La verità in matematica

Achille Maffini[1]

0. Una foto, per cominciare

In questa foto, scattata nel 1954 a Princeton, molti riconosceranno il personaggio di destra, mentre pochi, suppongo, quello di sinistra. Per il momento, ritenetela un regalo; per coglierne appieno lo spirito, vi chiedo di attendere le conclusioni del presente lavoro.

1. Matematica e realtà

Non è inusuale utilizzare o sentire, soprattutto a livello di concezioni legate ad una sorta di "immaginario collettivo", frasi del tipo:

- *E' matematico*
- *La matematica non è un'opinione*
- *2 più 2 fa quattro*

oppure considerare l'affidabilità di una scienza in base alla sua "matematicità". Infine chi insegna matematica almeno una volta nella sua vita si è ritrovato a dire, come motivazione per gli studenti una frase del tipo

- *Se non ci fosse la matematica non avreste il computer, lo stereo, l'automobile, ecc.*

Ciò che interessa per il nostro discorso, al di là della concezione implicita, è quale sia il ruolo culturale di queste affermazioni.

[1] Insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico Ulivi di Parma; supervisore di tirocinio presso la SSIS Emilia Romagna, sezione di Parma; collaboratore del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma.

Per fornire una risposta il più possibile convincente occorre prioritariamente cercare di capire la differenza tra ciò che la matematica pensa di sé e ciò che della matematica pensa chi non "vive" di matematica.
Partiamo quindi dall'analizzare quale tipo di rapporto ci sia o ci possa essere tra matematica e realtà, premessa indispensabile per porre delle condizioni di verità. È chiaro che se si parla di realtà si presume non solo una condizione di esistenza (la realtà esiste), ma anche di riconoscibilità (riesco a capire ciò che posso chiamare "realtà").
Dal punto di vista filosofico, si potrebbe partire dalla concezione di Aristotele (384 a.C.-322 a.C.) di scienza deduttiva espressa negli Analitici Secondi:

Una scienza deduttiva è costituita da un insieme S di enunciati tali che
- *I) Postulato di Realtà: Ogni enunciato di S deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali*
- *II) Postulato di Verità: ogni enunciato deve essere vero*
- *III) Postulato di Deduttività: se certi enunciati appartengono ad S ogni conseguenza logica di tali enunciati deve appartenere ad S*
- *IV) Postulato di evidenza (per termini): Ci sono in S un numero (finito) di termini tali che*
  - *a) il significato di tali termini è ovvio e non richiede spiegazioni (termini primitivi)*
  - *b) ogni altro termine è definibile per mezzo di questi termini*
- *V) Postulato di evidenza (per assiomi): Ci sono in S un numero (finito) di enunciati tali che:*
  - *a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (assiomi)*
  - *b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad S deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi).*

L'importanza di tali presupposti, dal punto di vista matematico, risiede nel fatto che costituiscono sostanzialmente l'ossatura teorica degli Elementi di Euclide (300 a.C. circa).
È piuttosto facile osservare come i termini utilizzati contengano molti riferimenti semantici, come "vero", "ovvio", "enti reali". Seppure la geometria nasca e si sviluppi come scienza deduttiva, è comunque garantita da una realtà (fisica) di riferimento; in buona sostanza, la geometria diventa, più che lo studio della terra, da cui ha etimologicamente origine il suo nome, come studio delle forme, viste a loro volta come astrazioni caratterizzanti gli oggetti e le loro relazioni.
Indubbiamente più delicato è capire su cosa si basi il concetto di ovvietà, se non nella capacità della nostra mente di riconoscere nella natura delle strutture linguistiche, secondo una concezione tipicamente galileiana[2].
In un certo senso però il concetto di ovvietà trova la sua risposta più significativa nell'idea kantiana di giudizio sintetico a priori riservato alla geometrica e all'aritmetica: è "ovvio" tutto ciò che si riferisce alla nostra idea intuitiva (e innata) di spazio e di quantità.
Accanto a questi stretti legami tra matematica e realtà fisica, non sono però mancati motivi, anche forti, di conflitto; ne cito alcuni per evidenziare come la storia e l'epistemologia della matematica abbiano sempre dovuto fare i conti con successive messe in discussione delle proprie posizioni, in

---

[2] *Egli [l'universo] è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.* Galileo Galilei: Il Saggiatore.

una ricerca continua di condizioni di "esistenza" o, analogamente, di "verità" proprie. Per citarne alcuni:

a) *I pitagorici e l'incommensurabilità*
b) *I paradossi di Zenone ed in particolare il paradosso di Achille e la Tartaruga*
c) *Il postulato delle parallele*
d) *Il calcolo infinitesimale*
e) *Il paradosso del mentitore (Eubulide di Mileto; 330 a.C. circa)*

Ciascuno di questi temi richiederebbe ben più di un commento e di un approfondimento, ma ciò rischierebbe di portarci fuori tema. Rimando pertanto alla bibliografia allegata per chi volesse approfondirli.

Molto sinteticamente e sommariamente potremmo dire che:

a) Attorno al 540 a.C. Pitagora e la sua scuola fondarono la loro filosofia sulla concezione secondo cui l'essenza di tutte le cose era spiegabile mediante le proprietà dei numeri interi o dei loro rapporti. Tale filosofia va in crisi nel momento in cui si scoprono grandezze, come la diagonale di un quadrato e il lato del quadrato stesso, il cui rapporto non è esprimibile con un numero razionale, cioè con un rapporto tra numeri interi[3]. L'incommensurabilità pone il problema del rapporto tra gli oggetti, i loro elementi costituenti e la capacità di misurarli; in sostanza, quale ponte ci sia (se c'è) tra il mondo geometrico e quello aritmetico, intendendo il primo come il descrittore della realtà fisica e il secondo lo strumento per studiarla.
b) Sulla stessa falsa riga si pongono i paradossi di Zenone (V secolo a.C.) ed in particolare quello di Achille e la Tartaruga, i quali possono essere visti come una manifestazione del conflitto tra ciò che i sensi ci mostrano e le strutture mentali con cui analizziamo le percezioni sensoriali. Strettamente connesso ai paradossi di Zenone si colloca il problema dell'infinito, visto come strumento indispensabile per studiare concetti quali lo spazio e il tempo, ma che è un prodotto ed una percezione tipicamente umana.
c) Il problema della gestione dell'infinito trova i suoi echi nel postulato delle parallele in cui il concetto di evidenza aristotelico, proprio a causa del concetto di infinito necessario per accettare l'unicità della retta parallela passante per un punto esterno ad essa, come predica appunto il quinto postulato euclideo, viene messo pesantemente in discussione.
d) Se il problema delle parallele è un problema storicamente ed epistemologicamente significativo e noto, non da meno si può dire del calcolo infinitesimale, sviluppatosi soprattutto nel XVII secolo e formalizzato solo nel XIX. Il problema che vi si pone è soprattutto legato al concetto di esistenza di numero e di ente matematico, soprattutto se coinvolgono forme attuali di infinto o di infinitesimo.
e) Dal punto di vista semantico, ad una frase come *Io mento* non è possibile assegnare un valore di verità. Del paradosso del mentitore, legato apparentemente più a questioni di carattere linguistico che matematico, parleremo più diffusamente in seguito.

