Il problema della verticalità

Maffini Achille
Liceo Scientifico Ulivi (PR)

I problemi della verticalità: una consegna

- Quali problemi individui nella costruzione di un curricolo veramente verticale?
- Su quali aspetti specifici (contenuti, modalità di lavoro, materiale utilizzato, finalità, ecc.) senti più l'esigenza di un confronto con colleghi di altri ordini scolastici?
- Nella tua esperienza scolastica, quali sono i concetti o gli aspetti che hanno fatto più problema (sempre nell'ottica della verticalità)?
- Quali sono, secondo te, i nuclei fondanti che dovrebbero essere posti alla base di un curricolo verticale?
- Che ruolo riveste il linguaggio specifico nella costruzione del curricolo e nel confronto con i colleghi di scuole di ordini diversi?

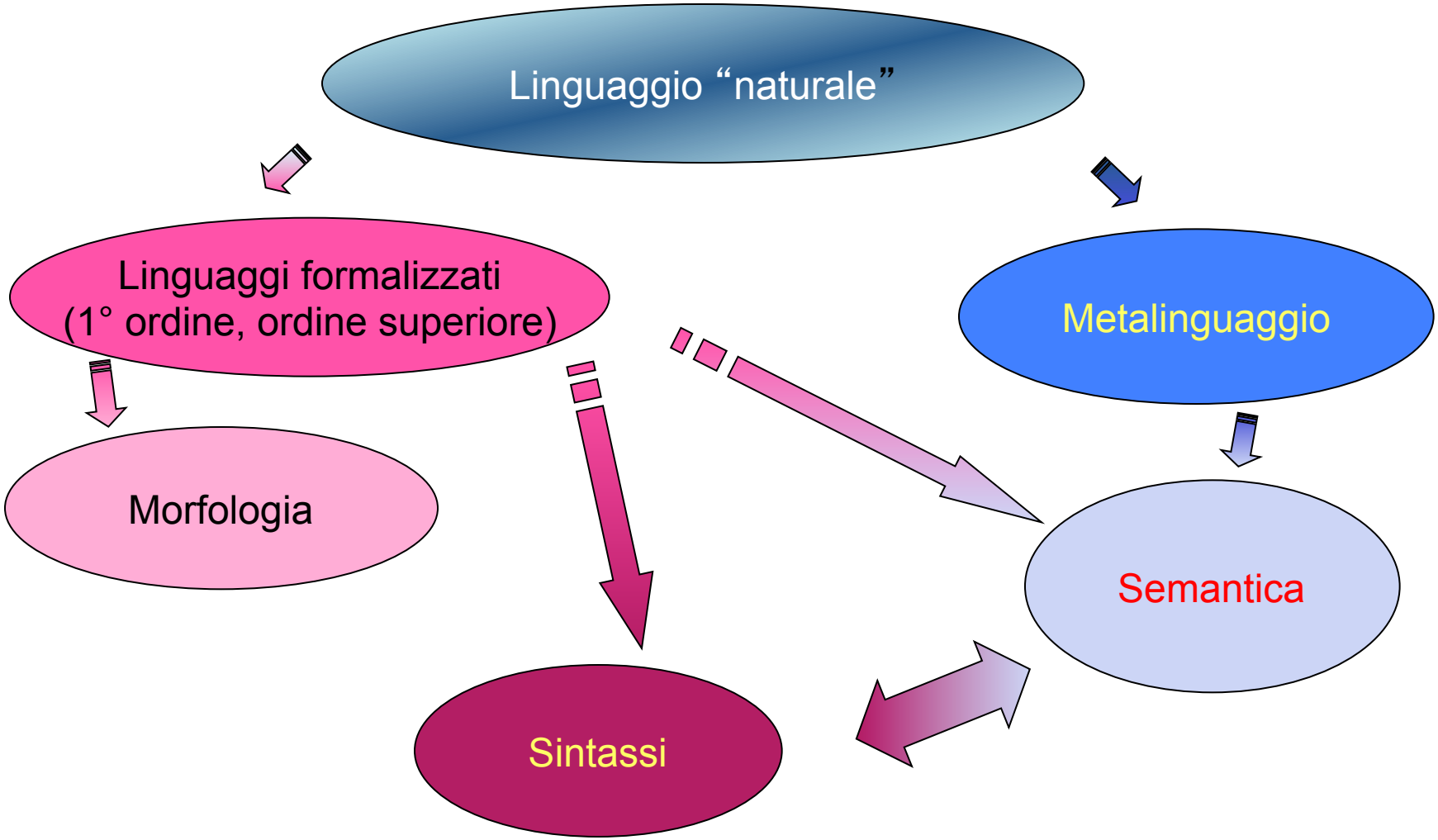
Un tentativo di risposta: mate.con

- Corso Mate.con organizzato dalla Prof.ssa Garofani dell' Istituto D' Arzo di Montecchio Emilia
- Partecipanti:
  - Scuola Primaria: 10
  - Scuola secondaria di primo grado: 11
  - Scuola secondaria di secondo grado: 14
- Finalità: favorire il raccordo tra scuole di diversi gradi scolastici afferenti all' Istituto D' Arzo

Gli ambiti della logica e la trasversalità: le finalità del corso

- Logica e pensiero comune: l'ambiguità di un termine
- Il ruolo del linguaggio nella matematica: una risposta al ruolo del linguaggio nella verticalità
  - Matematica come linguaggio del rigore ma…
  - … sottointesi impliciti nella comunicazione matematica

Il problema della logica matematica: lo schema di riferimento per il corso (Prof. Marchini)



Gli ambiti della logica matematica: la struttura del linguaggio

Alcuni temi trattati

- Morfologia
  - espressione
- Linguaggio logica
