite monete che sono sottomultipli di euro.
La maestra chiede cosa significa 1 EUROCENT
Ai bambini viene chiesto di spiegare cosa significa.
Viene quindi rappresentato il quadrato e viene colorato un quadratino (in alto a sx). questa operazione è definita frazionamento del quadrato.
Osservazione. L'attività con le monete rappresenta un livello di astrazione ulteriore, rispetto a quanto fatto in altri casi (vedi III Vicomoscano). Frazionando l'euro, non è stata fatta una suddivisione fisica di un oggetto (pizza, caramelle, ecc.), ma di un concetto che l'oggetto

[4] Qui e nel seguito, la possibilità di agire della frazione si riferisce al numero che indica la cardinalità dell'insieme.
[5] Anche nelle attività seguite, si opera sempre in condizioni ideali: il contratto didattico esplicito è "trova il risultato ottenuto applicando questa frazione a questa quantità" mentre quello implicito è "tale risultato esiste". Procedendo in questo modo è possibile porre prima il problema dell'esistenza del risultato e quindi il problema dei "numeri" sui quali la frazione può agire.

rappresenta (i bambini hanno sorriso quando è stato chiesto loro se "dividendo" la moneta di 1 euro in cento parti si ottenevano monete da 1 centesimo di euro).
In seguito ho fatto loro notare la cosa chiedendo quale differenza ci sarebbe stata se fosse stata divisa una torta in 100 parti. Deborah risponde che la torta si può mangiare, mentre con i centesimi si fanno in conti. Questa risposta è venuta dopo un'attività di conversione e di compravendita fatta con le monete. Dietro la risposta di Deborah mi sembra ci sia la percezione che si è fatto un passaggio astrattivo non trascurabile: dalla divisione dell'oggetto si passa alla divisione del concetto che l'oggetto rappresenta. In sostanza il nuovo livello di astrazione coinvolge questioni semantiche diverse: 1 euro non è più l'oggetto fisico (la moneta) ma un valore da esso rappresentato.

Dubbio: con la rappresentazione grafica (oltre tutto di carattere geometrico) non c'è "un passo indietro" (pur essendo evidente l'esigenza di riportare l'attività ad un modello noto)?

Si passa successivamente alla scrittura decimale: 0,01 (non ho unità, non ho decimi, ho un centesimo).

"Se metto insieme 10 monete di un centesimo, ottengo una moneta che corrisponde a 10 di queste?"
Analizzare la frase con particolare riferimento ai termini sottolineati.

I bambini estraggono, muovendosi agevolmente, una moneta da 10 cent.
Vengono rappresentati, separati, 10 quadratini che rappresentano ciascuno 1 centesimo. Di fatto si è separato il concetto dalla sua rappresentazione: sembra che i quadratini, come i cent, abbiano vita propria, indipendente dal quadrato.
Dieci centesimi corrispondono ad un decimo: *cosa si intende per corrispondono?* (vedi linguaggio)
Tra le rappresentazioni simboliche 10/100 e 0,1 non sono stati messi né simboli (o predicati del linguaggio matematico) né predicati verbali (vedi caso analogo IV D).
Nel gioco di compravendita o bambini usano espressioni del tipo
"due monete da 50 c€ e una da 10 c€ " oppure "1 € e 10 c€.
Dubbi: L'uso della congiunzione al posto dell'operazione può creare problemi? A che livello?
Il tipo di operazione richiesta (che si configura come una addizione) in quale contesto numerico si colloca?

Anche il libro di testo usa la dizione "2 unità e ……". Si tratta di vedere come configurarlo (vedi aspetto linguaggio).

1.3.3 IV Elementare

IV D Casalmaggiore (28/3/03)
Dalle frazioni ai numeri decimali. Allegato 6, pag.19
Attività: una squadra (ladri) deve rubare pezzi da un castello (cubo di 1000 pezzi) e l'altra (architetti) deve individuare quanti pezzi sono stati rubati (vedi regole gioco)
Le risposte dei bambini sono date in forma di somma di frazioni con denominatori potenze di 10 (Esempio: 2/10 + 1/100 + 2/1000).
Attività d'aula.
Tutti i bambini hanno risposto nel gioco con frazioni (o somme di frazioni). Alla fine del gioco è stata posta la questione se anziché rispondere con frazioni decimali, si poteva rispondere mettendo la parte corrispondente del furto nella "tabella dei numeri":

K	H	Da	u

Se qualcuno avesse rubato tutto il castello avremmo messo 1 sotto u (indicazione: è stato rubato tutto il castello)

K	H	Da	u
			1

Viene chiesto ai bambini dove collocare 1/10 nella tabella dei numeri. Per aiutarli a rispondere, viene suggerita una trasposizione di concetti: dalle lunghezze alle frazioni decimali.
Il modello di riferimento è noto ai bambini.

Come è stato introdotto? Con quali mezzi? Quale ruolo assunto dall'ambito fisico?

Viene allora proposto di aggiungere colonne a destra, visto che un decimo è 10 volte più piccolo dell'unità (e con numeri 10 volte più grandi si va verso sinistra. Sara suggerisce di segnare la casella a dx dell'unità con du, in analogia a quanto fatto con le lunghezze.
Rachele completa poi la tabella aggiungendo la colonna per 1/100 e così per 1/1000.

Km	hm	dam	m	dm	cm	
K	h	da	u	d	c	

Il problema che viene successivamente posto è come scrivere, senza usare i simboli, ma solo con i "numeri" 1/100?

Riflessione: in questa domanda c'è una distinzione tra frazione e numero? Cosa rappresenta l'uno e cosa l'altro?

Si arriva quindi, da parte dei bambini, ad utilizzare la virgola per indicare la suddivisione tra interi e decimali.
Aspetti rappresentazione e linguaggio (1/100 → 0,01).
Al termine dell'attività ho chiesto ai bambini se è possibile collocare nella tabella dei numeri anche le frazioni non decimali. Per la risposta dei bambini, si veda allegato 6, pag. 22.

