PARTE PRIMA

DAI GRAFICI ALLE FUNZIONI

PREREQUISITI : concetti di insieme, relazione, intervallo, intorno, quantificatori, Riferimento Cartesiano Ortogonale (RCO), le coniche, funzioni, operazioni e composizioni di funzioni.

DEFINIZIONE : Sia $f: \Re \to \Re$ una relazione di dominio $\Re$ e codominio $\Re$;

$f : A \subseteq \Re \to \Re$ e' una funzione se $\forall\ a \in A \quad \exists!\ b \in \Re \quad b = f(a)$

a e' detta variabile indipendente e b variabile dipendente

A e' detto campo di esistenza o insieme naturale di definizione della funzione

D'ora in poi considereremo solo funzioni definite in un insieme A che sia un intervallo o unione di intervalli.

In alcuni casi e' interessante considerare anche l'insieme $\Im$ dei valori che assume la f in $\Re$.

$\Im \equiv \{b \in \Re \ / \ \exists\ a \in A \ ;\ b = f(a)\} \equiv f(A)$

$\Im$ e' detto insieme delle immagini.

Il grafico di una funzione e' l'insieme

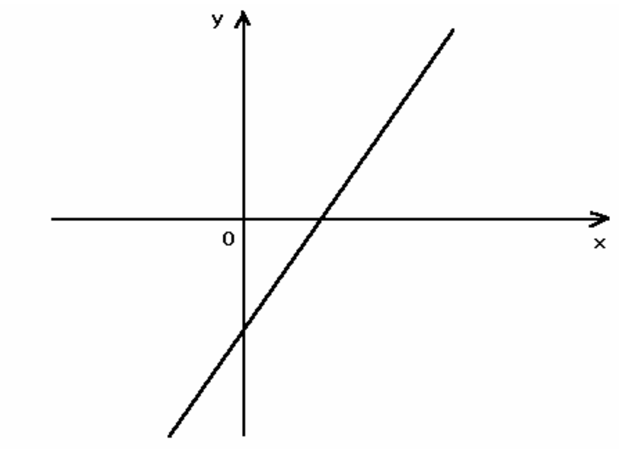
$G \equiv \{(x, f(x)) \in \Re^2 \ / \ x \in A, f(x) \in \Im\}$

La rappresentazione grafica di tale insieme in un R.C.O. e' detta "curva di equazione y = f(x)"

ESEMPIO : $Y = 2x - 3$ $\quad f: \Re \to \Re \quad x \to 2x - 3$

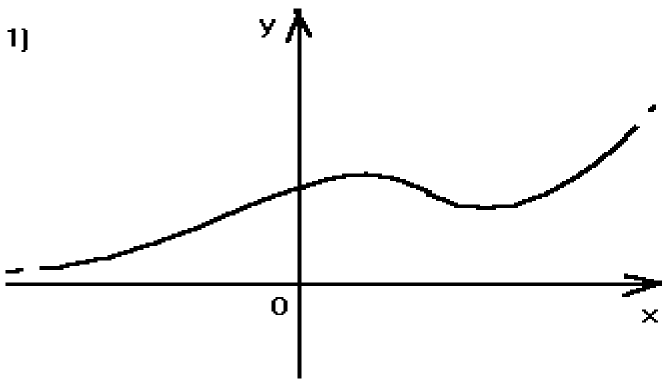
questa e' chiaramente una funzione: ad ogni valore di x resta associato uno e un solo valore di y. Il suo grafico e' rappresentato da una retta

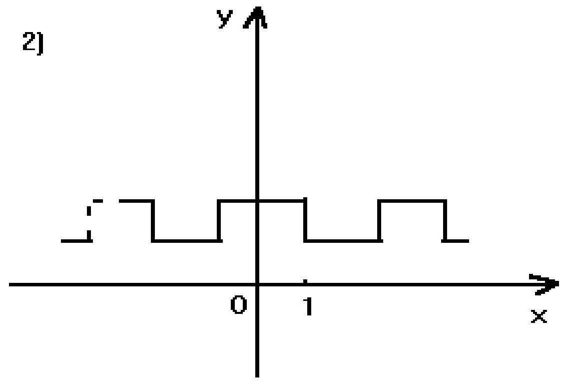
x	0	1	-1	3
y	-3	-1	-5	3

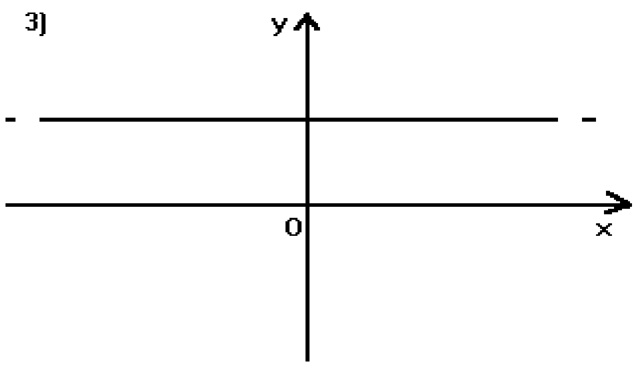


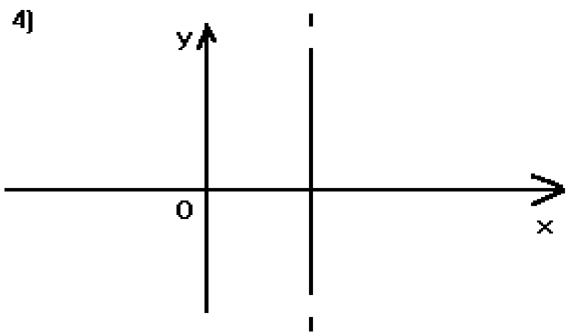
ESERCIZI

1) Osserva attentamente i seguenti grafici e stabilisci quali di essi sono grafici di funzioni e quali no e, in caso affermativo, stabilisci anche l'insieme di definizione e l'insieme delle immagini.

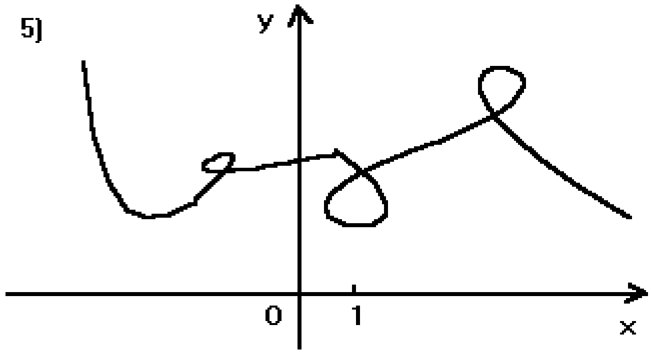




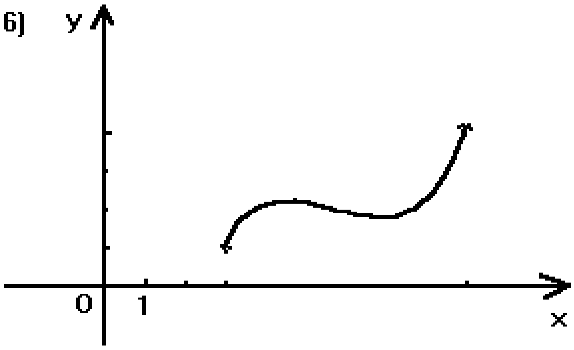




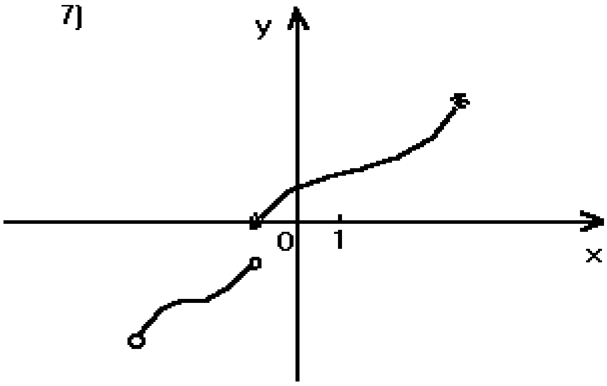
5)