Gli aspetti evidenziati, lungi dall'essere esaurienti, si collocano come altrettante rivoluzioni culturali sul piano matematico; ma se, in generale, una rivoluzione scientifica determina un cambio dei paradigmi secondo quanto proposto in (Khun,1969), nel caso della matematica la rottura sul piano epistemologico non comporta necessariamente un cambio di paradigma. Il matematico tedesco H. Hankel (1839-1873) definì la matematica come una "scienza conservatrice": *La matematica non distrugge mai i lavori di periodi precedenti per innalzare al loro posto nuovi edifici*.

[3] Grandezze di questo tipo si dicono incommensurabili.

La matematica, quindi, rispetto ad altre scienze non “butta via nulla”, ma affianca al paradigma preesistente un nuovo paradigma.
Ciò che per noi è significativo, è “come tali argomenti pongano il problema del rapporto tra realtà e ragione” e, di riflesso, il problema ontologico relativo agli oggetti matematici. Già parlare di oggetti, di per sé, può essere una forzatura, visto che la loro esistenza non è garantita. Chiarire cosa si intenda per oggetto matematico diventa allora indispensabile se si vuole stabilire, in subordine, quale sia la realtà di studio della matematica, prima premessa per stabilire un qualunque criterio di verità. Per fare questo, si tratta innanzi tutto di entrare nel merito delle questioni più propriamente matematiche; procediamo prima però nell’analisi di un problema apparentemente linguistico e quindi estraneo alla matematica: il paradosso del mentitore.

2. Il paradosso del mentitore

Com’è noto il paradosso si riferisce alla valutazione della verità di una frase del tipo *Io mento*. Tale frase risulta indecidibile sul piano semantico, in quanto se fosse un’affermazione vera, esprimerebbe l’aver detto una falsità; viceversa se fosse falsa esprimerebbe l’aver detto una verità.
Perché la matematica deve occuparsi di un paradosso linguistico e di tutti i suoi “figli”[4]? La risposta più naturale è che, indipendentemente da cosa sia la matematica e quale sia la natura dei suoi oggetti, è indubbio che tali oggetti siano strutturati su basi essenzialmente linguistiche, al punto che secondo alcuni filoni di ricerca si è sostanzialmente in presenza di un paradosso legato all’analisi se nascano prima i concetti matematici o la loro formalizzazione. Questo sarebbe un falso problema se la matematica fosse una scienza empirica, mentre diventa IL problema se la matematica è qualcos’altro. Se infatti per una scienza come la fisica l’approccio descrittivo con condizioni di raccordo tra i dati raccolti, secondo la plausibile ipotesi di un “ordine” nelle cose della natura[5], risulta essere il metodo naturale di indagine per la realtà specifica di studio, per la matematica è difficile individuare l’approccio metodologico, visto che non sembra esserci un contesto specifico di osservazione che ne permetta supposizioni e successive validazioni (o invalidazioni) secondo un modello popperiano (si veda (Popper, 1985)).
Il processo deduttivo, alla base della potenza di convincimento della matematica, risulta essere paradossalmente la manifestazione macroscopica del profondo conflitto epistemologico che dalla fine del settecento coinvolge la matematica e che passa sotto il nome di *rivoluzione non euclidea*.
Il lungo percorso iniziato con Euclide e proseguito per circa 2300 anni nel tentativo di dimostrare l’assioma delle parallele a partire dai primi quattro postulati di Euclide (ritenuti più “ovvi”) trova tra la fine del settecento e gli inizi dell’ottocento la sua definitiva risposta: il postulato delle parallele è indipendente dagli altri. Di per sé questo potrebbe essere un risultato interno alla matematica. Perché allora parlare di “rivoluzione”[6]? Sostanzialmente perché la matematica prende coscienza di un distacco, di una sua separazione dalla realtà fisica alla quale si era appoggiata. Il concetto di “coerenza” prende il posto di quello di “verità”: sperare che il quinto postulato di Euclide fosse “vero” era soprattutto una esigenza rassicurante. Dimostrare invece che la negazione del quinto postulato (e quindi che possano esistere più parallele ad una retta data passanti per un punto esterno)

---

[4] Si veda ad esempio (Odifreddi, 2001).
[5] Per cui in un certo senso l’idea di verità scientifica è supportata da una sorta di benignità della natura nel proporsi.
[6] Si veda ad esempio (Trudeau, 1991).