<u>IV A Casalmaggiore (16/4/03)</u>

Attività: le frazioni
Viene fatta una conversazione clinica iniziale sul termine "frazione" in base alle esperienze fatte.
Tra le risposte dei bambini segnalo:
"Alcune volte restano dei resti, altre volte no"[6]
"Prima occorre frazionare, poi prendere quanto è indicato dal numeratore"[7]
Attività: Consideriamo il gruppo classe (20 alunni). Quanti gruppi si possono fare (sottointeso: con un numero uguale di bambini).
Siamo ancora nella prospettiva che, fissato il numero naturale n, si devono individuare le frazioni che possono operare su tale numero.
Si decide di formare 4 gruppi. Viene chiamato un bambino per eseguire il compito.
La prima questione che gli viene posta è come si fa a costruire dei "quarti" di questo gruppo?
Il bambino interpellato chiama fuori 4 bambini. In questa azione è evidente la confusione, segnalata anche dall'insegnante, tra denominatore e risultato. In questa confusione può esserci una non chiara differenza tra divisione per partizione e divisione per contenenza.

Approfondire le cause di questo tipo di errore sulla base della propria esperienza o di considerazioni didattiche.

---

[6] Mi sembra che con resto, in questo caso, si intenda ciò che rimane dopo che si è preso una parte.
[7] Anche in questo caso, come in precedenti attività, le "azioni" della frazione sono scandite da un ben preciso ordine.

Una bambina corregge il risultato del compagno dicendo che occorre aggiungere un bambino. Nella sua prospettiva, preferisce fare la divisione per contenenza.
Successivamente vengono fatti scegliere il numero di gruppi (2; in frazione 2/4) che devono eseguire un'azione.
Si individuano poi gli altri possibili denominatori per le frazioni: 5, 10, 20, 2, 1.
Si procede con il denominatore 5. La bambina che deve formare i gruppi all'inizio commette lo stesso errore del suo compagno (prende 5 bambini). Poi viene suggerito di prendere 5 segnaposto e sistemare i bambini in corrispondenza di questi segnaposto. La maestra pone alla bambina la doppia possibilità di prendere un alunno per volta per costruire i gruppi o di prendere gruppi interi in blocco. La bambina sceglie il primo modo.
La modalità scelta è quella della partizione. Come detto in precedenza, il metodo per partizione sottintende una relazione di equivalenza. In questo caso sarebbe quindi interessante stabilire il criterio di scelta della bambina che sarebbe poi il criterio che individua la relazione di equivalenza. La valenza didattica di questa "curiosità" sarebbe quella di avvicinare i bambini all'idea di relazione di equivalenza e più in generale all'idea di classificazione esplicitando un criterio.
I bambini però tendono ad andare "dove vogliono" per cui il criterio scelto sembra essere quello affettivo. Tali criterio potrebbe però portare a gruppi non con lo stesso numero di alunni, mentre nella divisione per partizione è richiesto anche che la relazione di equivalenza "produca" classi con lo stesso numero di elementi.
Questo "andare dove vogliono" permette di fare anche un altro tipo di riflessione: in una divisione per partizione, viene messo un elemento in una classe che ne contiene già uno solo dopo che tutte le classi hanno un elemento. Nel caso dell'attività, invece, i gruppi si costruivano in modo non sistematico. Questo fa pensare che i bambini "sappiano già" quando un gruppo è completo, per cui anche se la divisione è per partizione, di fatto ricalca la struttura della contenenza.
La bambina sceglie anche il numero delle attività frazionarie che giocheranno: ne sceglie 5.
Nelle azioni successive, i bambini dei vari gruppi vengono indicati con crocette.
Vengono richieste osservazioni sulle frazioni:
"Invece di figure e linee, si possono fare gruppi di persone"
"Con 20 si possono utilizzare tante frazioni adatte" (la maestra rimarca come si sia osservato che non tutte le frazione sono adatte; anche in questo caso, la distinzione tra continuo e discreto è quella che fa la differenza, aspetto da rimarcare ancora una volta).
"Ogni frazione moltiplicata per un numero danno tutte 20"
In questa osservazione si confonde il concetto di frazione con il risultato della frazione applicata ad un numero (problemi terminologici? Vedi linguaggio)
La maestra chiede quale numero. Il bambino precedente risponde che non sa; un altro alunno sostiene che si può scegliere il numero in base alla frazione.
L'uso del termine scegliere può far pensare che non si sia consolidata ancora l'idea di operatore come relazione funzionale, per cui sembra non essere scontato che il risultato (l'immagine), quando esiste, è unico.Inoltre non sembra essere chiaro il rapporto tra risultato e denominatore, cioè, nell'ottica della partizione, il rapporto tra classi della partizione e elementi della classe.
Una successiva discussione porta ad individuare il numero da scegliere nel denominatore della frazione. In sostanza si stabilisce un criterio di scelta che permette di individuare in modo univoco tale numero.
Riflessione: Divisione e frazione possono creare conflitto? Lavorando con le frazioni, non si chiede loro di "tornare indietro"?
A supporto della riflessione: nella successiva attività (assegnazione di sacchetti contenenti un certo numero di oggetti dello stesso tipo e delle schede con segnati delle frazioni; i bambini devono individuare il numero di oggetti corrispondente, tramite la frazione, al gruppo assegnato) in un gruppo ho notato la difficoltà di un bambino nel fare la suddivisione con la divisione. Gli ho quindi suggerito di procedere per partizione, formando tante righe (erano soldati…) quante erano quelle

del …… (denominatore l'ha detto una compagna del gruppo). Da lì in poi l'attività per il gruppo è andata spedita. Altri gruppi, invece, lavoravano partendo dalla divisione.

1.3.4 V Elementare

V Vicomoscano (9/4/03)

Argomento: Frazioni.
Attività precedenti: dall'intero alle parti.
Attività attuale: dalla parte all'intero.
L'attività viene introdotta con una situazione-problema: di un tragitto so che 100 m corrispondono ai 2/5 dell'intero percorso. Quanto misura l'intero percorso?
Due alunni illustrano due diverse strategie che portano alla soluzione.
A: 50 m sono 1/5 per cui in totale sono 250 m
B: divido per quello sopra (2) e moltiplico per quello sotto (5) cioè faccio il contrario di quanto fatto in precedenza.
In un successivo esempio (si cercava la misura di una strada i cui ¾ erano 180 m), un bambino ha messo in evidenza come le proporzioni non fossero rispettate nel disegno che doveva illustrare il problema. Il ruolo del disegno-modello, seppure non fondamentale, è ancora importante.
Una volta trovato la misura dell'unità frazionaria, oltre ai metodi precedenti una bambina suggerisce di addizionarere 60 m a 180 m.
Nelle attività successive si evidenzia una interessante situazione relativa al concetto di frazione equivalente (vedi anche III Vic.).
Intanto, attraverso diversi esempi, si è arrivati a stabilire che questo metodo lo posso applicare a qualunque tipo di grandezze (superfici di aiuole, masse, ecc.)
Un alunno viene chiamato alla lavagna per individuare l'intero di cui 80 kg costituisce i 3/6. L'alunno trova difficoltà a dividere 80 per 3, per cui la maestra cambia il dato relativo alla massa in 90 kg.
Le considerazioni che si possono fare sono relative al tentativo di dare risposte a domande del tipo:

1) ***cosa si intende per frazione equivalente?*** (→ dare una definizione di frazione equivalente – vedi glossario – e cercare una definizione comune – vedi linguaggio);
2) ***vale la pena rendere tutti i problemi possibili?*** (un percorso alternativo, con numeri "brutti" può portare a interessanti aperture verso il concetto di approssimazione);
3) ***nel caso specifico, si poteva introdurre la necessità dell'uso di frazioni equivalenti cioè frazioni che "pur comportandosi allo stesso modo" sono più "comode" di altre in contesti specifici*** (→ produzione di attività per la ricerca, se esistono, di frazioni equivalenti "comode" in un determinato problema"; ricerca di criteri di esistenza; ecc).

1.4 Il problema del linguaggio nelle attività delle Elementari

Le attività visionate e analizzate nel secondo ciclo delle Elementari si riferiscono in prevalenza al concetto di frazione come operatore. Una prima considerazione che si può fare si riferisce ad alcuni "sfasamenti" di carattere temporale che potrebbero/dovrebbero essere attenuati.

L'aspetto comunque più evidente di non uniformità è relativo al linguaggio e alla simbologia usata.

Credo che un lavoro di raccordo tra i vari ordini non possa prescindere da questo aspetto, avendo già a livello di scuola elementare le sue basi, basi che dovrebbero essere date col contributo della scuola media e superiore e di cui medie inferiori e superiori dovrebbero poi tener conto.

Ciò che segue, vuole essere una panoramica degli aspetti/problemi linguistici evidenziati, l'occasione per alcune riflessioni/proposte, l'invito per una stesura concordata di alcune linee guida comuni a livello linguistico e formale.

Nell'attività di III Vicomoscano, quando si tratta di dividere le caramelle in 3 parti si è usata una scrittura del tipo (di ogni numero o simbolo che compare nella divisione è stato esplicitato il significato)

$18:3=6 \rightarrow 1/3$

La freccia tra la divisione e 1/3 si riferisce chiaramente ad una "corrispondenza" (si è usato, anche in altre circostanze, l'espressione "corrisponde a…") tra il risultato della divisione e la frazione (non è senza dubbio una implicazione). D'altra parte il verbo corrispondere e la freccia, sono termini e simboli strettamente legati al concetto di funzione (o anche di relazione funzionale). Non è improbabile che quindi i bambini ritrovino la stessa terminologia, ma con un uso diverso, visto che a rigore dal punto di vista funzionale la cosa dovrebbe essere scritta, ad esempio come $18 \overset{\frac{1}{3}}{\longmapsto} 6$ che è come dire che il corrispondente di 18 tramite l'operatore 1/3 è 6. Nel caso specifico si vogliono chiaramente evidenziare altre cose. Tenendo conto di quanto poi verrà detto e fatto alle medie, vale forse la pena passare ad espressioni metalinguistiche che descrivano l'idea di corrispondenza, come ad esempio la classica "1/3 di 18 è 6".

Allo stesso modo la scrittura

$8x2=16 \rightarrow 2/4$ potrebbe essere sostituita, dopo la divisione, con "i 2/4 di 32 è 16".

Un altro modo di procedere, che giustifica comunque la scrittura (con le dovute modifiche…) si riallaccia a quanto detto a proposito dell'attività della classe III Vic, in occasione del quale si è parlato della relazione su NxP(NxN)xN. Se si fissa il primo elemento n della terna, questa diventa una funzione che ad una relazione (funzionale) f fa corrispondere, se esiste, f(n).

Quindi la possiamo vedere come una relazione che, fissato un numero naturale n, fa corrispondere ad ogni frazione che opera su n il relativo risultato. Di fatto quindi la freccia esprimerebbe una relazione (funzionale) che ad una frazione fa corrispondere un numero naturale. Nel caso ad esempio di n=18 si avrebbe che

½ $\rightarrow 9$ (ad un mezzo corrisponde 9)

$1/3 \rightarrow 6$

$1/6 \rightarrow 3$

$1/9 \rightarrow 2$

$1/18 \rightarrow 1$

Si ritrova la freccia nell'attività di IV D ($1/100 \rightarrow 0{,}01$). Anche in questo caso ha la valenza di una corrispondenza.

Tra chi? Come opera? Analizzare e proporre risposte.

Il problema grosso è quello del passaggio dalla frazione, che è ancora vista come un operatore, al numero decimale che è già un numero razionale
Lo stesso verbo corrispondere viene usato, come visto, nella classe III B (e probabilmente in molte altre classi…). In quel caso si riferiva a dieci centesimi che corrispondono ad un decimo, ma non venivano usati, in una situazione analoga, simboli.

Invito, come fatto in precedenza, all'analisi di questo verbo in questo contesto e alla proposta di
1) ***significati attribuiti al termine***
2) ***formalizzazione del concetto espresso.***

Un altro aspetto linguistico evidenziato in precedenza si riferisce all'uso della congiunzione e in luogo dell'addizione. Ricordo che in altri contesti forse è stato vista la disgiunzione come addizione (approccio insiemistico alle operazioni elementari) e in seguito non è improbabile che lo possano vedere come moltiplicazione. L'uso di proposizione (semplici o articolate) e di connettivi in luogo delle operazioni si ritrova come trasversale in diversi ordini di scuole, per cui è un aspetto su cui vale la pena confrontarsi e accordarsi.

Invito a fare proposte sulla base dell'opportunità didattica.