  - Connettivi
  - quantificatori
- Sintassi e semantica
  - Il problema del senso e del significato
- Il ruolo dell'uguale
  - Le equivalenze
  - Uguaglianza e relazioni di equivalenza
- La geometria tra sintassi e semantica

Gli aspetti morfologici

- Il ruolo della morfologia in matematica: gli aspetti sottointesi
- Il rapporto morfologia-fonologia
- Il riconoscimento delle "parole": un primo passo verso … che cosa?
- Il quale ambito (morfologico o fonologico) ci si muove?
- Chi dà "dignità" ad una stringa?
- Cosa sa l'insegnante e cosa sa lo studente?

Esempio di attività:

- Individuare, dai libri di testo o dalla propria esperienza, cos' è una espressione.
- Stabilire quale ruolo viene svolto da = nella semplificazione di una espressione
- Linguaggio e metalinguaggio: il ruolo dell' uguale

Le risposte della scuola primaria a "cos'è un'espressione"

- Le risposte delle insegnanti:
  - Catena di operazioni
  - Formula con lettere e numeri
  - Enunciato
  - Rappresentazione
  - Scrittura di lettere e numeri con operazioni
- Possibili letture delle risposte
- La definizione ricorsiva di espressione

Esercizi e lavori propedeutici

- Individua, nella tua prassi didattica, i termini di uno specifico "ambito", dopo aver specificato quest'ultimo.
- I termini per ordini di scuole: l'abitudine al controllo
  - Le "cornicette" e le "seriazioni"
  - L'individuazione e l'analisi di "scritture" matematiche
  - Le parole di alfabeti specifici.
- Le espressioni "ambigue"
- Gli errori a livello morfologico: l'attenzione alle "scritture".
- Il gioco delle targhe: codificare una regola per la costruzione delle stringhe "targhe automobilistiche".

Dai termini alle formule: ancora morfologia?