è compatibile con gli altri assiomi, determina una forma di libertà del soggetto che può così costruire nuovi mondi, decidendone le regole; e questi mondi sono decisamente "diversi" e "poco intuitivi". Ad esempio, una formulazione equivalente al supporre che la parallela ad una retta data passante per un punto esterno non sia unica, equivale al supporre che esista un triangolo di area massima, oppure che non si possa pavimentare una superficie piana con quadrati.
L'approccio deduttivo, ciò che fa della matematica la "scienza delle certezze", diventa quindi il grimaldello per scardinare le certezze che la matematica dovrebbe garantire. Per dirla con Toth, parafrasando Hegel[7] (1770-1831): *La matematica è libera, ma non lo sa; quindi la matematica non è libera*[8]. Vale a dire, la libertà, che è l'essenza della matematica, sia che lo sappia sia che non lo sappia, risulta manifesta solo perché la matematica diviene cosciente della propria libertà.
Se questa parafrasi risulta storicamente piuttosto evidente nella formulazione hegeliana dell'aforisma (riportato in nota 7), per la matematica risulta forse più ostico da accettare, poiché fa intendere una non libertà "mentale" in cui si era mossa la matematica fino all'ottocento.
Nel momento in cui la matematica prende coscienza della sua libertà, si determina una profonda riflessione su cosa effettivamente la matematica sia e cosa la garantisca. La libertà impone una maggiore responsabilità del soggetto nella determinazione di ciò che è ritenuto "vero" e questo vale anche per la matematica. La libertà nel costruire nuovi mondi diventa possibilità, da non confondere con l'arbitrio. Non si tratta infatti di "fare ciò che si vuole", ma di percepire una maggiore responsabilità nelle scelte soggettive. Di G. Cantor (1845-1918) si cita una famosa frase : *L'essenza della matematica sta nella sua libertà*[9], la quale ricorda molto la frase di Hegel nella *Fenomenologia dello Spirito: L'essenza dello Spirito è la libertà*.
La distinzione tra libertà ed arbitrio è essenziale, poiché con libertà si esprime una possibilità non condizionata da necessità. E nella possibilità c'è una condizione di pari dignità sulle scelte operate.
Ma se la matematica può costruirsi altri mondi, chi garantisce la matematica?
È da questi presupposti che nasce la stagione della crisi dei fondamenti della matematica, stagione in cui, da varie posizioni, si cerca di ricostruire un tessuto su cui tessere proprio quei mondi che la matematica pretende di costruire.
In questa fase il linguaggio diventa ovviamente uno strumento indispensabile per determinare cosa si intenda per matematica e per descriverne gli oggetti. Perché, se la verità è garantita da una realtà fisica o sociale di riferimento, chi garantisce la coerenza? La coerenza passa attraverso la negazione di un quantificatore esistenziale: non esiste una contraddizione; ma la negazione di un quantificatore esistenziale determina un quantificatore universale: ogni enunciato matematico che sia enunciato di un teorema non ha la sua negazione tra gli enunciati di teoremi.
Per fare un esempio, dire che le regole degli scacchi non sono contraddittorie, significa dire che in TUTTE le situazioni derivanti da partite si saprà sempre cosa possono fare i singoli giocatori o qual è la situazione della partita (vincita di uno dei due o patta). Nel caso si arrivi ad una contraddizione, invece, ci si troverebbe in una situazione in cui si può fare una cosa o il suo opposto (tipo: hanno vinto entrambi).

---

[7] *L'uomo è libero. Non lo sa. Dunque non è libero.*
[8] In (Toth, 1998)
[9] In *Abhandlungen mathematischen und philophischen Inhalts*, Berlino 1932, p. 207

Oltre a questo vi è un problema di completezza: ogni enunciato o (nel senso di aut) la sua negazione sono enunciati di teoremi? Questo è un problema più sottile: equivale dire che per ciascuna "frase" che si può dire in matematica, o è dimostrabile o lo è la sua negazione.
La matematica deve quindi fare i conti con se stessa. Questo è in qualche modo paradossale: la disciplina che garantisce il grado di attendibilità delle scienze si chiede cosa la garantisca.
Se si rileggono le frasi legate alla concezione popolare della matematica citate all'inizio, ci si accorge come il ruolo giocato sia quello di metalinguaggio a garantire le altre discipline. In pratica, l'attendibilità (ovviamente in termini semantici) di un risultato scientifico è certificato dalla matematica.
Chiedersi quindi su cosa si fondi la matematica è in un certo modo un obbligo se ci si vuole garantire la struttura razionale sulla quale si basa la scienza occidentale. In pratica è come se la matematica si preoccupasse, nel momento in cui imposta questo lavoro critico su se stessa, di fare il "lavoro sporco" di strutturare le condizioni anche per le scienze empiriche.
È noto il concetto di matematica come "serva padrona": si potrebbe pensare che questo sia da ricondurre all'aspetto strumentale assunto dalla matematica, ma sostanzialmente non è solo questo. Come sottolineato anche in (Bottazzini & Boncinelli, 2000), la matematica, preoccupandosi di garantirsi, di fatto permette anche a chi la usa di essere garantito.
Il problema dei fondamenti diventa così una ricerca di connotazione e per fare questo occorre scavare nel profondo, nella epistemologia della materia, ma anche nelle sue strutture. Le teorie matematiche diventano così teorie formali e a loro volta diventano strutture prettamente sintattiche: ciò che conta sono le relazioni tra i concetti, non i concetti (si veda (Lolli, 2004)). Le relazioni vengono prima del significato e questo determina un sostanziale distacco dall'idea che ciò che è matematico sia importante per il significato che ha. Studiare le strutture permette di lavorare successivamente sulle interpretazioni delle strutture stesse, avendo risultati più generali.
Rimane però il problema di quali siano le interpretazioni, o per dirla in termini matematici, i modelli delle teorie sintattiche.

3. Linguaggi e modelli

Il termine "modello" è uno di quelli che si presta a differenti modalità interpretative a seconda del contesto in cui è in inserito. Nelle scienze, ad esempio, spesso si riferisce ad una formalizzazione matematica di uno specifico fenomeno, per cui il modello permette di prevedere l'andamento dello stesso in specifiche condizioni.
In matematica, invece, le cose vanno diversamente. In genere per modello si intendono contesti in cui interpretare termini primitivi e assiomi in modo che i primi acquistino un significato ed i secondi diventino enunciati veri[10]. La struttura formale di un linguaggio necessita così di un contesto per averne una significato.

[10] Nella moderna concezione della matematica come linguaggio formale, i termini primitivi, contrariamente a quanto asseriva Aristotele, non sono termini il cui significato è ovvio, quanto piuttosto termini definiti implicitamente dagli assiomi, i quali a loro volta ne fissano le relazioni. Tanto per fare un esempio, nel gioco degli scacchi, e nei giochi in genere, non è importante sapere che un pezzo si chiama "cavallo", quanto piuttosto sapere quali relazioni lo legano agli altri pezzi, relazioni che sono stabilite dalle regole del gioco (corrispondenti a loro volta agli assiomi delle teorie formali).