Infine in V Vicomoscano per evidenziare che i ¾ di una strada misurano 180 m, viene utilizzata la scrittura ¾=180 m
C'è ovviamente una incongruenza, ma lo scopo didattico è evidente: far "sentire" che alla frazione corrisponde una grandezza (o la misura di una grandezza). Intanto si può osservare che, contrariamente ad altri casi, non è stata usata nessuna freccia, come invece sarebbe stato fatto in altre classi. Ciò che rende la scrittura non congrua è che nel termine di sinistra manca la grandezza a cui è applicata la frazione (di fatto si sta scrivendo l'immagine di un elemento attraverso una funzione nella forma f(a)=b), aspetto giustificato dal fatto, nell'ottica dell'insegnate, che tale valore non è noto, cioè è incognito. Potrebbe essere quindi un'occasione per introdurre il concetto di incognita e scrivere l'uguaglianza come equazione:
sx3/4=180 m, dove con s viene indicata la misura della lunghezza della strada da trovare[8].

Analizzare con le colleghe delle medie l'opportunità e la fattibilità di tale indicazione.

[8] Per evitare che, come verrà fatto negli ordini di scuole successivi, l'incognita sia indicata quasi sempre con x (ipostatizzazione), può essere opportuno che il nome dell'incognita rispecchi il contesto semantico a cui si riferisce.

1.5 Scuola Media Inferiore

Elementi a disposizione: colloqui, attività in classe, visione di materiale.
Concetti evidenziati: Frazioni e numeri razionali; operazioni
Attività seguite:
II A Gussola (25-29/10/02): Operazioni con le frazioni
II A Casalmaggiore (22/10-6/11/03): Operazioni con le frazioni
Materiale visionato: Operare con i numeri relativi.
Le osservazioni emerse nelle diverse attività verranno di seguito analizzate in modo globale.

Le frazioni, dalla scuola elementare, sono viste come operatori da un insieme di grandezze a se stesso. Purtroppo (come evidenziato in precedenza) gli aspetti legati al discreto rendono non corretta questa definizione.
Considerazioni generali. Le frazioni come operatori, nel ruolo dell'astrazione, costituiscono la possibilità di modificare le grandezze non attraverso operazioni binarie (e quindi coinvolgendo altre elementi della stessa grandezza), ma semplicemente operando sul singolo elemento.
Il tipo di divisione a cui si fa riferimento (rispetto al denominatore) è quello per contenenza per cui dovrebbe riallacciarsi strettamente all'argomento della divisione visto alle elementari.
Lavorando su grandezze discrete (che, malgrado i limiti, hanno una funzionalità didattica) si può far osservare come gli operatori operino su opportuni valori (quantità?), mentre non lo fa su altri. Ad esempio l'operatore 2/3 opera, se applicato ad un insieme di segmenti misurati in quadretti (senza contemplare sottomultipli), solo sui segmenti espressi da un numero di quadretti multiplo di 3. In sostanza L'operatore "vincola" la tipologia di oggetti (se si lavoro sul discreto), inducendo di fatto l'idea di insieme di definizione di una relazione, visto che in questo caso non si può parlare di funzione (vedi attività III Vic).
Come detto in precedenza, alle medie può essere opportuno, quando è possibile, appoggiarsi al continuo, per evitare di rendere forte l'idea della discretizzazione del continuo che trova poi nel modello del segmento come insieme di punti giustapposti il maggior ostacolo concettuale con cui poi ci si confronta alle superiori e lasciare solo alla cardinalità di insiemi finiti il ruolo del discreto.

Proposta per una riflessione: si potrebbe pensare ad un criterio per stabilire se l'operatore frazione che si sta applicando è applicato al discreto o a grandezze continue (viste impropriamente come discrete). Il criterio potrebbe essere quello di omogeneità: se applicato ad un oggetto e mi permette di ottenere parti dell'oggetto, ho a che fare col continuo (esempio: pizza, torta, segmento, superficie, ecc.); se invece è applicato a insiemi di oggetti e mi permette di ottenere insiemi di oggetti, ho a che fare col discreto. In sostanza si sposta l'attenzione dall'oggetto ad una collezione di oggetti. Si potrebbero così pensare ad attività concordate elementari-medie in questa direzione. Ovviamente la distinzione è piuttosto grossolana e può creare difficoltà con alcuni "enti".
Esempi: parti di una cifra di denaro; misure di segmenti (se un segmento può essere diviso in un numero qualunque di segmenti congruenti, si può dire la stessa cosa della misura? In quale ambito numerico ci si muove, di solito?).

Riflettere sulla proposta e valutarne, in base ai pro e contro, l'applicabilità.

In questa occasione si può far notare come il ruolo delle operazioni con cui si applica l'operatore può cambiare e come non sia detto che, a livello di operatori, frazioni ritenute equivalenti lavorino allo stesso modo.
Ad esempio, se applico a 14 l'operatore 3/7 è indifferente quale delle due "operazioni" (una buona e l'altra cattiva…) indotte dall'operatore faccio per prima; ma se a 14 applico l'operatore 9/21 devo prima fare la moltiplicazione e poi la divisione, contro l'idea intuitiva del numero di parti prese (espresso dal numeratore) a seguito di una suddivisione (espressa dal denominatore).

Vedi anche attività elementari.
Questo deve indurre attenzione non solo all'ordine con cui vengono presentate le operazioni, ma anche alla loro esplicitazione formale; ad esempio riportare operazioni "con la stessa priorità" (come ad esempio 12:6x2) senza fare uso di parentesi, ma rifacendosi alla convenzione che si fa prima l'operazione che , leggendo l'espressione da sinistra a destra si incontra per prima può costituire un ostacolo nella trattazione futura delle proprietà, soprattutto dell'associativa.

Una differenza tra medie ed elementari sul concetto di frazione come operatore, è relativo alle modalità di applicazione. Nelle attività che ho visto alle elementari, l'ordine con cui venivano eseguite le operazioni era vincolante (prima dividi, poi moltiplica). Alle medie non è così: questo passaggio, giustificato che si tende sempre più ad operare sui numeri sganciati da riferimenti semantici (quantità, grandezze, ecc.), va mediato[9].

Una questione che si può inoltre indagare è se c'è una permanenza della frazione (come partizione, contenenza o operatore) sul numero e quando avviene il distacco.