- Consegna: cos’è una “formula”? (E5a, M2c)
- Predichiamo sui termini: le formule atomiche
- Dalle “parole” alle “frasi”.
- Il ruolo dell’uguale (E7)
- I connettivi a livello morfologico
- Dal linguaggio naturale ai connettivi (E1)
- La congiunzione e il tempo
- La disgiunzione e la causalità (“*Chiudo il contratto oppure sono rovinato*”)
- Il ruolo dell’implicazione: dalla causalità (implicazione logica) al connettivo (implicazione materiale)

L'implicazione

- La causa/effetto in matematica esiste? (E7)
- Dalla implicazione causale alla implicazione materiale.
- Come passare all'implicazione materiale?
  - Motivazione data da un'insegnante: "*verità di un teorema: se le ipotesi sono false, il teorema deve comunque essere vero*".
- Perché l'implicazione materiale?
- Il ruolo dell'implicazione nella definizione; cos'è una definizione?
- Definizione di circonferenza nei vari ordini di scuole (E8: *Linea curva chiusa i cui punti sono equidistanti da un punto interno detto centro.*)
- Consegna: cercare definizioni e vederne la struttura

Andiamo oltre: alcuni esempi

- Un alunno svolge l'esercizio
- In un triangolo isoscele vi sono due angoli congruenti
- Uno di voi mi tradirà
- Se un numero è divisibile per 10 allora è divisibile per 2 e per 5
- Un numero naturale o è pari o è dispari.
- Se n è pari allora n=2k, con k∈N (quantificatori e parametri: ST1a)
- Ci sono numeri naturali primi

Altri esempi

- Nell'addizione (in N) il risultato rispetto agli addendi è sempre ..... (esercizio Scuola Primaria)
- Nel triangolo equilatero, baricentro, circocentro e incentro coincidono.
- Il minimo comune multiplo tra due numeri a e b è .....
- Due insiemi tra i quali si possa stabilire una corrispondenza biunivoca si dicono equipotenti (Pellerey)
- Una circonferenza ha il centro nel punto (-3;0) e raggio di misura 5. Scrivere l'equazione della circonferenza... (anche ST3a)
- Si dice radice n-esima di a, e si indica $\sqrt[n]{a}$, quel numeri reale positivo la cui potenza n-esima è a (Palladino)
- Un rombo ha le diagonali perpendicolari
- Tutte le proprietà di un rombo sono anche proprietà di un quadrato

Esempi dai testi: quali quantificatori?

6 **T** **Il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.**

In simboli $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \qquad a \in R^+,\ a \neq 1,\ m \in R^+,\ n \in R^+$ (4)

Il grafico evidenzia chiaramente che, per la periodicità della funzione seno, le soluzioni dell'equazione sono *infinite*; la situazione è analoga se trattiamo equazioni nella forma:

$$\cos x = k \quad (k \in [-1, 1])$$

oppure:

$$\operatorname{tg} x = m \quad (m \in \mathbb{R})$$

2. *Risolvere l'equazione*: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si tratta di una equazione elementare nella funzione coseno: procederemo in modo del tutto analogo all'
pio 1. Scegliamo di rappresentare la funzione $y = \cos x$ nell'intervallo di periodicità $-\pi \leq x \leq \pi$ (figura

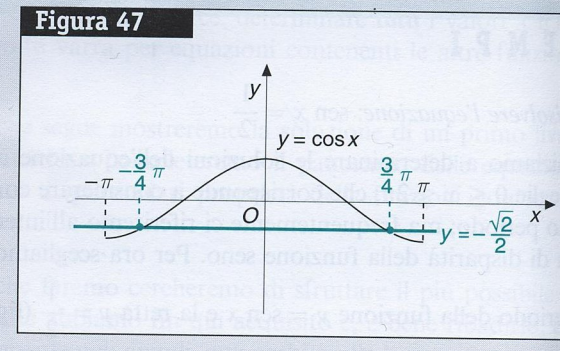
Sappiamo che $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il coseno di un angolo noto, $\frac{3}{4}\pi$; la simmetria della funzione $y = \cos x$ rispetto a

se delle ordinate nell'intervallo scelto permette di leggere $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ anche come il coseno di $-\frac{3}{4}\pi$. Ci sono dunque anche in questo caso due soluzioni dell'equazione in un intervallo di periodicità; tutte le altre infinite soluzioni dell'equazione assegnata saranno ottenute da queste sommando multipli interi del periodo 2π.