Per fare un esempio, la frase “La luna è fatta di formaggi” è una frase sintatticamente corretta, ma semanticamente falsa, se si interpretano in modo usuale i termini “luna” e “formaggi”. Ma se esistesse una pizzeria che ha chiamato “luna” la classica pizza ai quattro formaggi, in quel contesto sarebbe una frase vera, con questa nuova interpretazione dei termini. Una esauriente e semplice distinzione tra linguaggio e metalinguaggio e un’analisi dei problemi legati ai concetti di interpretazione, si può trovare in (Tarski, 1972).
Se il modello in generale è un mondo in cui gli assiomi sono proposizioni vere (e conseguentemente gli enunciati dei teoremi), in cosa consistono i modelli della matematica?
Il problema si è posto in tutta la sua dirompente drammaticità quando, con le geometrie non euclidee[11], ci si è chiesti quale tra le geometrie sintatticamente coerenti (almeno apparentemente) fosse quella vera. I lavori, ad esempio, di E. Beltrami (1835-1899), F. Klein (1848-1925) e H. Poincaré (1854-1912) hanno evidenziato che le geometrie non euclidee sono garantite semanticamente da quella euclidea, in quanto quest’ultima, per una opportuna interpretazione dei termini, ne risulta essere un modello. Se quindi la geometria euclidea è coerente, le geometrie non euclidee sono vere, in quanto hanno un modello.
Questo risultato riporta il senso del “vero” in matematica all’interno della matematica stessa. Non serve più un mondo esterno per rendere più legittima una scelta rispetto ad un’altra. Si parla quindi, con chiara contraddizione in termini, di “modelli sintattici” per indicare come ciò che dà significato all’interno della matematica alle teorie matematiche, non siano altro che, a loro volta, teorie.
Se quindi tutto viene giocato all’interno della matematica, si tratta di stabilire un principio primo da cui partire, qualcosa che esiste sicuramente e su cui costruire e garantire il resto.
Una posizione nota è ad esempio quella di L. Kronecker (1823-1891) a cui si deve la famosa affermazione *Dio ha creato i numeri naturali; tutto il resto è opera dell’uomo*. Come sottolineato in (Lolli, 2004), questa, lungi dall’essere una battuta curiosa, esprime la completa rinuncia ad una spiegazione della matematica: non solo non è richiesta una definizione di numero (che al tempo in cui Kronecker afferma ciò non esisteva), ma non ci si preoccupa neppure di trovarne gli assiomi, affidandoli a Dio direttamente.
Un altro tipo di riposta è quella ad esempio data da D. Hilbert (1862-1943), uno dei padri del formalismo. Secondo tale impostazione, la matematica è soprattutto forma e strutture sintattiche ed il loro grado di verità è garantito proprio dalla non contraddittorietà. In un celebre scambio epistolare col logicista Frege (1948-1925) successivo alla pubblicazione del testo *Fondamenti di Geometria* da parte di Hilbert nel 1899, rispondendo ad alcune obiezioni di Frege, Hilbert scrive[12]:

---

11 La locuzione “geometrie non euclidee” è stata introdotta (al singolare, però, visto che è solo l’unicità della parallela ad essere garantita dall’assioma, non l’esistenza) da C. F. Gauss (1777,1855) nella prima metà del XIX secolo. La differenza rispetto alla geometria euclidea è nel quinto postulato o “postulato delle parallele”. Nelle geometrie non euclidee, la parallela da un punto ad una retta data (a cui il punto non appartenga) può non esserci (geometria ellittica; ma in questo caso occorre modificare anche uno degli altri assiomi euclidei) o possono essere infinte (geometria iperbolica). I “mondi geometrici” che si possono costruire in questo modo sono completamente diversi da quelli a cui siamo abituati; ma, ad esempio, la teoria della relatività di Einstein utilizza come modello geometrico quello della geometria ellittica.

12 Una documentazione commentata di tale scambio è reperibile in (Lolli, 2004), pag. 70-73.

[..] *Mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase*[13]*, poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e della coerenza*.

Dunque Frege e Hilbert hanno idee diverse sulla verità in matematica: per il primo la verità garantisce la coerenza, per il secondo il contrario. La differenza più significativa riguarda però chiaramente il ruolo della semantica. Se si considera la coerenza del metodo assiomatico ciò che caratterizza la matematica, secondo l'idea di Frege la garanzia semantica è esterna alla matematica, mentre per Hilbert diventa non solo un fatto interno, ma addirittura è attraverso la sintassi che si costruiscono gli oggetti della matematica.

Le teorie matematiche, quindi, cominciano ad assumere ruoli diversi: ciò che è importante è rimanere all'interno della formalizzazione matematica.

In questo atteggiamento di distinzione tra i ruoli assunti da diverse teorie si comincia ad intravedere ciò che sarà la soluzione proposta da A. Tarski (1902-1983) al paradosso del mentitore.

Nella distinzione tra il contesto formale (la teoria) e la sua interpretazione (il modello), si distinguono due diversi piani. La risposta di Tarski al paradosso del mentitore passa proprio nella distinzione tra linguaggio oggetto (ruolo sintattico) e metalinguaggio (che riveste invece un ruolo semantico): per parlare di verità occorre uscire dal linguaggio in cui si studiano le relazioni tra gli enti. In pratica una frase, come quella che genera il paradosso, non può essere pronunciata, in quanto non esce dal linguaggio specifico per parlare in termini semantici del linguaggio stesso. Si parla in questi casi di frasi autoreferenti e nella distinzione tra linguaggio e metalinguaggio operata da Tarski si potrebbe vedere una sorta di impossibilità in una forma di autovalutazione: tutto deve essere fatto all'esterno, poiché dall'interno è possibile rapportarsi in termini di coerenza e non di verità[14].

La portata della definizione tarskiana di verità è filosoficamente importante, poiché nel porre la valutazione di verità esternamente al contesto, richiede implicitamente di avere un altro contesto in cui questo problema viene trattato e trova le sue risposte.

Si scorge cioè una sorta di rinuncia a stabilire cosa sia vero in matematica, preoccupandosi piuttosto di stabilire in quali condizioni si possa parlare di "vero". Lungi quindi dallo stabilire delle verità, la matematica si preoccupa di stabilire dei criteri e fissare dei paletti nelle modalità di indagine.

In pratica, per mezzo del metalinguaggio, è come se i contesti sintattici fossero guardati "dall'alto", da una prospettiva superiore che ha la prerogativa di "giudicare" o, meglio, di "valutare".

Riprendendo ad esempio le concezioni o i luoghi comuni nei confronti della matematica riportati all'inizio del presente lavoro, si nota come in un certo senso la matematica sia vista come un metalinguaggio in cui interpretare le altre scienze e che sia lei, in questo modo, a fornire valore di verità e di attendibilità al resto. Questa posizione è strana e per certi versi curiosa: da una parte si

---

[13] La frase di Frege a cui si riferisce Hilbert è la seguente: *Attribuisco il nome di assiomi e enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione*.