Le operazioni tra frazioni diventano un'esigenza di strutturazione dell'insieme degli operatori con un'operazione. Ad esempio la moltiplicazione di frazioni rappresenta di fatto una composizione di funzioni, così come la addizione di frazioni si configura come una funzione che chiude un particolare diagramma da G a G, "passando" per GxG.
Si aumenta quindi il livello di astrazione in quanto gli "oggetti" su cui si opera sono sempre più legati al contesto matematico.
Attività in cui pur mantenendo gli operatori si cambia l'oggetto a cui sono applicate (ed anzi, come nell'esempio della strada dell'attività di Mara S.) non si esplicita il valore su cui si applica sono funzionali a mostrare come il risultato non solo è indipendente dall'oggetto, ma anche dalla sua misura (dimensione). In questi esempi ciò che conta è che sia sempre chiaro che gli operatori si possono applicare in quel contesto qualunque sia l'oggetto coinvolto.
Il passaggio dalle frazioni ai numeri razionali è strettamente legato a questa strutturazione dell'insieme degli operatori di cui si parlerà in seguito.

Si tratta di vedere se mantenere (e perché) termini come frazioni proprie, improprie, apparenti; la loro radice storica è evidente, ma penso siano non solo superflue nella strutturazione delle frazioni a numeri razionali, ma addirittura dannosi, determinando, come di fatto fanno, una suddivisione impropria e poco funzionale. Questo aspetto è strettamente legato al problema di un linguaggio comune a cui fare riferimento.

1.5.1 Operazioni

Quanto evidenziato in questa fase si ricollega al fatto che le varie operazioni vengono ancora viste come operazioni in sé e non come operazioni legate ad un insieme. Si parla di moltiplicazione e di addizione come se fossero "cose" in sé, senza cioè tener conto del ruolo dell'insieme numerico in cui si va ad operare. Espressioni come "moltiplicazione di una frazione per un intero" oppure "numeri misti" evidenziano questo aspetto. In particolare la prima frase evidenzia l'aspetto assoluto della moltiplicazione, indipendente dagli "oggetti coinvolti". Agli studenti è richiesto che "ci si intenda". Inoltre c'è un'ambiguità sul termine intero (riscontrato anche alle elementari) che può essere visto sia come numero intero (naturale) che come quantità intera (per cui la frazione è usata ancora nell'ottica dell'operatore).

[9] O meglio, va tenuta presente questa differenza fra i due ordini di scuola.

La seconda frase coinvolge invece l'addizione, anche in questo caso applicata a "oggetti" di ambiti diversi: un numero naturale e una frazione (numero razionale). E' chiara l'origine di questi due aspetti, ma in questo modo ci si muove in ambiti diversi, facendo rimanere assoluta l'operazione.
Sarebbe opportuno introdurre il ruolo della definizione di un'operazione (o di un ente matematico in genere) in relazione ad altri enti noti. Così la moltiplicazione tra frazioni potrebbe essere definita attraverso la moltiplicazione in N. Questo dovrebbe avvicinare (aumento di astrazione) all'idea di operazione binaria come funzione da AxA ad A e permettere così un esame "sui comportamenti" degli elementi dei vari insiemi numerici per arrivare gradualmente al concetto di ampliamento di un insieme numerico. Ad esempio si potrebbe definire la moltiplicazione tra due frazioni (al termine delle varie attività) come

$\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{a x c}{b x d}$ dove $\otimes$ è la nuova operazione e x l'usuale moltiplicazione in N. Se identifichiamo i numeri naturali con le frazioni aventi denominatore uguale a uno, si ha che

$\frac{a}{1}\otimes\frac{c}{1}=\frac{a x c}{1 x 1}$, per cui la nuova operazione sui numeri che "si comportano" come i naturali si comporta allo stesso modo della usuale moltiplicazione sui naturali. Questo giustifica l'uso dello stesso simbolo per indicare due operazioni diverse!

Problemi evidenziati:

1) Nella addizione di frazioni è più opportuno

- ***a) calcolare il mcm tra numeri o***
- ***b) fare la moltiplicazione dei denominatori? E' un problema da sviscerare in verticale. Gli aspetti che si contrappongono riguardano:***
  - ***b) abitudine ad entrare nella struttura dei numeri***
  - ***c) economicità concettuale***

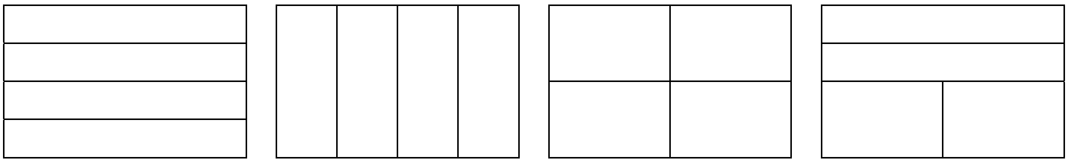
Nella questione del mcm si inserisce l'analogo concetto visto a livello di numeri naturali. E' una buona occasione (come anche per il MCD) per introdurre operazioni non ordinarie e fare riflessioni in merito ad alcune relazioni d'ordine e alle loro proprietà (ad esempio la relazione di divisibilità non è totale, e ci si riallaccia quindi al problema della divisione ed il suo massimo è 0).

2) Il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico sottende un ruolo diverso dei simboli utilizzati.
Ad esempio
"il triplo di quattro" e "il quadruplo di 3" vengono entrambi tradotti con 3x4 e 4x3.
Nell'ottica della proprietà commutativa della moltiplicazione le due scritture sono uguali, ma "nascondono" che la traduzione formale della proposizione "di" nella moltiplicazione fa perdere memoria del fatto che "il triplo di" e "il quadruplo di" sono operatori. Questo è evidente nei problemi in cui i fattori coinvolti hanno "delle marche" (ad esempio moltiplicando cassette con l'operatore mele/cassetta si ottengono delle mele).
Questo tipo di scelta si basa sulla naturalità con cui poi si passa alla moltiplicazione di frazioni, in cui frasi del tipo "1/2 di 3/5" giustifica il prodotto $\frac{1}{2}x\frac{3}{5}$ applicando di fatto gli operatori a degli operatori.
Le espressioni $3x\frac{2}{7}$ e $\frac{2}{7}x3$ (viste come "traduzione") non hanno la stesa valenza (vedi sopra). Viene modificato (e invertito) il ruolo dell'operatore. In particolare nel "triplo di $\frac{2}{7}$" l'operatore è ciò che di norma è l'oggetto (l'intero) su cui la frazione "opera".

Si tratterebbe di osservare chi è l'operatore e su chi opera. Il termine Operazione, in questo caso, con che valenza viene utilizzato? Che moltiplicazione è?
E' opportuno distinguere i casi di moltiplicazioni di frazioni con numeri interi? Perché?