Anche in questo caso si indicano sinteticamente le due infinità di soluzioni con la scrittura:

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ \cup \ x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Figura 47



Analisi quantificatori: cosa sa l'insegnante, cosa sa l'alunno

- Il ruolo e l'ambiguità dell'articolo indeterminativo: l'esigenza di un riferimento contestuale
- Esistenza e unicità: il passaggio "implicito" dall'articolo indeterminativo all'articolo determinativo.
- L'articolo determinativo come connotazione.
- L'eliminazione dell'ambiguità: verso un linguaggio meno ambiguo
- I quantificatori sui libri di testo:
  - Individua, sui libri, definizioni, teoremi o altro coinvolgenti i quantificatori, specificando il quantificatore coinvolto.
  - Individua proposizioni coinvolgenti l'articolo determinativo o l'articolo indeterminativo.
- Come vengono "motivate" tali affermazioni?
- Quantificatori e proprietà: dal particolare al generale
- Una significativa differenza numerica: la proprietà associativa
- Il tempo e i quantificatori: "sempre" (E2)
- La risposta diligente alla richieste dei libri di testo: la definizione di addizione (E2)
- Quantificatori e non (E1)

La struttura delle proposizioni contenenti quantificatori

- La struttura delle proposizioni quantificate universalmente
- La struttura delle proposizioni quantificate esistenzialmente
- I quantificatori relativizzati: le difficoltà delle insegnanti

Quantificatori e negazione

- Dal generale al particolare e viceversa.
- Il diverso ruolo della verifica e della dimostrazione
- Ma cos’è una dimostrazione?
- Si deve cambiare ambito: dal linguaggio alla sua strutturazione…..

Consegna

- I termini “senso” e “significato” compaiono spesso in matematica in frasi del tipo “(non) ha senso” o “perde di significato”.
- Individua ambiti ed esempi specifici in cui vengono utilizzate tali espressioni e con quale valenza.

Senso e significato

- In quali contesti vengono usate espressioni del tipo "non ha senso"? Es1
- Segno, denotazione, senso: su quali piani ci si muove?
- Alcuni esempi: E1, E3f
- Il ruolo del significato: in quali contesti si parla di perdita di significato? Es2

Semantica

- Il significato e il concetto di funzione
- L'uso (e abuso) delle frecce: riconoscerne la tipologia
- Un lavoro sulle operazioni: esempio di semanticità gestita alla scuola Primaria generalmente in modo sintattico
- Relazioni e semantica
- Equazioni alla scuola elementare

Giochi come ambienti sintattici

- La dama e le sue regole
- Ma anche … la briscola e le sue regole
- Cosa sono le regole di un gioco?
- Come sono i giochi?
  - Giochi a configura iniziale fissata e a configurazione finale variabile (es.: scacchi, dama, othello, ecc.)
  - Giochi a configurazione iniziale variabile (ma riconoscibile) e a configurazione finale fissata (es.: bridge e giochi di carte in genere, sudoku, ecc.)
  - Tutti a configurazione finita (una delle "regole" ne fa individuare la fine)
- Come riconoscere le configurazioni compatibili?
  - Il problema del senso

I giochi come contesti sintattici

- Il ruolo delle "regole": comandi o motivazioni di scelte?
- Il ruolo dei termini primitivi
- La partita "giocata": le configurazioni e le motivazioni.
- Un esempio: una partita a scacchi
- Esercizio 1: codificare le regole di un gioco, dopo aver individuato i termini ritenuti primitivi
- Esercizio 2: far svolgere una partita al gioco dell'oca. Far riportare dopo ciascun lancio la casella d'arrivo e a sinistra la "giustificazione" (uscita dado, primi, penalità, ecc.) che motiva tale posizione.