[14] Per approfondimenti, oltre a (Lolli, 2004), si può vedere il già citato (Tarski, 1972)

accusa la matematica di essere una disciplina arida e astratta, dall'altra si pretende di utilizzarla come un potente metalinguaggio che garantisca il pensiero scientifico. Così, dire di una cosa che è "matematica" non è solo garanzia di coerenza, ma anche e soprattutto di "vero".
Se quindi i contesti matematici garantiscono le scienze, il tentativo di capire come si formano e su cosa si reggono i concetti matematici non è un problema la cui risposta interessi solo i matematici.
Diversi commentatori ritengono questo passaggio estremamente importante, poiché il grado di conoscenza che può fornire la matematica non si limita a fatti specifici, come può essere una teoria, ma va oltre, alla definizione dei livelli di competenza.
La matematica si pone conseguentemente l'obiettivo di cercare se stessa: la sfida più importante in tal senso venne lanciata da Hilbert in un famoso congresso del 1900 in cui pone ai matematici una lista di 24 problemi da risolvere nel nuovo secolo. Poiché precedentemente aveva dimostrato che sostanzialmente tutto era riconducibile all'aritmetica, tra questi problemi pone quello di dimostrate la coerenza dell'aritmetica all'interno dell'aritmetica stessa. Se si fosse raggiunto questo risultato, la matematica sarebbe stata in grado di autogarantirsi.

4. I teoremi di Gödel

La risposta alla questione posta da Hilbert viene data all'inizio degli anni '30 del XX secolo quando K. Gödel (1906-1978) dimostra due famosi teoremi, i quali si riferiscono a tutti i sistemi formali in cui sia possibile sviluppare l'aritmetica.
Formalmente non è corretto parlare di teoremi, in quanto si tratta piuttosto di metateoremi: infatti affermano qualcosa SULLA matematica e non DI matematica. E ciò che affermano è destabilizzante:

I. Ogni teoria coerente è incompleta (Teorema di incompletezza)
II. Una teoria che contenga l'aritmetica non può dimostrare di sé stessa che è coerente.

Il primo teorema afferma in pratica che se una teoria è coerente (ed è auspicabile lo sia!) vi sono al suo interno proposizioni indecidibili, tali cioè da non poter dire se la proposizione stessa o la sua negazione sono teoremi.
Il secondo teorema pone al di fuori della teoria la possibilità di stabilire la coerenza della teoria stessa. In pratica, una teoria matematica non riesce ad auto sostenersi e ad auto garantirsi. Perché questo avvenga occorre una metateoria (matematica) superiore, nella quale si ripropone lo stesso problema.
I teoremi di Gödel sono ritenuti teoremi di crisi e costituiscono secondo molti commentatori una sorta di spartiacque nella filosofia della matematica. In sostanza con essi si stabilisce l'impossibilità per una teoria contenete l'aritmetica di auto garantirsi. Ci si ricollega così alla proposta semantica di Tarski con la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, ponendosi conseguentemente su un doppio livello di confronto, ma anche e soprattutto sulla distinzione dei diversi ambiti in cui parlare di verità e di dimostrazione.
Nell'ambito della sua proposta, Tarski dimostra un teorema secondo cui la verità non è definibile aritmeticamente, cioè attraverso una formalizzazione che richieda i soli numeri naturali. Questo non significa, secondo Lolli, che la verità sia assolutamente ineffabile, ma dichiara che la sua definizione non è aritmetica, poiché richiede un altro linguaggio e altre assunzioni.

Gli enunciati veri quindi sono diversi dagli enunciati dei teoremi[15] non tanto per questioni di "numero", quanto piuttosto perché parlare di verità in una struttura infinita è più impegnativo e meno intuitivo di una dimostrazione.
In questa affermazione si può riscontare tutta la differenza tra il fare matematica e il parlare di realtà. La presenza dell'infinito (in forma potenziale o attuale, non ha importanza) all'interno della matematica, comporta una impossibilità (logica) nella gestione delle questioni semantiche.
Proviamo a spiegare la cosa con un paio di esempi, uno matematico e uno tratto dal quotidiano.
La congettura di Goldbach (1690-1764). La congettura di Goldbach afferma che ogni numero pari può essere visto come somma di due numeri primi. Ad esempio, 20=17+3, 24=11+13, ecc. fino ad ora non sono stati trovati numeri pari che non soddisfino tale condizione, ma non si è neppure riusciti a dimostrare che le cose vadano effettivamente così per tutti i numeri pari. Potrebbe trattarsi di una proposizione vera, ma non dimostrabile? Cosa significherebbe vera? Nel nostro caso che comunque si prenda un numero pari esiste una coppia di numeri primi di cui il numero dato è la somma. Su basi semantiche, quindi, si tratterebbe di verificare la proprietà su tutti i numeri pari. Lo scoglio costituito dall'infinità dei numeri pari impedisce una validazione diretta della proposizione.
Se invece si riuscisse a dimostrare che la congettura di Goldbach è l'enunciato di un teorema, verrebbe aggirato il problema dell'infinito, ma per fare ciò è indispensabile che la dimostrazione proposta sia al finito, cioè si completi in un numero naturale di passi.
La presunta verità della congettura, quindi, rimarrebbe ad un livello per noi inaccessibile e la dimostrazione (eventuale) avrebbe così il compito di riportare l'operazione di convincimento su quanto indicato dall'enunciato, ad un livello per noi comprensibile e gestibile: quello del finito.
Anche in contesti di questo tipo, però le cose non vanno benissimo. Consideriamo ad esempio questa proposizione: "Tutti gli uomini sono mortali". È vera o falsa? Basandosi su basi statistiche non ci risulta difficile dire che è vera, ma nessuno ci assicura che primo o poi l'uomo raggiunga l'immortalità (o nasca un uomo immortale). In questo caso, l'aspetto legato all'infinità (potenziale) degli essere umani presenta esplicitamente il conto: come è possibile convincere che gli uomini sono (tutti) mortali? La semantica non basta: occorre una dimostrazione all'interno di un contesto (ad esempio la biologia) che studia effettivamente la natura del corpo umano e quindi DIMOSTRA, in base alle sue assunzioni per spiegare il "fenomeno" uomo, che la vita prima o poi è biologicamente destinata a finire.
In queste condizioni di scivolamenti su piani diversi, la matematica decide di fissare dei paletti: tutte le indagini su di sé devono essere al finito
Se fino all'ottocento la matematica "esisteva e basta", dopo la rivoluzione non euclidea e il problema dei fondamenti, la questione da considerare, come detto, è perché la matematica esiste, di cosa si occupa e chi la garantisce.
Non è quindi un caso che sia proprio la logica ad avere il suo massimo sviluppo, producendo i risultati di Tarski, Gödel (e altri) a cui abbiamo accennato.