Tali aspetti, tra l'altro, si allacciano alle questioni linguistiche viste in precedenza a proposito delle elementari, con le quali si devono integrare.
3) L'esigenza di fissare visivamente i concetti (molto forte il riferimento all'ambito geometrico visto come ambito "più naturale" per gli alunni rispetto a quello algebrico: semantizzazione, attraverso un modello, dell'algebra e non solo; vedi anche attività delle elementari) deve fare i conti con alcuni aspetti legati soprattutto al pericolo di rendere discreta la geometria. In questo senso il concetto di "parti uguali" rischia di essere legato ad un implicito contratto didattico relativo all'uguaglianza che andrebbe chiarita meglio.(→ linguaggio e glossario)

Per "uguale", quando si fa riferimento a parti di una figura geometrica cosa si intende? L'area o l'isometria? Esempio: in questo rettangolo 4x8 le tre seguenti suddivisione (nell'ottica, per esempio, di trovarne i ¾) portano a parti "uguali"?



Anche in questo caso potrebbe essere utile somministrare questionari in cui si chiede (magari in riferimento a specifiche richieste) quali suddivisioni vengono scelte dagli alunni se se ne chiedono i ¾ (ad esempio non è improbabile che se l'oggetto di cui fare i ¾ è una torta venga scelta con maggior frequenza la seconda suddivisione). Tale attività può essere fatta, magari con modalità simili, sia alle elementari che alle medie.

1.5.2 Insiemi numerici

Strettamente legato al precedente c'è l'aspetto relativo agli insiemi numerici. Spesso vengono presentati come successive inclusioni ($N \subset Z \subset Q$), mentre la strada che porta dall'uno all'altro è connessa al concetto di ampliamento e quindi a quello di isomorfismo.
Questo è un aspetto da trattare e discutere in modo approfondito, in quanto si scontra fortemente con l'idea di insieme numerico come struttura. Il fatto poi che per i ragazzi sia un concetto facilmente assimilabile deve fare riflettere sull'opportunità didattica, visto che poi diventerà un concetto difficilmente sradicabile.
In particolare si dovrà discutere del passaggio dalle frazioni ai numeri razionali e dai numeri razionali (intesi come classi di equivalenza di frazioni) ai numeri decimali (intesi come caratterizzazione a livello "macro" delle classi di equivalenza). Nel confronto dovranno emergere approcci seguiti e difficoltà riscontrate. L'obiettivo è quello di definire gli ambiti in cui dire o non dire certe cose in determinati termini.
Discorso a parte meritano i numeri interi relativi, in cui la presenza del segno diventa controintutiva proprio nell'ottica della quantità. Molta attenzione va fatta nel distinguere i segni dai simboli delle operazioni (addizione e sottrazione). Può essere utile in una prima fase utilizzare simboli completamente diversi e solo successivamente far vedere che ci sono analogie di comportamento che ne giustificano la stessa simbologia. Non dimentichiamo che, utilizzando gli stessi simboli, si chiede all'alunno un livello di astrazione non indifferente, in quanto deve riconoscere che i due simboli hanno significati diversi e gli si chiede di riconoscere questi significati in relazione ad un contesto algebrico che è già di per sé astratto.

1.6 Superiori

Il percorso termina con la trattazione in prima superiore del concetto di operazione in termini di struttura.
Il legame stretto è con quanto visto alla Media Inferiore, quando si è parlato di introdurre le operazioni a partire da operazioni note su un insieme. Inoltre in questa sede dovrebbero convergere tutti gli sforzi fatti per ragionare, quanto più possibile, in termini di funzione negli altri ordini di scuola.

<u>I Geometra (2/4/03)</u>
Le operazioni e le strutture.
L'attività parte da un tema sul concetto di operazione così come è percepito dai ragazzi. Il concetto predominante è quello di operare sui numeri per ottenere altri numeri.
La definizione di operazione (binaria) su un insieme A che viene data è quella di una funzione da AxA ad A (alla coppia (a,b) di AxA fa corrispondere un elemento c di A). Alcuni ragazzi pensano che l'immagine sia a oppure b; in questo dubbio c'è la difficoltà a passare dal concetto di relazione i cui elementi sono coppie a quello i cui elementi sono terne. L'aumento degli elementi del prodotto cartesiano rende meno intuitiva la percezione della funzione, richiedendo, com'è naturale, un livello di astrazione più elevato.
Vengono chiesti esempi di operazione secondo questa definizione. Viene poi fatto l'esempio della media aritmetica tra due numeri in N come esempio di non operazione. Alcuni ragazzi parlano di "certi casi", evidenziando i problemi legati ai quantificatori presenti della definizione di funzione.
Viene messa in evidenza la stretta relazione del concetto di operazione con "l'ambiente" in cui ci si muove, proponendo "l'invenzione" di leggi per avere operazioni (es. $a/b \oplus c/d = (a+d)/(b+d)$ in Q).
In questo modo si possono inventare "tutte le operazioni che si vuole".

Potrebbe essere opportuno riflettere con i ragazzi del perché se ne "inventano" alcune e non altre e cosa le rende significative.

Seguono esempi per verificare se alcune relazioni su insiemi numerici (es. Z) individuano delle operazioni e di quali proprietà godono (si fa riferimento ad associativa e commutativa).
Come esempio notevole, si analizza la struttura di Z, definito come insieme quoziente di una particolare relazione di equivalenza su NxN.

La struttura di fondo di questo aspetto dell'algebra ormai astratta, è che le operazioni elementari sugli insiemi numerici noti (ma basta in fondo N), diventano "macchine" per generare altre operazioni. Questa forma di libertà può spiazzare lo studente che rischia di non percepirne la finalità. Tipica, a questo proposito, la risposta alla domanda
"Che tipo di difficoltà incontrate?"
R: "Faccio fatica ad applicare la definizione"

Analizzare la risposta fornita in relazione alle difficoltà presunte.

Nel prosieguo dell'attività, è stata privilegiata l'idea di studiare particolari leggi per vedere se portavano, su quell'insieme, a operazioni, oppure si sono viste le proprietà delle operazioni di una struttura come generalizzazioni di operazioni specifiche su particolari insiemi numerici?
In quale direzione si intende andare?

2. Attività future e prosecuzione lavoro.

Dalle osservazione fatte si è evidenziato in più occasioni uno stretto legame tra gli argomenti presentati e gli aspetti teorici coinvolti. Da parte di diverse docenti è emersa quindi l'esigenza di una formazione mirata all'acquisizione di competenze specifiche in tal senso.