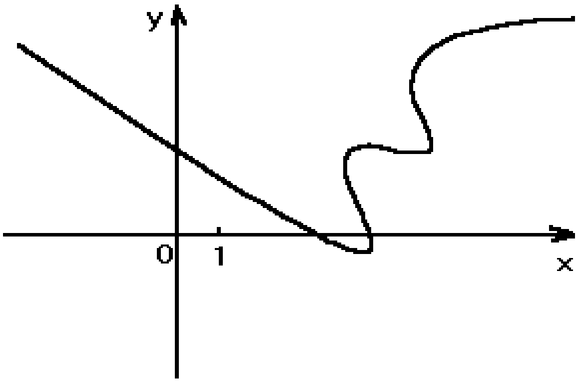
6)



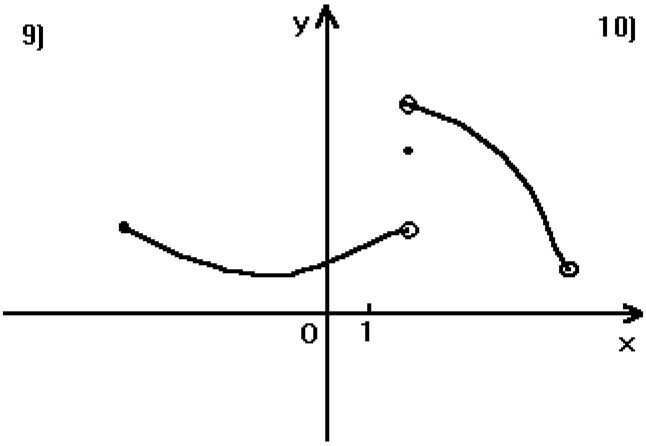
7)



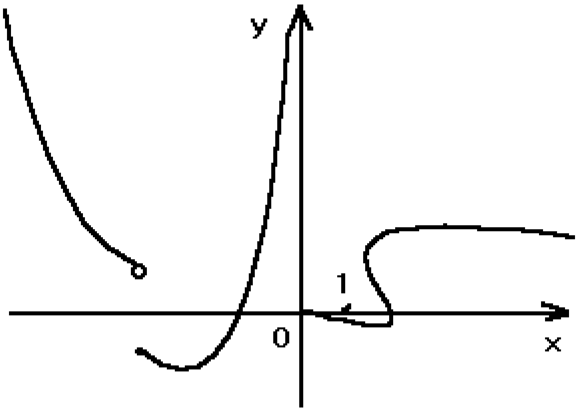
8)



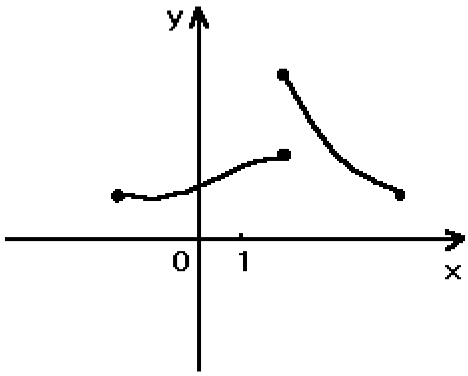
9)



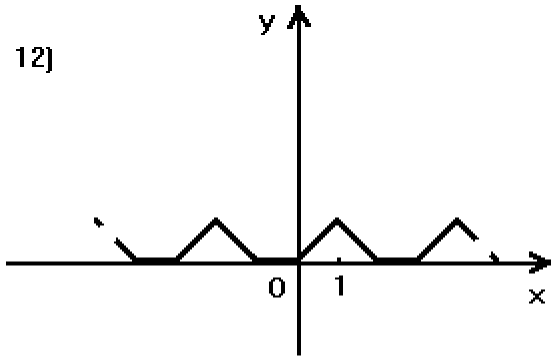
10)



11)



12)



Cerca ora di giustificare le tue risposte

2) Date le seguenti funzioni, attribuisci alla variabile indipendente alcuni valori e calcolane i valori corrispondenti (per via algebrica).

Trova campo di esistenza (C.E.) e insieme delle immagini della funzione data. Rappresenta graficamente la funzione e ritrova sul grafico le ordinate corrispondenti ai valori attribuiti alla x.

a) $y = -x + 4$	b) $y = \frac{1}{2}x - 1$	c) $y = 3x + 2$
d) $3x + 6y - 1 = 0$	e) $4x - y = 0$	f) $x = -3y + 1$
g) $y = \frac{2}{x}$	h) $y = -\frac{3}{x}$	i) $xy = 6$
l) $xy = -2$	m) $y = x^2$	n) $y = x^2 + 1$
o) $y = -x^2 + 2$	p) $y = x^2 - \frac{1}{2}$	q) $y = x^2 + x$
r) $y = x^2 - x + 1$	s) $y = -x^2 + 3x$	t) $y = -x^2 + 2x - 3$
u) $y = (x - 1)^2$	v) $y = \frac{2x+1}{x-3}$	z) $y = \frac{x-3}{x}$
1) $y = \frac{2-x}{1-x}$	2) $y = \frac{x}{1-2x}$	3) $y = \frac{3x}{2x+1}$
4) $y = \frac{2x+1}{x+2}$	5) $y = \text{sen } x$	6) $y = \cos x$
7) $y = \text{tg } x$	8) $y = \log_2 x$	9) $y = \ln x$
10) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$	11) $y = e^x$	12) $y = \frac{1}{2}^x$
13) $y = 3^x$	14) $y = \|x\|$	15) $y = \frac{\|x\|}{x}$
16) $y = x^2 + \frac{\|x\|}{x}$	17) $y = \frac{2+\|x\|}{x-1}$	18) $y = \frac{\|2+x\|}{x-1}$
19) $y = \left\|\frac{2+x}{x-1}\right\|$	20) $y = \|x^2 - x\| + 1$	21) $y = x^2 - \|x - 1\|$
22) $y = \|x^2 - x + 1\|$	23) $y = \|x^2 - \|x + 1\|\|$	24) $y = \frac{2+x}{\|2-x\|}$
25) $y = \frac{\|2-x\|}{\|2+x\|}$	26) $y = \frac{2+x}{\|2+x\|}$	27) $y = 2 \text{ sen } x$
28) $y = 3 \cos x$	29) $y = \text{sen } 2x$	30) $y = \cos 2x$
31) $y = \frac{1}{2}\text{tg}x$	32) $y = \text{tg } 3x$	33) $y = -\text{sen}\frac{x}{2}$

34) $y = -2\cos 3x$

35) $y = -\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{2})$

36) $y = -\mathrm{sen}(x - \frac{\pi}{3})$

37) $y = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$

38) $y = |\mathrm{sen}\, 2x|$

39) $y = \mathrm{sen}\, |x|$

40) $y = 2\, |\cos x|$

41) $y = \cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

42) $y = |\mathrm{tg}\, 2x|$

43) $y = -|\cos |x||$

44) $y = \ln |x|$

45) $y = 2 \ln x$

46) $y = \ln x^2$

47) $y = e^{x+1}$

48) $y = e^{x^2}$

3) Stabilisci, "leggendone" il grafico, quali delle seguenti equazioni rappresentano funzioni. In caso affermativo individua il Campo di Esistenza e l'Insieme delle immagini.