[15] Non è inusuale sentir parlare, anche da addetti ai lavori, di enunciati di teoremi come proposizioni vere. Questa affermazione è corretta se si pensa ad una "frase" di un modello della teoria in cui è stato dimostrato l'enunciato in questione. Purtroppo però non è inusuale che chi la usa confonda la sintassi con la semantica; in sostanza il teorema con una sua interpretazione; cioè confonda mondi e contesti diversi. Per esempio, l'enunciato del teorema di Pitagora è una proposizione dimostrabile nell'ambito della geometria euclidea, ma non è vero. È vero nelle interpretazioni della geometria euclidea, come ad esempio nella geometria analitica.

Se fino all'ottocento la concezione matematica era essenzialmente platonista, da questo punto in poi vengono proposte altre concezioni: quella logicista (la matematica è essenzialmente logica), quella formalista (la matematica è essenzialmente una struttura sintattica, simile ad un grande gioco) o quella empirista (la matematica è una scienza come le altre e i suoi risultati possono essere validati o invalidati). Oltre alle concezioni sulla matematica, si sviluppano altri tipi di logiche, le quali mettono in discussione la struttura della logica classica aristotelica come LA LOGICA della matematica (per un panorama esauriente si vedano ad esempio (Mangione & Bozzi, 1993) e (Odifreddi, 2003)).
Non mancano, anche negli ultimi anni, altre proposte su cosa sia la matematica. Ad esempio, in (Hersh, 2001) si presenta e si sostiene l'idea della matematica come fenomeno socio-culturale. Questa posizione si basa sul presupposto non tanto che la matematica sia una costruzione dell'uomo (come sostengono i formalisti), quanto che faccia parte dello sviluppo culturale dell'uomo, così come avviene per altre discipline. Secondo questa concezione, quindi, la matematica sarebbe radicata nel suo tempo: esiterebbe così, ad esempio, una geometria greca ed una geometria dell'ottocento e le geometrie non euclidee non si sarebbero potute che sviluppare nel XIX secolo, seppure tecnicamente ci fossero tutti i presupposti affinché ciò avvenisse prima[16].
Ma non solo.
Per cercare di essere più chiaro, analizziamo la usuale disputa tra formalisti e platonismi: la matematica è una "invenzione" dell'uomo o è nella natura?
Secondo una famosa battuta ricorrente tra i matematici e riportata in (Hersh, 2001), i matematici di professione sono platonisti nei giorni di lavoro, formalisti nei giorni festivi.
Questo, in buona sostanza, significa che quando un matematico è al lavoro, ha bisogno di pensare che ciò che trova esista già da qualche parte, così come quando "mette a posto" le cose, ha bisogno di vestirle bene, come nei giorni di festa. La distinzione è quindi tra l'esistenza degli oggetti matematici e la capacità di mostrarli. Il matematico platonista ha soprattutto l'esigenza di sentirsi rassicurato non solo sull'esistenza degli oggetti che indaga, ma anche sul loro senso complessivo[17].
Rispetto al problema della verità, la risposta alla domanda precedente potrebbe non essere solo fine a se stessa. Se, come visto, la matematica viene usualmente considerata come il metalinguaggio che garantisce, anche semanticamente, le altre scienze, rispondere in un modo piuttosto che nell'altro comporterebbe, nel caso sia una invenzione dell'uomo, che l'uomo rapporta a se stesso una idea e un modello di verità distinto dalla natura. Nel secondo caso, invece, comporterebbe che sia la natura il metro ultimo delle cose, e quindi sia garante di ciò che è "vero". Questa dicotomia si basa però su un presupposto che non è usualmente considerato: secondo questa contrapposizione, infatti, l'uomo sarebbe "altra cosa" rispetto alla natura. L'uomo quindi, e ciò che produce, non è "naturale"? Non è né mio compito né mia intenzione dare delle risposte a questa domanda: mi interessa solo porla, poiché dalla sua risposta, anche in termini soggettivi, dipende quale metro potrebbe essere utilizzato per stabilire un qualsiasi criterio di verità. Seguendo infatti la distinzione tarskiana tra linguaggio e

[16] In pratica, il clima culturale, sociale e politico dell'ottocento avrebbe permesso uno sguardo diverso alle questioni geometriche o, per dirla col già citato (Toth, 1998), più libero.
[17] A tale riguardo vale la pena riportare quanto ricordato in (Borga & Palladino,1997): *La formalizzazione riguarda in definitiva il momento della giustificazione, non quello della concreta pratica matematica, dove nessun sostenitore del formalismo hilbertiano si sognerebbe di pretendere che in matematica si debba procedere con dimostrazioni formali*.

metalinguaggio, potremmo dire che in base alla risposta a tale domanda avremmo stabilito se il bisogno di verità sia una necessità solo dell'uomo, indipendentemente dalla natura, oppure se è nella natura delle cose. Come corollario, si tratta di stabilire quale sia la collocazione e il ruolo dell'uomo nel mondo. È facile quindi scivolare in risposte di tipo teologico o metafisico, ma personalmente ritengo più opportuno rimanere su un ambito razionale.

Seguendo la concezione galileiana, si è portati a pensare che l'uomo "prende atto" della natura acquisendone il linguaggio (matematico) con cui è scritta. La matematica è quindi il linguaggio con cui la natura si manifesta.

In questa posizione vi è una chiara radice platonista, seppure abbia la sensazione che spesso questo termine venga utilizzato in modo improprio, riproponendo la dicotomia tra ciò che è "dell'uomo" e ciò che è "della natura". In particolare, il rischio che si può correre è di non preoccuparsi di cercare le strutture del pensiero matematico, rimandandole semplicemente ad una (meta)realtà che le garantisca.