Nello specifico, si ritiene che l'attività futura del gruppo si possa fondare sulle risposte alle seguenti richieste:

1) Glossario dei termini usati nei vari contesti e successiva ricerca di termini comuni con legami tra le definizioni.
   Esempio: numero (insieme numerico), operazione, operatore, frazione, grandezza, quantità, intero, uguaglianza/uguale. Proposte di altri termini.
2) Integrazione e interazione di attività proposte in ordini di scuole diverse.
3) Lavoro in gruppi ristretti di insegnanti di ordini di scuole contigui per la produzione di attività di raccordo
4) Esplicitare a colleghi/e di ordini di scuola diverse le proprie esigenze (indicazioni di opportunità sulle varie proposte fatte) e le proprie disponibilità[10]
5) Proposte didattiche di attività coordinate a partire da quelle viste e analizzate.
6) Mettere in evidenza i concetti poco noti che si ritiene debbano essere approfonditi con l'esperto.

2.1 Sintesi delle consegne

Di seguito si riportano le sintesi delle osservazioni presenti nel testo (tra parentesi, la classe o l'ordine di scuola in cui si è posta), da svilupparsi, possibilmente, da parte di tutti gli insegnanti del gruppo, indipendentemente dall'ordine di scuola coinvolto nella richiesta.
Le sintesi sono state raggruppate, per comodità di consultazione, in tre macro temi, pur non essendo sempre così netta la loro collocazione.
Non sono riportate le richieste presenti nel paragrafo 1.4 ritenendo tutto il paragrafo fondamentale in un'ipotesi di confronto.

2.1.1 Operazioni

a) *Poiché l'attività di I Elementare è stata portata avanti contemporaneamente con una rappresentazione grafica, il dubbio che ci si è posti è: vale la pena, nello scambio, considerare gli stessi animali o animali diversi; cioè, è meglio sganciare la quantità dalla qualità o in prima istanza procedere in analogia? Aspetto da approfondire in sede di discussione e in sede di attività future. (I Elementare)*

b) *Dubbio 1. Perché non vengono proposti esempi con resto? E' successo che, in casi di divisioni "con resto" (ad esempio una distribuzione di caramelle che non sia multiplo del numero di bambini) qualche bambino abbia detto "non si può fare"? Non è un'occasione per mostrare la differenza tra quelle che vengono "definite" operazioni: alcune si possono sempre fare altre no?*
   Dubbio 2. I due tipi di divisione (partizione/contenenza) mi sembra portino a condizioni, anche per i bambini, diverse. (II Elementare)

---

[10] Esempio: le colleghe delle elementari hanno proposto diversi algoritmi per la divisione. Che strada prendere? A questa risposta dovrebbero concorrere tutte le insegnanti, sulla base delle rispettive esigenze, per arrivare ad una scelta comune e condivisa.

c) *Un'attività che si può valutare se vale la pena fare è quella di proporre problemi che abbiano lo stesso numero di elementi coinvolti, ma oggetti diversi, per vedere se le risposte, rispetto al resto, dei bambini mutano. Ad esempio, il problema delle macchinine può essere sostituito con dei fiori da mettere in un vaso (3 per vaso); non è improbabile che i maschi rispondano in modo diverso rispetto ai vasi e alle scatole necessarie. (II Elementare)*

d) *Credo (ma è un aspetto su cui confrontarci) che diverse difficoltà sulla divisione siano legare ai due registri della divisione per contenenza e per ripartizione.*
Si potrebbe allora procedere presentando in parallelo tipologie di problemi che richiamino entrambe le modalità. (II Elementare)

e) *Si tratta di valutare se introdurre con attività operazioni tipo DIV (dati due numeri interi a e b, con b non nullo, fornisce il quoziente della divisione di a per b) o MOD (nelle ipotesi precedenti, fornisce il resto della divisione), in accordo con quanto fatto alle superiori. (Elementari II ciclo)*

f) Nel gioco di compravendita o bambini usano espressioni del tipo
"due monete da 50 c€ e una da 10 c€ " oppure "1 € e 10 c€.
Dubbi: L'uso della congiunzione al posto dell'operazione può creare problemi? A che livello?
Il tipo di operazione richiesta (che si configura come una addizione) in quale contesto numerico si colloca?
Anche il libro di testo usa la dizione "2 unità e ……". Si tratta di vedere come configurarlo (vedi aspetto linguaggio). (III Elementare)

g) Il bambino interpellato chiama fuori 4 bambini. In questa azione è evidente la confusione, segnalata anche dall'insegnante, tra denominatore e risultato. In questa confusione può esserci una non chiara differenza tra divisione per partizione e divisione per contenenza. *Approfondire le cause di questo tipo di errore sulla base della propria esperienza o di considerazioni didattiche. (IV Elementare)*

h) 1) Nella addizione di frazioni è più opportuno
- *a) calcolare il mcm tra numeri o*
- *b) fare la moltiplicazione dei denominatori?*

E' un problema da sviscerare in verticale. Gli aspetti che si contrappongono riguardano:
- *a) abitudine ad entrare nella struttura dei numeri*
- *b) economicità concettuale* *(Medie)*

i) Le espressioni $3x\frac{2}{7}$ e $\frac{2}{7}x3$ (viste come "traduzione") non hanno la stesa valenza (vedi sopra).
Viene modificato (e invertito) il ruolo dell'operatore. In particolare nel "triplo di $\frac{2}{7}$"
l'operatore è ciò che di norma è l'oggetto (l'intero) su cui la frazione "opera".
Si tratterebbe di osservare chi è l'operatore e su chi opera. Il termine Operazione, in questo caso, con che valenza viene utilizzato? Che moltiplicazione è?
E' opportuno distinguere i casi di moltiplicazioni di frazioni con numeri interi? Perché? (Medie)

j) Potrebbe essere opportuno riflettere con i ragazzi del perché si "inventano" alcune operazioni e non altre e cosa le rende significative. (Superiori)

k) R: “Faccio fatica ad applicare la definizione”
Analizzare la risposta fornita in relazione alle difficoltà presunte. (Superiori)