1) $y = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \le x \le 3 \\ \frac{x-1}{2x} & (x < 1) \cup (x > 3) \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x & -1 < x \le 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} \ln x & 1 \le x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ 2x^2 + x & 3 < x \le 4 \end{cases}$

Consideriamo ora il segno di una funzione

L'insieme di POSITIVITÀ di una funzione $f : A \subseteq \Re \to \Re$ e'

$$P = \{ x \in A : f(x) > 0 \}$$

L'insieme di NEGATIVITÀ e'

$$N = \{ x \in A : f(x) < 0 \}$$

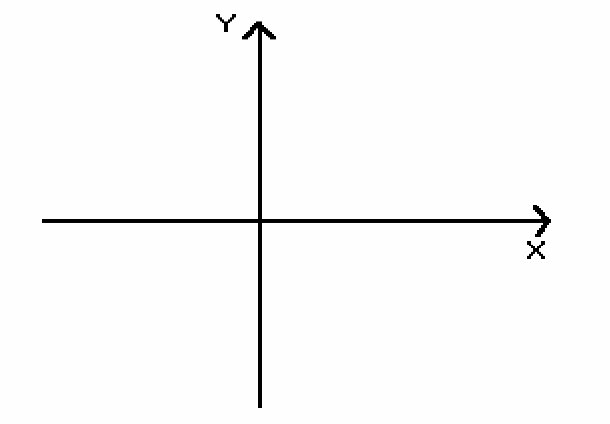
L'insieme degli ZERI e'

$$Z = \{ x \in A : f(x) = 0 \}$$

ESERCIZI

4) Considera la funzione $y = x + 3$. Completa la seguente tabella e rappresentala graficamente:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									



Per quali valori di x della tabella la y e' positiva? negativa? nulla?

In generale, per quali valori di x la y e' positiva? Puoi procedere nel seguente modo

$y = x + 3$ $\qquad y > 0 \Rightarrow \qquad x + 3 > 0 \Rightarrow \qquad x > -3$

$$P \equiv \{ x > 3 \}$$

dove e' negativa?

dove e' nulla?

5) Riprendi le equazioni dell'esercizio 3) e stabilisci per quali valori di x la y e' >, =, < 0.

6) Prendi in considerazione i grafici disegnati nel primo esercizio e deduci da essi P, N, Z delle funzioni rappresentate.

CRESCENZA E DECRESCENZA, MASSIMI E MINIMI

DEFINIZIONE : Data una funzione y=f(x) e dato x° appartenente al suo dominio A, diremo che la funzione ha in x° un punto di Massimo (Minimo) Assoluto se $\forall x \in A$ $f(x°) \geq f(x)$ ($f(x°) \leq f(x)$).

ESERCIZI

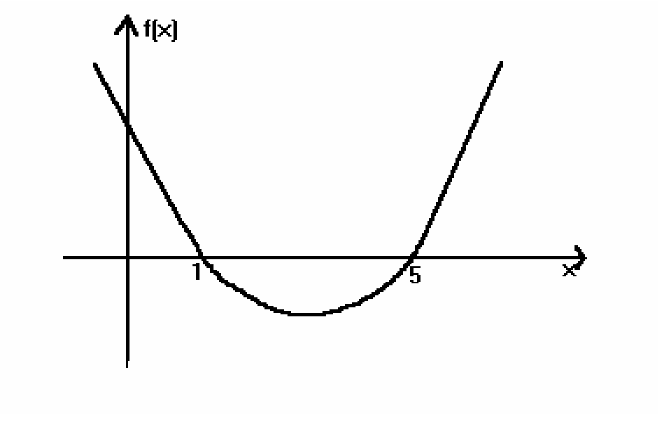
7) Delle funzioni riportate negli es. 2) - 3) definisci i Massimi e i Minimi, se esistono.

Disegnamo ora la parabola di equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

completa la tabella sotto riportata

x	1	2	3	5	6
y					



Osserva ora la tabella : all'aumentare dei valori che assume la variabile x cosa succede ai corrispondenti valore della variabile y?

0 < 1 allora f(0) .... f(1)

4 < 5 f(4) .... f(5)

In generale

se $x \leq 3$ all'aumentare di x la y diminuisce, mentre

se $x \geq 3$ all'aumentare di x la y aumenta

Diremo anche che

per $x \leq 3$ la funzione e' DECRESCENTE

per $x \geq 3$ la funzione e' CRESCENTE

DEFINIZIONE : Data la funzione $f : A \subseteq \Re \to \Re$ essa e' CRESCENTE nell'intervallo $I \subseteq A$ se

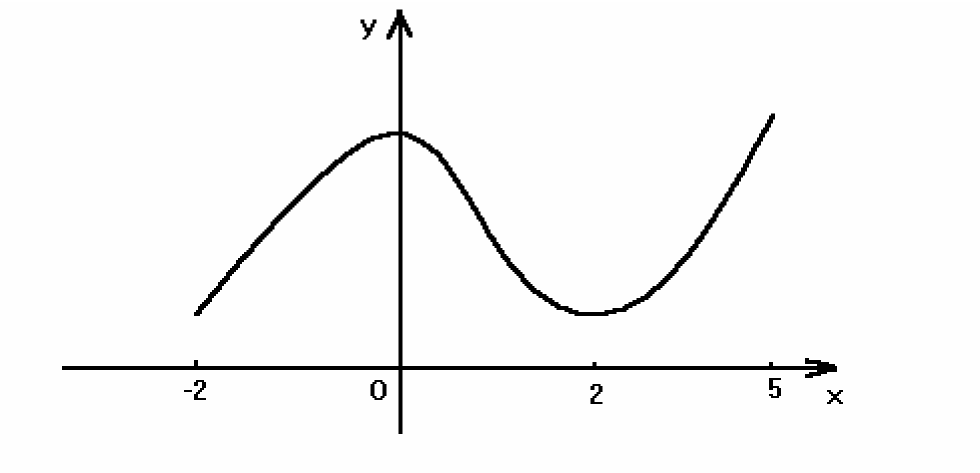
$\forall\ x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

essa e' DECRESCENTE nell'intervallo $I \subseteq A$ se

$\forall\ x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Se $I \equiv A$ la funzione e' crescente o decrescente in tutto il Campo di Esistenza (si dice che e' globalmente crescente o globalmente decrescente)

ESEMPIO:



Osservando il grafico si può' osservare che

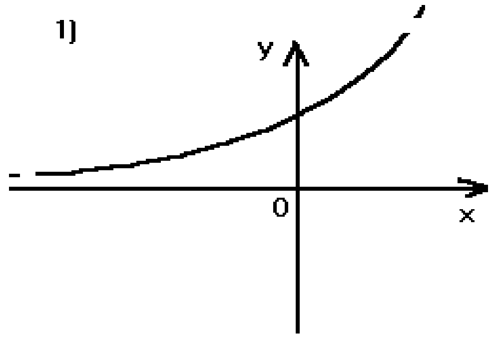
in [-2 , 0] la funzione e' crescente

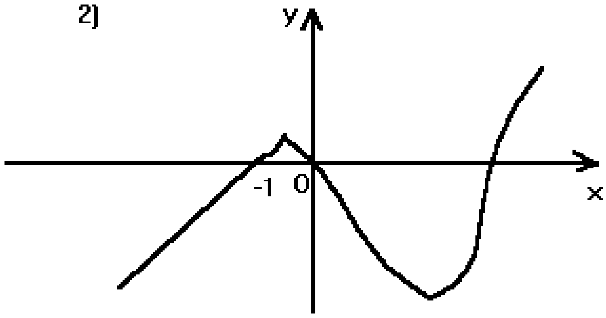
in [0 , 2]la funzione e' decrescente

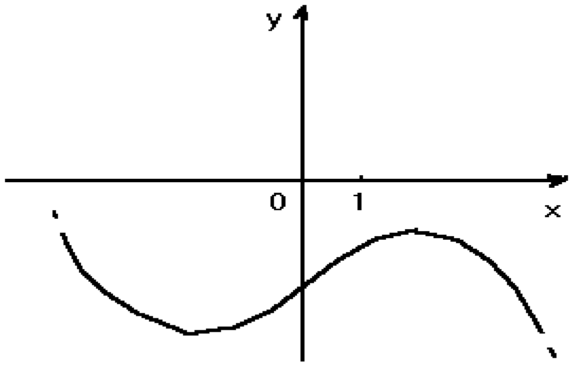
in [2 , 5]la funzione e' crescente

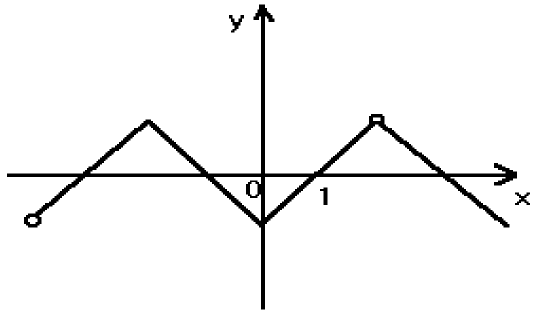
ESERCIZI

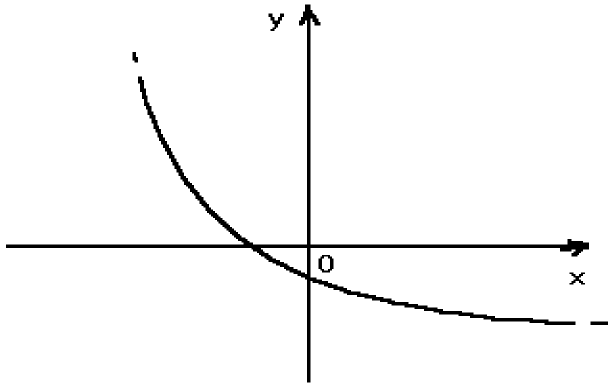
8) Osserva i seguenti grafici e stabilisci gli intervalli di crescenza e decrescenza delle funzioni rappresentate

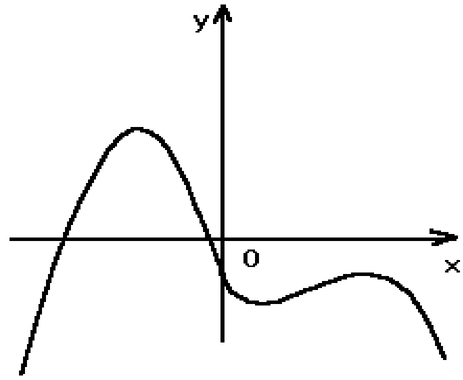




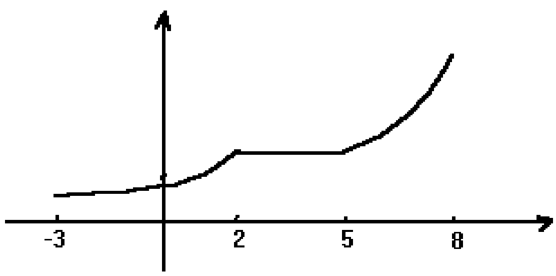






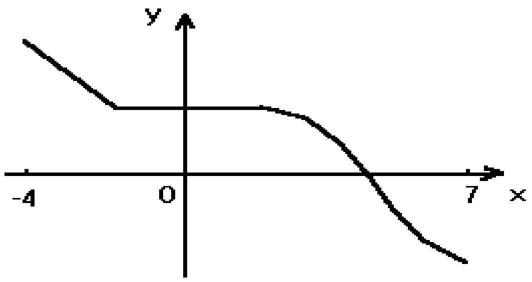


9) Osserva il seguente grafico



Puoi ancora dire che la funzione rappresentata e' crescente nell'intervallo [-3 , 8]?

10) Osserva ora il seguente grafico



Puoi dire che la funzione e' decrescente nell'intervallo [-4 , 7]?

Quali sono i valori di x per i quali non "funziona" la definizione di crescenza o decrescenza in un intervallo?

Per poter descrivere situazioni come queste occorre una nuova definizione :

DEFINIZIONE : Data la funzione $f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$ essa e'

NON DECRESCENTE (o crescente debolmente) nell'intervallo $I \subseteq A$ se

$\forall\ x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

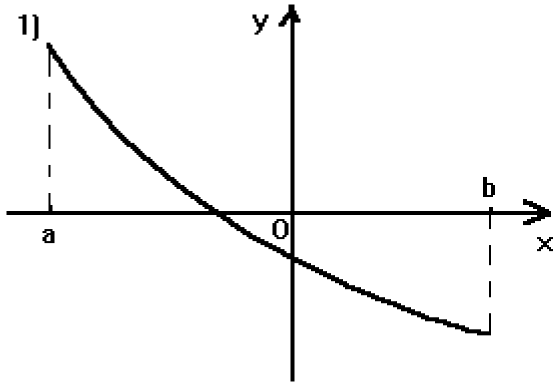
NON CRESCENTE (o decrescente debolmente) nell'intervallo $I \subseteq A$ se

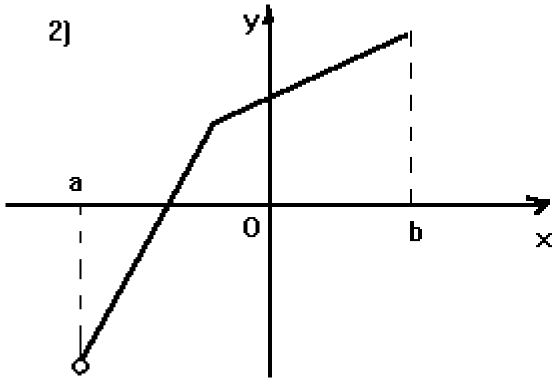
$\forall\ x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

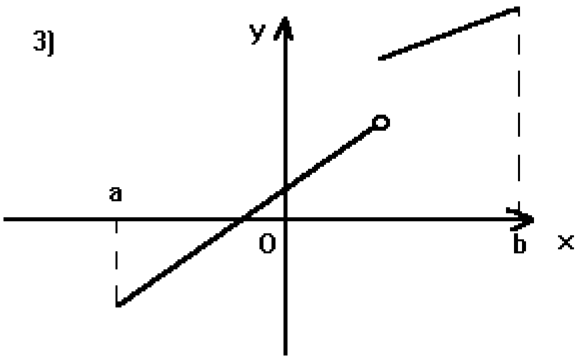
DEFINIZIONE : Una funzione crescente o decrescente in senso stretto o in senso debole si dice MONOTONA

