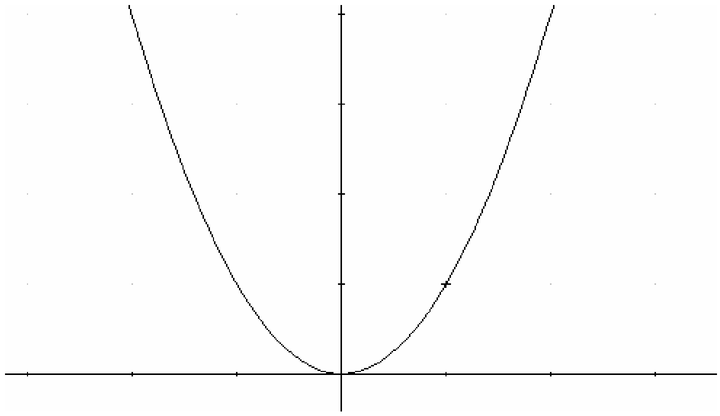
PARTE SECONDA

I LIMITI

INTRODUZIONE INTUITIVA AL CONCETTO DI LIMITE

Consideriamo la funzione $f: x \to x^2$ il cui grafico ti è certamente noto:



Possiamo anche determinare il valore della funzione in alcuni punti

x	0	±1	±2	±1000	$\pm 10^6$
y	0	+1	+4	1000000	10^{12}

Per determinare sul grafico il punto di coordinate (10^6 , 10^{12}) avvresti bisogno di un foglio enorme o dovresti scegliere unità di misura così microscopiche da non poter individuare altri punti.

Dal grafico e dalla tabella numerica si intuisce che, al crescere, in valore assoluto, dei valori della x valori corrispondenti della y crescono indefinitamente. In matematica si sintetizzano frasi di questo tipo con la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

(si legge: il limite per x che tende a più infinito di x^2 è uguale a più infinito)

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Il simbolo "+∞" [-∞] non è un numero reale, ma traduce l'idea che la funzione assume valori sempre più grandi (positivi o negativi).

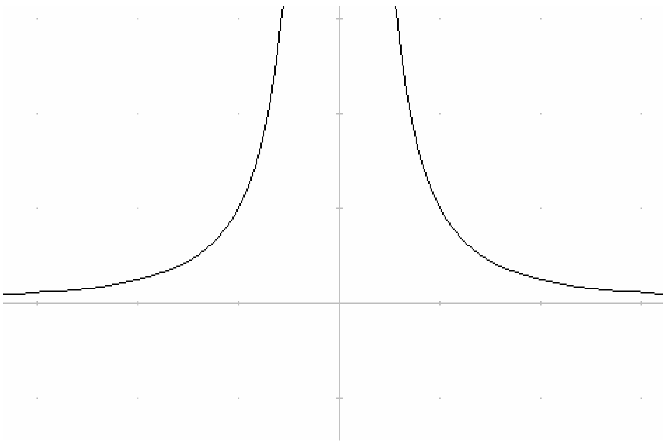
Costruiamo per punti, approssimativamente, il grafico di $y = \frac{1}{x^2}$:

x	±0,1	±0,01	±0,001	....	±0,00000001
y	10^2	$+100^2$	$+1000^2$	....	10000000^2

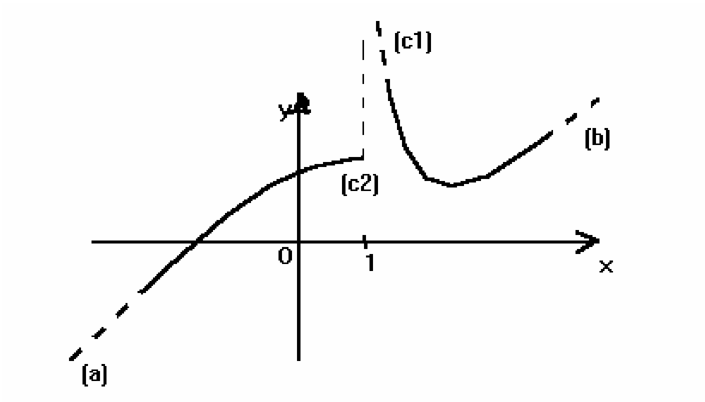
Si intuisce che, quando i valori della x tendono a zero, sia per valori approssimanti per eccesso (da destra, oppure 0^+) che per difetto (da sinistra, oppure 0^-) i valori della y diventano indefinitamente molto molto grandi. Brevemente