2.1.2 Frazioni

a) Il concetto di frazione equivalente è uno di quelli, in generale, da mettere a posto e su cui lavorare, anche con attività. L'impressione è che, in ogni ordine di scuola, le frazioni vengano classificate come equivalenti in relazione al risultato ottenuto se applicate ad una quantità. In sostanza il concetto non viene posto come relazione di equivalenza tra frazioni. Il criterio di applicazione alle quantità può comportare non pochi problemi.

b) A proposito di frazioni equivalenti, riporto un suggerimento del Prof. Marchini:
Il concetto di frazioni equivalenti (o di rapporti) ha più modi di essere espresso:
a) n/m = p/q sse nq = mp (W.R. Hamilton)
b) n/m = p/q sse per ogni intero u tale che m divida nu e q divida pu, si ha (in Z) nu/m = pu/q (Peano)
c) n/m = p/q se per ogni coppia ordinata di numeri naturali (h,k) se hn > km (risp. < o =) , allora anche hp > kq (risp. < o =) (Eudosso – Euclide).
Per il prossimo anno provare quello che può andare meglio. Notate che quello di Eudosso – Euclide è applicabile anche a rapporti di grandezze, non solo a numeri razionali.

c) Il problema che viene successivamente posto è come scrivere, senza usare i simboli, ma solo con i “numeri” 1/100?
Riflessione: in questa domanda c'è una distinzione tra frazione e numero? Cosa rappresenta l'uno e cosa l'altro? (IV Elementare)

d) Una successiva discussione porta ad individuare il numero da scegliere nel denominatore della frazione. In sostanza si stabilisce un criterio di scelta che permette di individuare in modo univoco tale numero.
Riflessione: Divisione e frazione possono creare conflitto? Lavorando con le frazioni, non si chiede loro di “tornare indietro”? (IV Elementare)

e) Un alunno viene chiamato alla lavagna per individuare l'intero di cui 80 kg costituisce i 3/6. L'alunno trova difficoltà a dividere 80 per 3, per cui la maestra cambia il dato relativo alla massa in 90 kg.
Le considerazioni che si possono fare sono relative al tentativo di dare risposte a domande del tipo:
1) *cosa si intende per frazione equivalente?* (→ dare una definizione di frazione equivalente – vedi glossario – e cercare una definizione comune – vedi linguaggio);
2) *vale la pena rendere tutti i problemi possibili?* (un percorso alternativo, con numeri “brutti” può portare a interessanti aperture verso il concetto di approssimazione);
3) *nel caso specifico, si poteva introdurre la necessità dell'uso di frazioni equivalenti cioè frazioni che “pur comportandosi allo stesso modo” sono più “comode” di altre in contesti specifici* (→ produzione di attività per la ricerca, se esistono, di frazioni equivalenti “comode” in un determinato problema”; ricerca di criteri di esistenza; ecc). *(V Elementare)*

f) Proposta per una riflessione: si potrebbe pensare ad un criterio per stabilire se l'operatore frazione che si sta applicando è applicato al discreto o a grandezze continue (viste impropriamente come discrete). Il criterio potrebbe essere quello di omogeneità: se applicato ad un oggetto e mi permette di ottenere parti dell'oggetto, ho a che fare col

continuo (esempio: pizza, torta, segmento, superficie, ecc.); se invece è applicato a insiemi di oggetti e mi permette di ottenere insiemi di oggetti, ho a che fare col discreto. In sostanza si sposta l'attenzione dall'oggetto ad una collezione di oggetti. Si potrebbero così pensare ad attività concordate elementari-medie in questa direzione. Ovviamente la distinzione è piuttosto grossolana e può creare difficoltà con alcuni "enti".
Esempi: parti di una cifra di denaro; misure di segmenti (se un segmento può essere diviso in un numero qualunque di segmenti congruenti, si può dire la stessa cosa della misura? In quale ambito numerico ci si muove, di solito?).
Riflettere sulla proposta e valutarne, in base ai pro e contro, l'applicabilità. (Medie)

g) *Una differenza tra medie ed elementari sul concetto di frazione come operatore, è relativo alle modalità di applicazione. Nelle attività che ho visto alle elementari, l'ordine con cui venivano eseguite le operazioni era vincolante (prima dividi, poi moltiplica). Alle medie non è così: questo passaggio, giustificato che si tende sempre più ad operare sui numeri sganciati da riferimenti semantici (quantità, grandezze, ecc.), va mediato*[11].
Una questione che si può inoltre indagare è se c'è una permanenza della frazione (come partizione, contenenza o operatore) sul numero e quando avviene il distacco. (Medie)

h) *Si tratta di vedere se mantenere (e perché) termini come frazioni proprie, improprie, apparenti; la loro radice storica è evidente, ma penso siano non solo superflue nella strutturazione delle frazioni a numeri razionali, ma addirittura dannosi, determinando, come di fatto fanno, una suddivisione impropria e poco funzionale. Questo aspetto è strettamente legato al problema di un linguaggio comune a cui fare riferimento. (Medie)*

2.1.3 Rappresentazioni e modelli

a) *Dubbio: con la rappresentazione grafica [relativa all'attività con gli Euro] (oltre tutto di carattere geometrico) non c'è "un passo indietro" (pur essendo evidente l'esigenza di riportare l'attività ad un modello noto)? (III Elementare)*

b) "Se <u>metto insieme</u> 10 monete di un centesimo, <u>ottengo</u> una moneta che <u>corrisponde</u> a 10 di queste?"
Analizzare la frase con particolare riferimento ai termini sottolineati. (III Elementare)

c) Viene chiesto ai bambini dove collocare 1/10 nella tabella dei numeri. Per aiutarli a rispondere, viene suggerita una trasposizione di concetti: dalle lunghezze alle frazioni decimali. Il modello di riferimento è noto ai bambini.
Come è stato introdotto? Con quali mezzi? Quale ruolo assunto dall'ambito fisico? (IV Elementare)

d) *Per "uguale", quando si fa riferimento a parti di una figura geometrica cosa si intende? L'area o l'isometria? Esempi rettangoli.*
Anche in questo caso potrebbe essere utile somministrare questionari in cui si chiede (magari in riferimento a specifiche richieste) quali suddivisioni vengono scelte dagli alunni se se ne chiedono i ¾ (ad esempio non è improbabile che se l'oggetto di cui fare i ¾ è una torta venga scelta con maggior frequenza la seconda suddivisione). Tale attività può essere fatta, magari con modalità simili, sia alle elementari che alle medie. (Medie)

[11] O meglio, va tenuta presente questa differenza fra i due ordini di scuola.