I ruoli dell'uguale

- Uguale come simbolo morfologico: quante "forme" per l'uguaglianza?
- Uguale come simbolo definitorio (M1)
- L'uguaglianza sul piano sintattico: le "proprietà" della relazione di uguaglianza (S-Pal)
- L'uguaglianza sul piano semantico: equazioni e… (E4-pan)
- ..le equivalenze: di cosa predicano l'uguaglianza? Di nuovo il senso
- Le relazioni di equivalenza come forme di uguaglianza (MFlac2, E3-pan)
- Esempi vari: E4f, FrazM, FrazS
- Consegna1: esaminare uguaglianze presenti in contesti vari e stabilirne la tipologia
- Consegna2: stabilire le relazioni di equivalenza presenti in specifici contesti di uguaglianze.

Le relazioni (necessarie ma) pericolose

- La risoluzione dei problemi
- Operazioni
- Geometria
- Aspetti sintattici e semantici presenti in un testo di geometria della scuola primaria: un esempio
- Relazioni, funzioni (corrispondenze)

I nuclei fondanti nella costruzione di un curricolo: una proposta

- Concetti (anche impliciti) di relazione e di funzione
- Il ruolo semantico come ricerca di significati (matematici)
- Il linguaggio come struttura del sapere matematico (oltre che della matematica)

Ringraziamenti

- A tutte/i per la pazienza e la partecipazione

- “La capacità di costruire nuovi modelli deriva dalla capacità umana di cogliere situazioni attraverso vari aspetti che possono essere ricombinati e riorganizzati per creare nuove situazioni. Come cogliere, riorganizzare e comunicare i singoli aspetti ed intere nuove situazioni? Ovviamente attraverso il linguaggio.”

  (R. Ferro, “La logica dei logici”, IMSI 16, n.11-12, 1993)
- Il rapporto tra semiotica e noetica.

Quali difficoltà?

e) uno studente ha scritto:

$$x > 13 = 26 + 4x$$

A questo punto, l'ho chiamato alla lavagna per discutere la sua proposta con gli altri studenti.

In un primo momento, questa espressione non ha creato problemi a nessun studente e, solo dopo aver chiesto alla classe di indicarmi quale operazione avrei dovuto fare per prima, mi è stato risposto che, forse, la scrittura non era corretta.

6 Completa ciascuna sequenza dei numeri tenendo conto dei segni di maggiore, minore e uguale.

165 < ..... > .... > 27 > .... = ... < ..... > .....

..... < 345 > .... < ..... = ... = ... > ..... < .....

… ma anche …

$$N = 3x^2 + x - 4 > 0 \longrightarrow x < -\frac{4}{3} \quad \vee \quad x > 1$$

$$D_1 = x - 2 > 0 \longrightarrow x > 2; \quad D_2 = 1 - 3x > 0 \longrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Un esempio di linguaggio del primo ordine

- L'alfabeto $\mathcal{A}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ è costituito dai seguenti insiemi a due a due disgiunti:
- a) un insieme $\mathcal{C}$, eventualmente vuoto, di **costanti individuali**, che indicheremo con a_1, a_2, a_3,... In genere però si usano le prime lettere dell'alfabeto italiano (a, b, c, ..) anziché usare indici;
- b) un insieme numerabile $\mathcal{V}$ di **indeterminate (variabili individuali)** x_1, x_2, x_3,... (solitamente si usano le ultime lettere dell'alfabeto inglese x, y, z):
- c) l'insieme $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ dei **connettivi** che si chiamano, nell'ordine, "non", "e", "o", "implica" e "equivale";
- d) l'insieme $\{\forall, \exists\}$ dei **quantificatori** che si chiamano "quantificatore universale" e "quantificatore esistenziale";
- e) l'insieme $\{(\ ,\ ),\ ,\}$ dei **simboli ausiliari** ("parentesi aperta", "parentesi chiusa" e "virgola");
- f) per ogni n>o, un insieme, eventualmente vuoto, $\mathcal{P}$n , di **predicati n-ari**, (solitamente indicati con le lettere A, B, C, ...);
- g) per ogni n>o, un insieme, eventualmente vuoto, $\mathcal{F}$n, di elementi detti **simboli funzionari n-ari**, solitamente indicati con le lettere f^{n1}, f^{n2},..(in genere si usano le lettere f, g, h,..)