Contrapposta alla idea galileiana troviamo quella espressa in (Dehaene,2000):

L'universo è davvero scritto in linguaggio matematico, come affermava Galileo? Sono piuttosto incline a pensare che sia l'unico linguaggio che noi sappiamo leggere.

In questa posizione si ha, per dirla alla Khun, un cambio di paradigma: la matematica è vista come il linguaggio che utilizza il nostro cervello per mostrare non solo le sue strutture, ma anche per "vedere il mondo". La matematica assume così il ruolo di "occhiali" con cui noi guardiamo la realtà.

Senza entrare troppo in questioni tecniche specifiche, concetti portanti quali quello di numero, di figura geometrica, di relazione (e conseguentemente di classificazione e di partizione), di modello, ecc. sono esempi di come nell'analisi della realtà vengano selezionate, secondo un approccio tipicamente matematico, solo determinate caratteristiche (diremmo "invarianti") e trascurate altre. Le partizioni e le relative relazioni di equivalenza[18], ad esempio, possono essere viste come conseguenza di criteri di uguaglianza stabiliti tra gli elementi di un insieme, laddove i modelli per studiare fenomeni fisici che si basano su alcune proprietà formali di uno specifico insieme numerico (quello dei numeri reali) come ad esempio la condizione di continuità (la quale a sua volta presume un'idea di continuità nella realtà[19] soprattutto in concetti quali lo spazio e il tempo) che non solo non è scontata, ma che viene supposta in quanto funzionale al loro studio. È come se si dicesse che anziché preoccuparsi di ciò che la natura è, ci si preoccupa di stabilire sotto quali condizioni è più semplice studiarla. Per dirla con Poincaré, è come se le teorie matematiche fossero libri in uno scaffale dal quale poter prendere quello ritenuto più adeguato per studiare quella specifica realtà. È naturale allora che le proprietà che si possono dedurre siano legate a ciò che lo strumento matematico (attraverso la sue strutture) può fornire.

---

[18] Senza entrare nei dettagli tecnici di cosa sia una relazione di equivalenza, potremmo semplicemente dire che è la formalizzazione matematica di ciò che noi facciamo abitualmente quando in un insieme, ad esempio di persone, stabiliamo una modalità con cui "associarle" in base ad un criterio rispetto al quale sono considerati "uguali". Ad esempio, nell'insieme dei cittadini italiani, la relazione che associa persone aventi la stessa residenza (cioè x è in relazione con y se e solo se x e y hanno la stessa residenza) è una relazione di equivalenza in cui il criterio di uguaglianza che si è evidenziato è quello del comune di residenza.

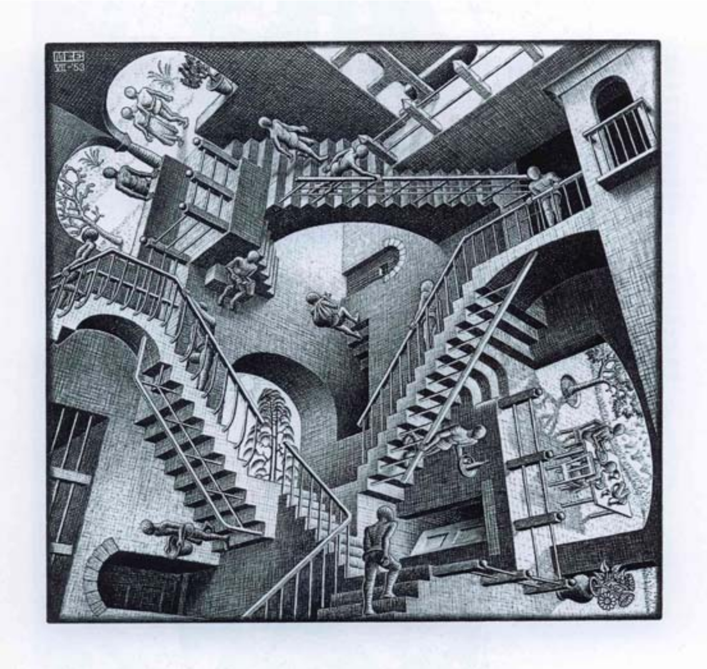
[19] A sua volta traduzione dell'idea intuitiva che non ci siano "fratture", pensando così al tempo, ad esempio, come un flusso, un "filo" ininterrotto.

Le teorie (sintattiche) matematiche possono quindi nascere prima di una loro applicazione ed in ogni caso non ne è l'applicazione a fornirne una patente di legittimità. Giustificare quindi la matematica attraverso le applicazioni risulta improprio.
Questa posizione, che si ricollega alla già citata concezione della matematica come fenomeno socio-culturale, determina una forma di semanticità della matematica nelle strutture mentali di cui la matematica non solo è espressione, ma anche su cui si radica. La semanticità, e tutto quello che ne consegue rispetto al problema della verità, è quindi nella mente del'uomo e negli strumenti che organizza per studiare il mondo circostante: l'idea di fondo è quindi quella di "mondi possibili", in cui le costruzioni di strutture sostanzialmente potenziali permette di operare con realtà in atto.
Se quindi le scienze utilizzano la matematica per garantirsi sul piano della verità, è come se si ammettesse che tale garanzia si basa essenzialmente su ciò che caratterizza l'uomo: la sua ragione.
Per sintetizzare questa posizione, mi piace citare una metafora riportata in (Hersh, 2001) per mostrare la distinzione tra processo e oggetto.
Un operatore turistico (e in generale un turista) vede la cascata del Niagara come un oggetto, mentre una molecola d'acqua come un processo. Cosa significa questo, nel nostro caso? Che se si riesce a vedere le cose "dal di fuori" si vedono nella loro globalità e quindi è più facile "farsene un'idea". Dal di dentro, invece, si vive sostanzialmente la mutevolezza, ciò che è contingente. La verità, attraverso Tarski, ha bisogno di uno sguardo dall'alto, che ci faccia vedere le cose "oltre" la prospettiva contingente del processo in cui si è immersi.