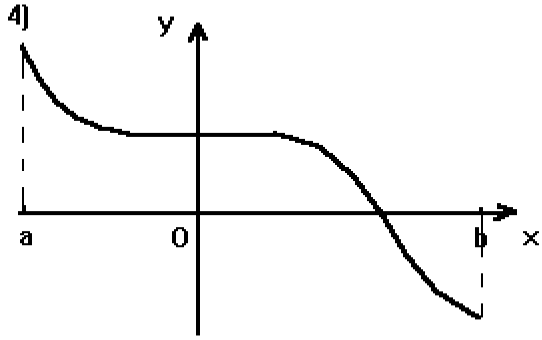
ESERCIZI

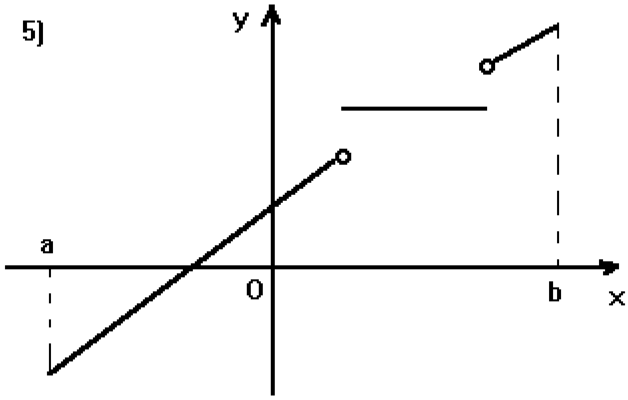
11) Osserva i seguenti grafici e stabilisci quali funzioni sono crescenti, decrescenti, non crescenti e non decrescenti nel loro insieme di definizione.

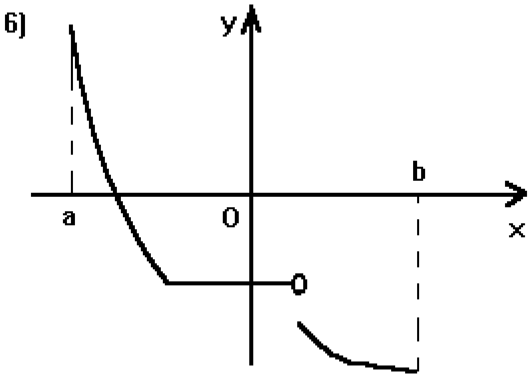










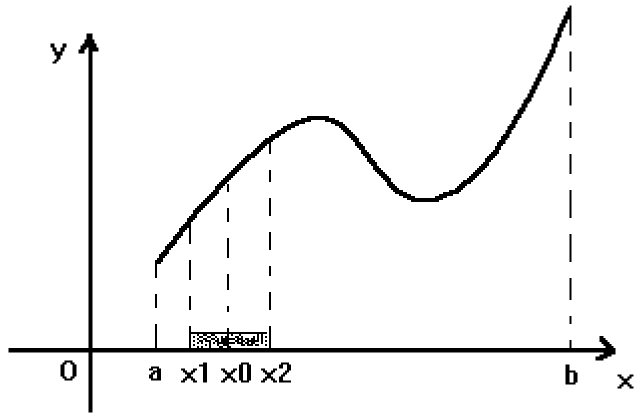


12) Prendi i grafici del primo esercizio e stabilisci (anche approssimativamente) gli intervalli di crescenza, decrescenza, non crescenza, non decrescenza.

Sia $f : A \subseteq \Re \to \Re$ e $x_0 \in A$ (interno ad A, cioè tale che esisteno x_1, $x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_0 < x_2$)

DEFINIZIONE : Si dice che f e' crescente in x_0 se

$\exists\, I(x_0)\ \forall\, x_1, x_2 \in I(x_0) \cap A\ (x_1 < x_0 \wedge x_2 > x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2))$



DEFINIZIONE : Si dice che f e' decrescente in x_0 se

$\exists\, I(x_0)\ \forall\, x_1, x_2 \in I(x_0) \cap A\ (x_1 < x_0 \wedge x_2 > x_0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0) > f(x_2))$

Si parlerà' di non crescenza o non decrescenza se le disuguaglianze valgono in senso debole cioè' se

$\exists\, I(x_0)\ \forall\, x_1, x_2 \in I(x_0) \cap A\ (x_1 < x_0 \wedge x_2 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2))$

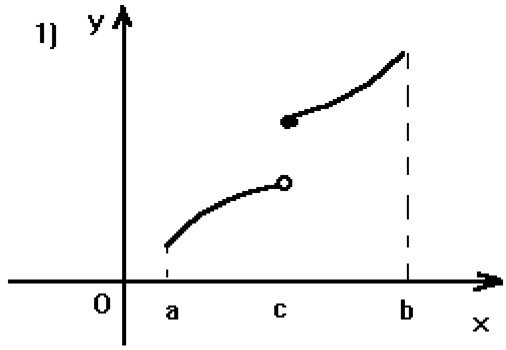
$\exists\, I(x_0)\ \forall\, x_1, x_2 \in I(x_0) \cap A\ (x_1 < x_0 \wedge x_2 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_0) \ge f(x_2))$

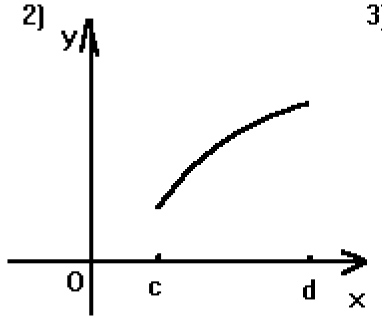
ESERCIZI

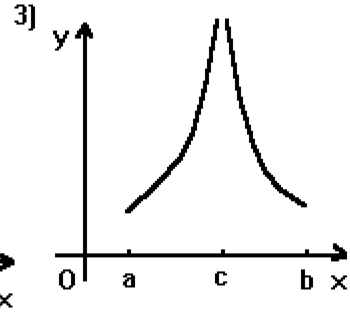
13 Riprendi in considerazione la curva di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.

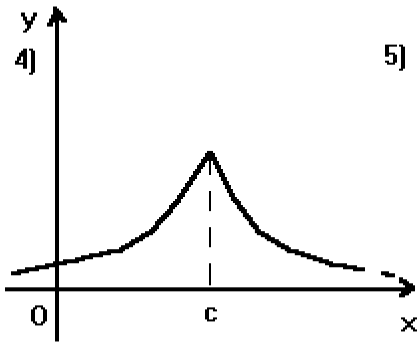
In x = 4 la funzione e' crescente o decrescente?

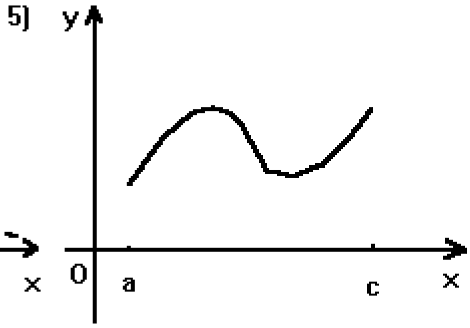
14) Osserva i seguenti grafici e stabilisci se nel punto c la funzione e' crescente o decrescente.