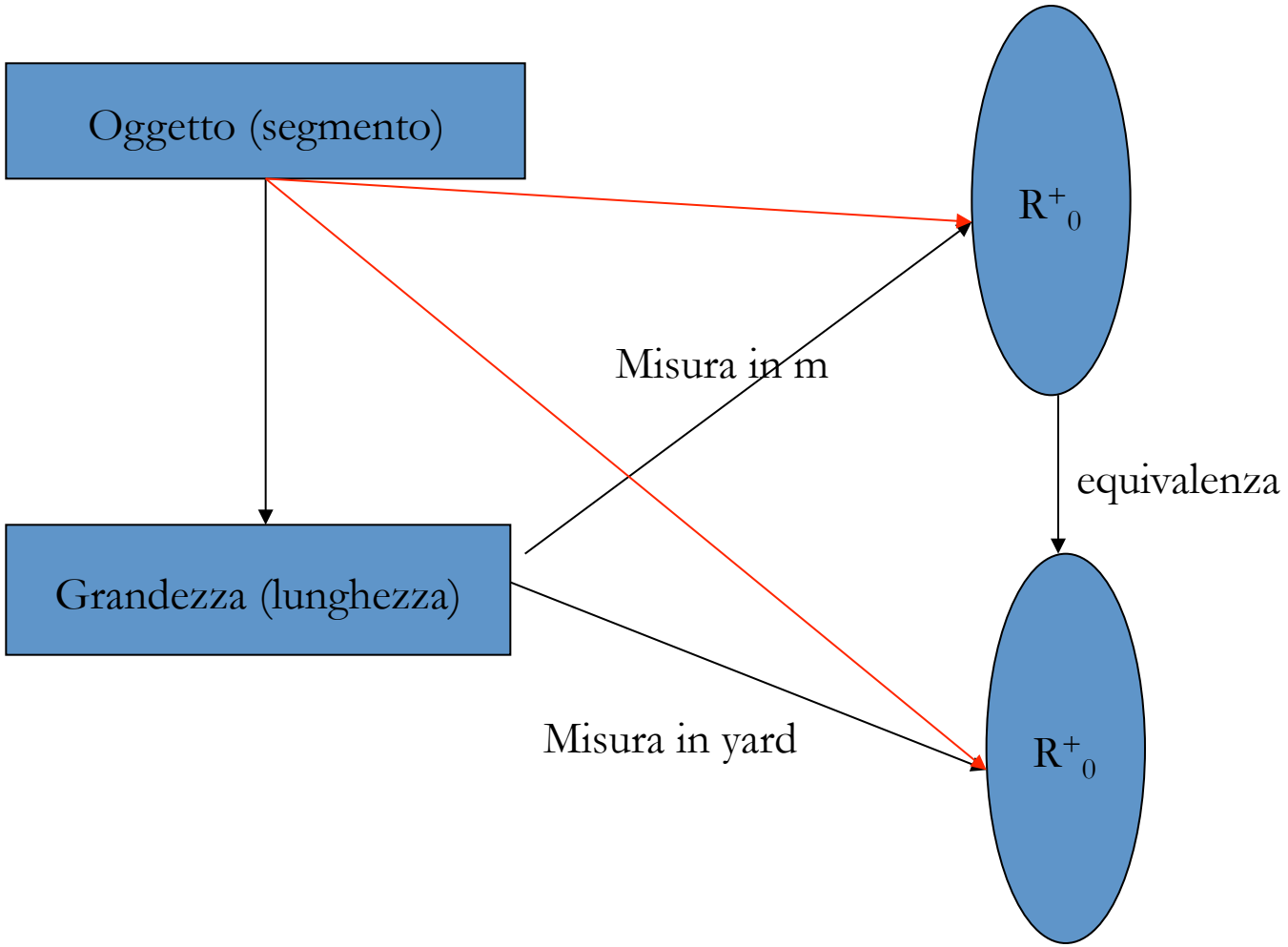
I termini

- Definizione
  - ogni costante individuale è un termine;
  - ogni indeterminata è un termine
  - se $t_1, t_2, .., t_n$ sono termini ed f^n è un simbolo funzionale n-ario allora $f^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è un termine
  - Nient' altro è un termine
- La struttura "ad albero" dei termini