5. Conclusioni.

Le conclusioni a tutto questo discorso non possono che essere di sintesi: cosa apporta la matematica nel dibattito relativo alla verità? Sicuramente la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, cioè tra il contesto in cui vengono dette le cose e quello in cui vengono valutate, ma soprattutto la matematica non fornisce "condizioni di verità", quanto "condizioni per le risposte di verità".
La posizione relativa ad una matematica come fenomeno socio-culturale enfatizza poi il ruolo di una matematica strettamente ancorata al suo tempo, per cui il ruolo della verità scientifica che si regge su basi matematiche non può essere disgiunto dal contesto in cui viene proposta.
Se si concorda sul fatto che la matematica, dalla seconda metà dell'ottocento, ha costruito mondi, forte del senso di libertà di cui aveva preso coscienza, corrispondentemente si dovrebbe concordare sul senso di contestualizzazione del concetto di verità, che ha nella ragione dell'uomo il suo aspetto invariante.
Seppure corretto, è forse riduttivo dire che la matematica è sostanzialmente un linguaggio: nelle intenzioni di questa comunicazione, si è voluto sostenere l'idea che sia IL linguaggio con cui la mente "si mostra" o "mostra le sue strutture", attraverso le quali analizza e struttura la realtà circostante. L'uomo ridiventa così il metro di tutte le cose, senza voler dare a questa accezione né una forma assoluta né tanto meno presuntuosa: semplicemente si vuole sottolineare come sia nella natura dell'uomo l'essere fatto "in un certo modo". Nella matematica è quindi possibile vedere sia le sfaccettature della razionalità umana, sia la speranza della razionalità umana di raggiungere una verità nella ricerca di una ordine prestabilito delle cose.
Scriveva K. Popper in (Popper,1995): *Non il possesso della conoscenza, della verità irrefutabile, fa l'uomo di scienza, ma la ricerca critica, persistente e inquieta, della verità*. O ancora, in (Popper, 1996): *La scienza è ricerca di verità. Ma la verità non è verità certa*.

Queste due frasi bene esprimono, a mio avviso, il travaglio non solo dell'uomo di scienza, ma dell'uomo in genere, se il bisogno di conoscenza caratterizza l'uomo. La matematica dell'ultimo secolo, poi, si è mossa in questo spirito di ricerca perenne e inquieta più che della verità, di stabilire come riconoscere condizioni di verità, affiancando e amplificando così ciò che è il percorso travagliato della storia dell'uomo alla ricerca di sé.
Infine mi piace così concludere con una immagine di Escher che bene esprime, a mio avviso, il senso di contesto rispetto alla valutazione:



Se si guardano le varie scale dell'immagine, si ha la sensazione di una coerenza locale, la quale sparisce, in termini globali, quando si guarda la figura nella sua interezza. Spesso, come sottolineato anche in (Lynch, 2007), si corre il rischio di confondere la contingenza col relativismo. La matematica, per sua natura, non è relativa, ma è contingente nel momento in cui fissa i presupposti con cui costruirsi le strutture o, per dirla diversamente, i suoi mondi. Se la sensazione globale è di incoerenza, come nell'immagine sopra riportata, di fatto il messaggio implicito è che tutto deve essere correttamente contestualizzato e all'interno di quel contesto essere coerenti.
La lezione che se ne desume rispetto al nostro tempo è, in fondo, che prima di preoccuparsi della verità ci si dovrebbe occupare della coerenza. Quella è la prima sgrossatura che si dovrebbe fare per prendere in considerazione o meno un interlocutore o un contesto in termini di "verità".
La scena italiana, soprattutto politica, è sicuramente scoraggiante da questo punto di vista ed è soprattutto scoraggiante il fatto che questo atteggiamento di disattenzione alla coerenza anche solo "locale" sia in un qualche modo specchio di un pensiero condiviso, non foss'altro perché non diventa elemento distintivo per il cittadino comune.
Io sono insegnante di matematica e la mia primaria preoccupazione è di educare i miei studenti alla coerenza, all'approccio razionale alle strutture comunicative, sulla base dell'idea che il suo possesso sia un prerequisito per poter parlare di verità.
Non è facile, proprio perché il contesto che loro quotidianamente vivono e che frappone alla coerenza altri valori, non aiuta in questo senso. La naturale conseguenza di ciò è la tendenza al relativismo, a sua volta confuso con la libertà di pensiero.

Si parla così di perdita di valori, ma il livello a cui a mio avviso occorre lavorare è ancora precedente: non si dovrebbero neppure prendere in considerazione, in termini di verità, le persone o le situazioni già incoerenti; semplicemente.
Infine una nota sulla foto di apertura: il personaggio di destra è Albert Einstein, mentre quello di sinistra è il più volte citato Kurt Gödel. I risultati di Gödel stanno alla matematica come quelli di Einstein stanno alla fisica, con però ben altra visibilità e popolarità. Ciò che è singolare è che i teoremi che dimostra, che sono sostanzialmente teoremi di crisi, siano proposti in un periodo (gli anni '30 del XX secolo) in cui la società europea conosce altre situazioni "critiche" sia in ambito culturale (si pensi alla letteratura del periodo) che politico-sociale, e questo a ulteriore riprova di come la matematica non sia avulsa dal tempo in cui sviluppa i suoi risultati.
Ho proposto tale foto non solo per un doveroso omaggio a Gödel, ma anche perché la trovo molto bella, e vera, nella sua semplicità.

Bibliografia

AA.VV.: 2001, *Kurt Gödel*, Collana "I grandi della Scienza", ed. Le Scienze
Boncinelli E., Bottazzini U.: 2000, *La serva padrona. Fascino e potere della matematica*, Cortina Raffaello
De Finetti B.: 2006, *L'invenzione della verità*, Cortina Raffaello
Hersh R.: 2001, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi
Kuhn T: 1969, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Einaudi
Lolli G. : 2004, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino
Lynch M. P.:2007, *La verità e i suoi nemici*, Cortina Raffaello
Mangione C., Bozzi S.: 1993, *Storia della logica*, Garzanti
Odifreddi P.: 2003, *Il diavolo in cattedra*, Einaudi
Odifreddi P.: 2001, *C'era una volta un paradosso*, Einaudi
Palladino D., Borga M.: 1997, *Oltre il mito della crisi*, La Scuola.
Popper K. R.: 1985, *Congetture e confutazioni. Lo sviluppo della conoscenza scientifica*, Il Mulino
Popper K. R.: 1995, *Logica della scoperta scientifica*, Einaudi
Popper K. R.: 1996, *Tutta la vita a risolvere problemi,* Rusconi
Tarski A.: 1972, *Verità e dimostrazione*, in Verità e Dimostrazione. Questioni di matematica, Ed. Le Scienze, 1964.
Troudeau R.: 1991, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri
Toth I.: 1998, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Vita e pensiero