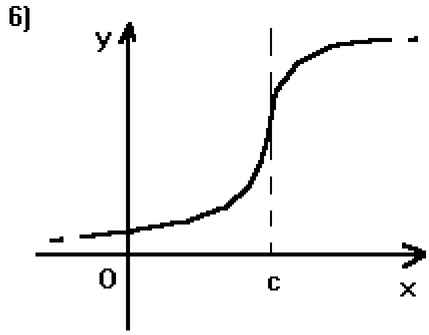


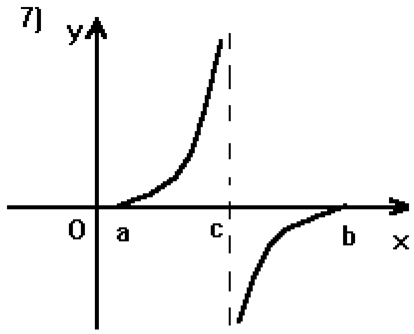


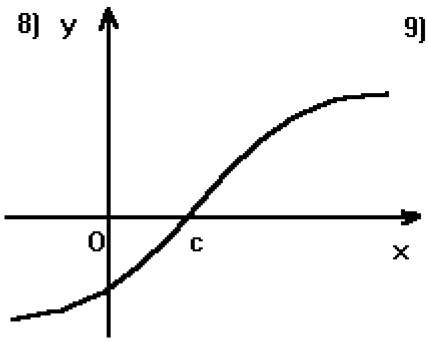


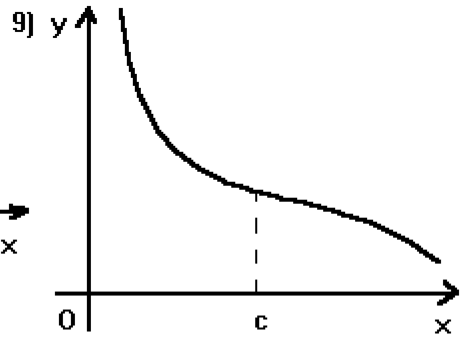


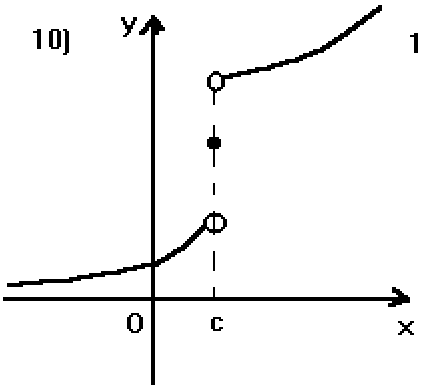


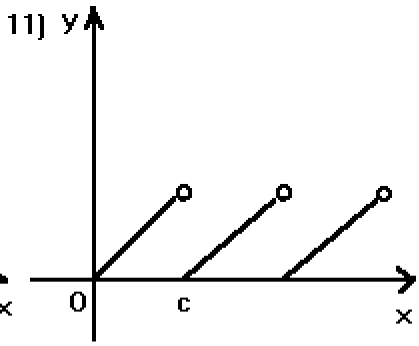


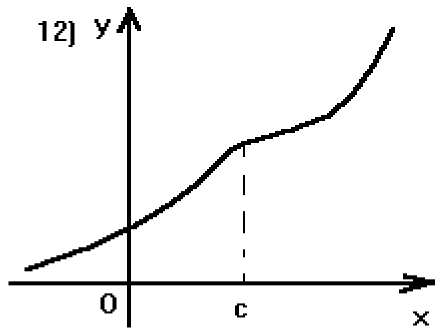






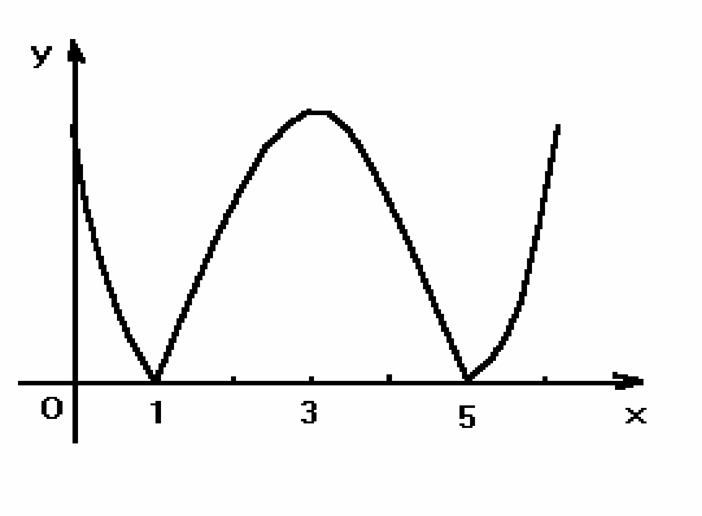






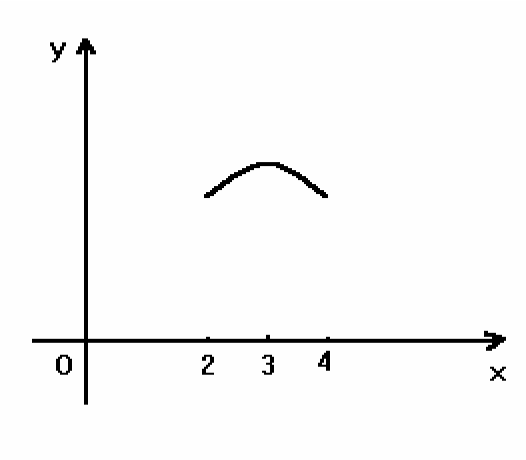
Costruiamo ora il grafico della funzione $f: \Re \to \Re \quad x \to \left| x^2 - 6x + 5 \right|$ cioè'

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{per } x < 1 \cup x > 5 \\ 0 & \text{per } x = 1 \cup 5 = 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{per} 1 < x < 5 \end{cases}$$



La funzione ha minimo assoluto (m = 0) nei punti x = 1 e x = 5, non ha massimo assoluto.

Osserva pero' cosa accade in x = 3. Se restringiamo il campo di indagine ad un intervallo sufficientemente piccolo, ad esempio [2 , 4], la funzione assume valore massimo (M = 4) per x = 3.

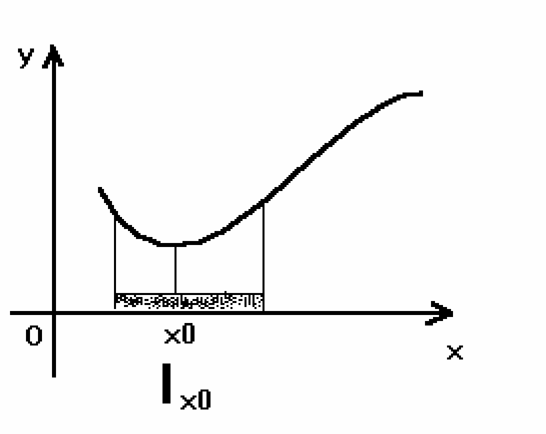


Allora

DEFINIZIONE : la funzione y = f(x) assume MASSIMO RELATIVO nel punto $x = x_0$ se