Le formule ben formate

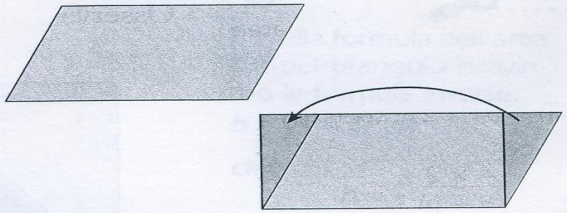
- Sia P un predicato n-ario e siano $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ termini; $P(t_1, t_2, t_3, \ldots t_n)$ è detta **formula atomica**.
- Diremo che una stringa del linguaggio L è una **formula ben formata** (più brevemente fbf) se è definita dalle seguenti clausole:
  - ogni formula atomica è una fbf;
  - se A e B sono fbf allora $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sono fbf;
  - se A(x) è una fbf, essendo x una indeterminata (variabile) libera in A, allora $\forall x(A(x))$ e $\exists x(A(x))$ sono fbf;
  - nient'altro è una fbf.
- Il problema della definizione di indeterminata libera
- Il ruolo e l'importanza dei nomi: formula
- Esempi di formule ben formate nel linguaggio naturale e nel linguaggio matematico

Equivalenze
(sensi diversi per stessa denotazione)



Parallelogrammo o romboide

Per calcolare quanti quadretti di 1 cm^2 occorrono per ricoprire la superficie di questo parallelogrammo, dobbiamo prima trasformarlo in un rettangolo equivalente (cioè che ha la stessa superficie).



Osserva il disegno: il rettangolo ottenuto ha la stessa base e la stessa altezza del parallelogrammo di partenza.

Area del parallelogrammo

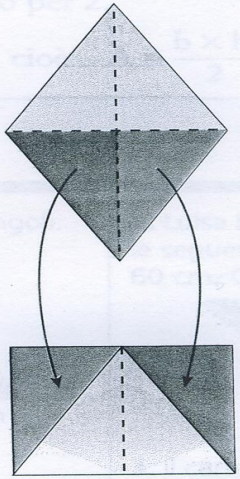
Si ottiene moltiplicando la misura della base (b) per la misura dell'altezza (h).

Formula: $A = b \times h$

Rombo

Anche in questo caso, trasformiamo il rombo in un rettangolo equivalente.

Osserva il disegno: il rombo è equivalente a un rettangolo avente per base una diagonale del rombo (in questo caso la diagonale minore) e per altezza metà dell'altra diagonale (in questo caso la diagonale maggiore).



Area del rombo

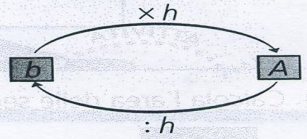
Si ottiene moltiplicando tra loro le misure delle diagonali e dividendo poi il risultato per 2.

Formula: $A = (D \times d) : 2$ cioè $A = \frac{D \times d}{2}$

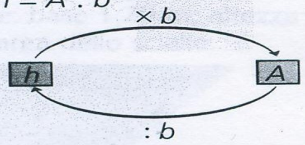
APPROFONDIMENTI

- Dalla formula dell'area del parallelogrammo si possono ricavare le formule inverse.

$b = A : h$



$h = A : b$



- Dalla formula dell'area del rombo ricaviamo le formule inverse.

$D = (A \times 2) : d$

cioè

$$D = \frac{A \times 2}{d}$$

$d = (A \times 2) : D$

cioè

$$d = \frac{A \times 2}{D}$$