$\exists I(x_0) \subseteq A \quad \forall x \in I(x_0) \qquad f(x) \leq f(x_0)$

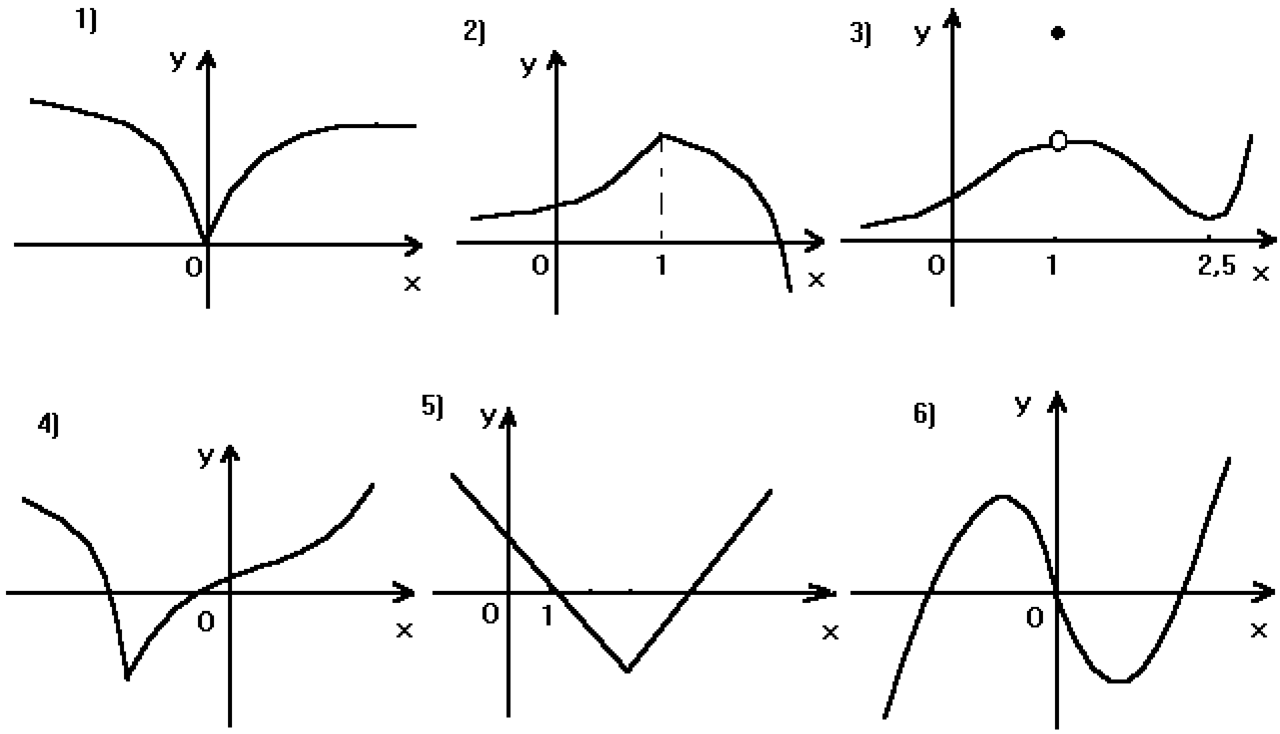
Analogamente la funzione y = f(x) assume MINIMO RELATIVO nel punto $x = x_0$ se $\exists I(x_0) \subseteq A \quad \forall x \in I(x_0) \qquad f(x) \geq f(x_0)$

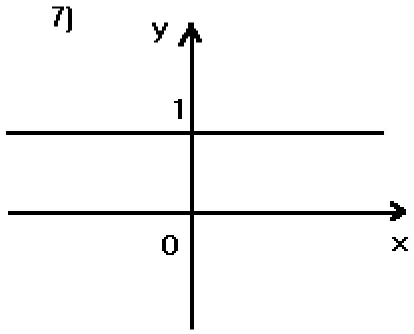


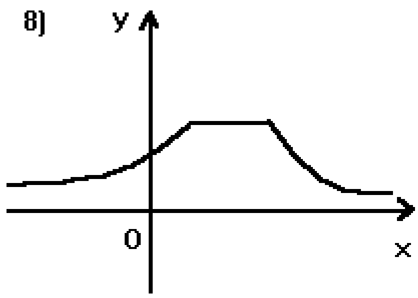
ESERCIZI

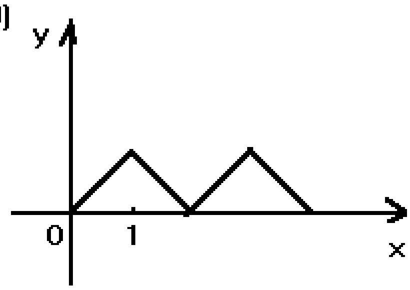
15)Individua nei grafici dell'esercizio 8 i punti di MINIMO RELATIVO, ove esistano

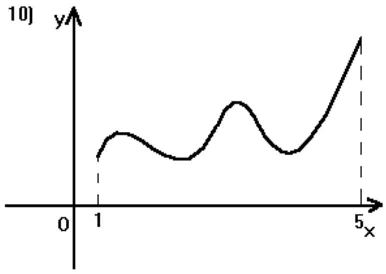
16) Osserva i seguenti grafici e stabilisci se ci sono punti di MASSIMO e di MINIMO RELATIVO.











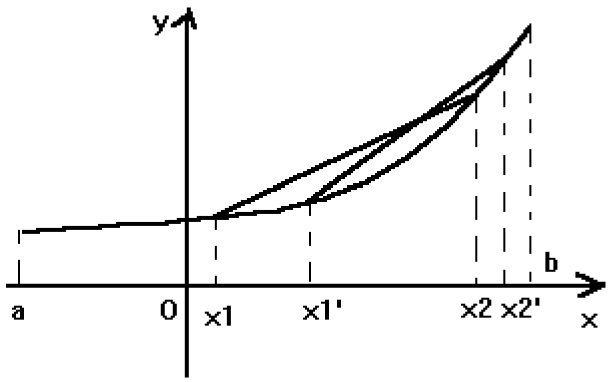
I punti di massimo e di minimo relativo si dicono anche "estremi relativi" o "punti estremanti". Si può' anche vedere facilmente che se x_0 e' punto di massimo relativo per y = f(x), allora la funzione e'non decrescente in un intorno sinistro di x_0 e decrescente in un intorno destro, mentre se x_0 e' punto di minimo relativo, la funzione e' non crescente in un intorno sinistro e crescente in un intorno destro di x_0.

CONCAVITA'

Sia $f: A \subseteq \Re \rightarrow \Re$.

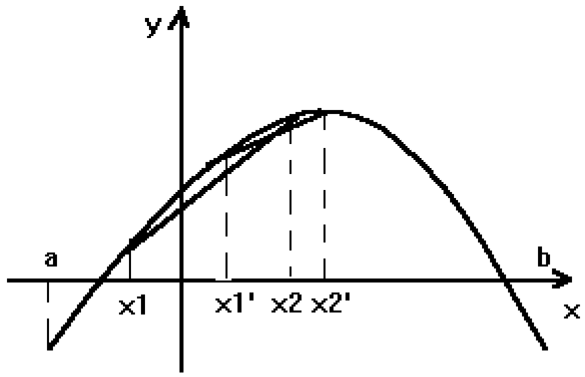
DEFINIZIONE : y=f(x) e' CONCAVA VERSO L'ALTO se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ "sta al di sopra" (o per lo meno "non sta al di sotto") del grafico della funzione y=f(x).

[In altre parole $\forall a \in \Re$ con $0 \le a \le 1$ si ha $af(x_1) + (1-a)f(x_2) \ge f(ax_1 + (1-a)x_2)$)]



DEFINIZIONE : f(x) e' CONCAVA VERSO IL BASSO se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ "sta al di sotto" (o per lo meno "non sta al di sopra") della funzione f(x).

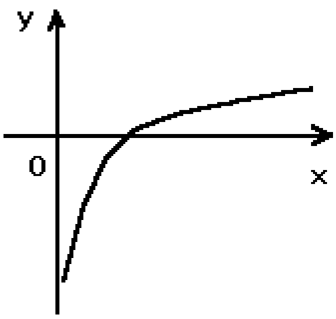
[Cioè' $\forall a \in \Re$ con $0 \le a \le 1$ si ha $af(x_1) + (1-a)f(x_2) \le f(ax_1 + (1-a)x_2)$)]



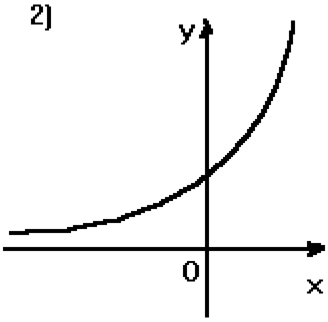
ESERCIZI

17)Stabilisci quali dei seguenti grafici rappresenta una funzione concava verso l'alto o quali verso il basso.

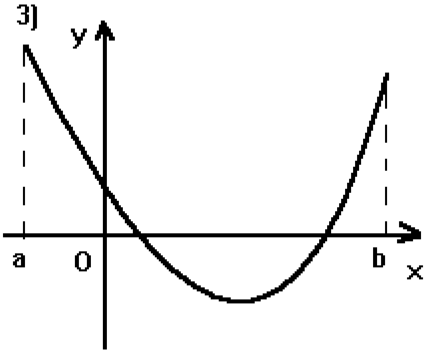
1)



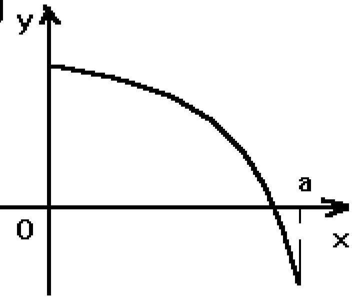
2)



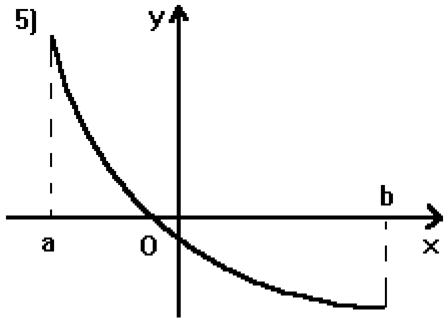
3)



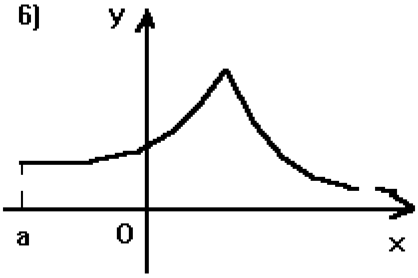
4)



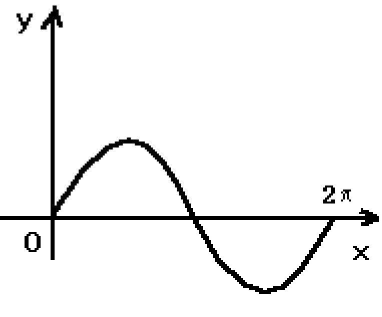
5)



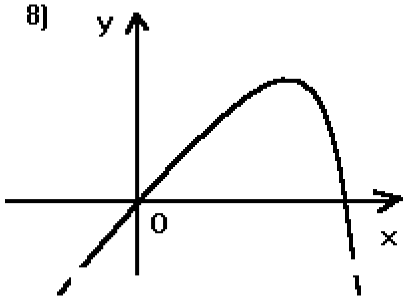
6)



7)



8)



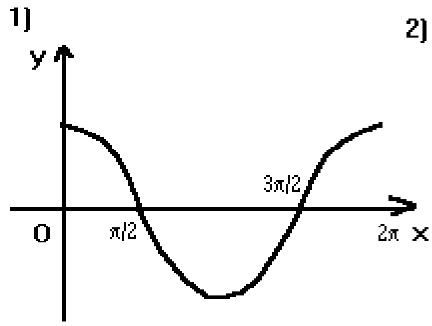
Ti sarai accorto che alcune funzioni rappresentate non sono ne' concave verso il basso ne' verso l'alto. Si può' pero' dare una definizione LOCALE di concavita':

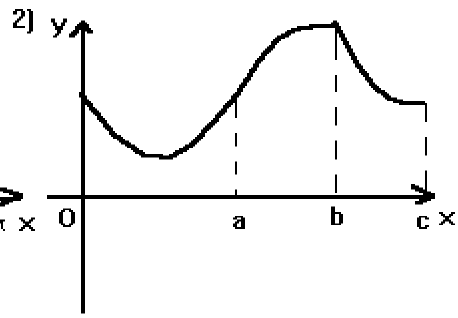
DEFINIZIONE : f(x) e' concava verso l'alto in un intervallo $I \subseteq A$ se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta al di sopra (o per lo meno non sta al di sotto) della funzione f(x).

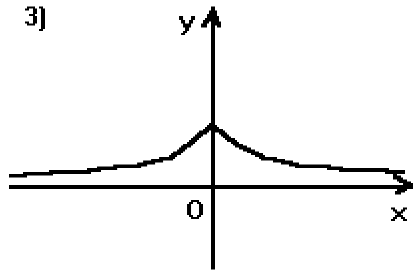
DEFINIZIONE : f(x) e' concava verso il basso in un intervallo $I \subseteq A$ se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, la corda congiungente i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta al di sotto (o per lo meno non sta al di sopra) della funzione f(x).

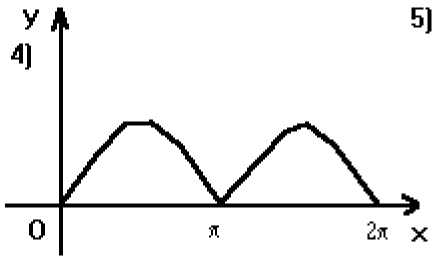
ESERCIZI

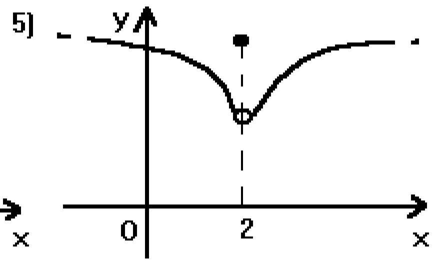
18) Nei seguenti grafici stabilisci gli intervalli di concavità' verso l'alto e verso il basso.

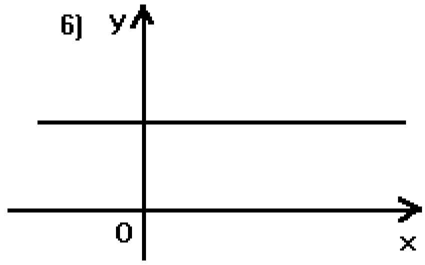


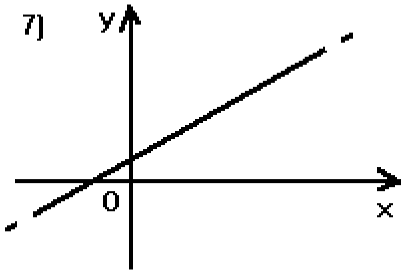


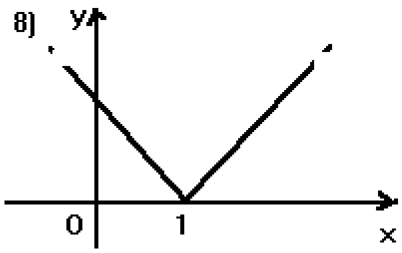


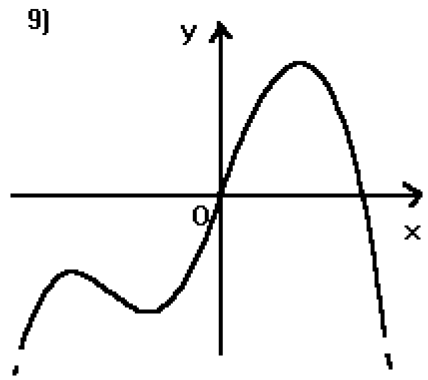


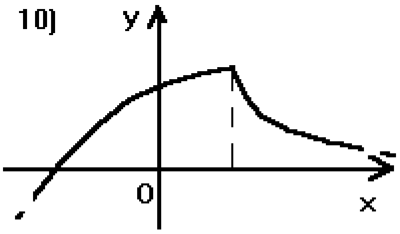












Hai qualche osservazione da fare a riguardo dei grafici 5, 6, 7, 8?