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Si può costruire il grafico approssimativo della funzione



Consideriamo il seguente grafico e proviamo ad interpretarlo utilizzando la nuova "stenografia" introdotta:



Possiamo tradurre le seguenti situazioni:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

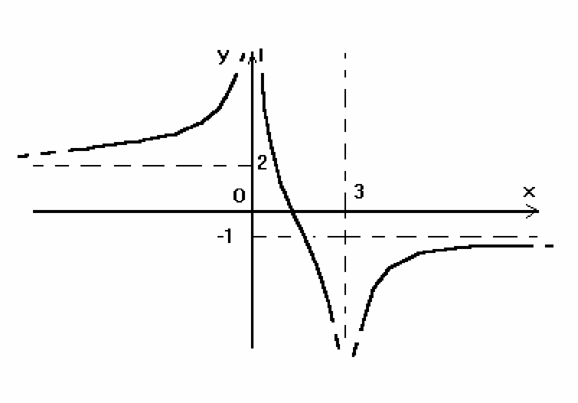
c) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

In genere utilizziamo queste "scritture" per evidenziare il comportamento della funzione nelle "vicinanze" degli estremi degli intervalli che ne determinano il campo di esistenza.

Nota in particolare che relativamente al caso c_2 si ha anche f(1)=2.

ESERCIZI

19) Utilizzando il grafico seguente dedurne i limiti richiesti:

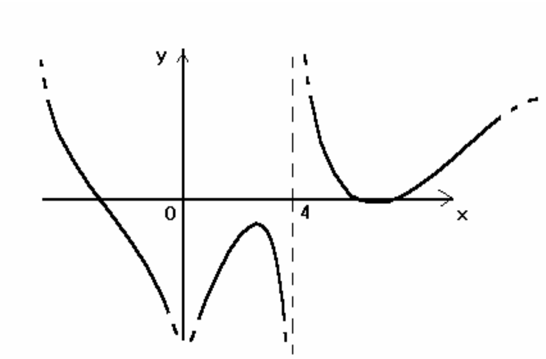


a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$ d) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \ldots\ldots$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$ e) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \ldots\ldots$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots$ f) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$

20) Ripetere l'esercizio precedente:

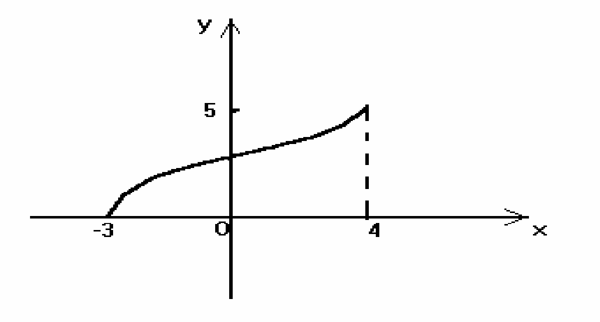


a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots$ d) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \ldots\ldots$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$ e) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \ldots\ldots$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ldots\ldots$ f) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots$

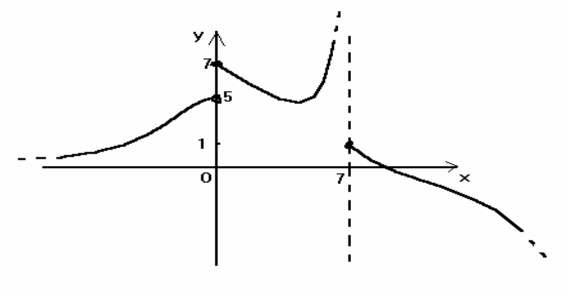
21)Come sopra



a) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \ldots\ldots$ c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \ldots\ldots$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots$

22)Come sopra

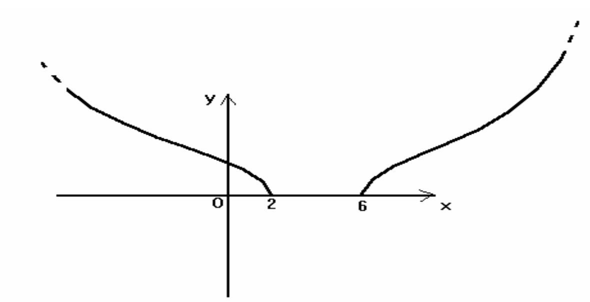


a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = \ldots\ldots$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$ e) $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = \ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$

23)Come sopra



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \ldots\ldots$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ldots\ldots$ e) $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \ldots\ldots$

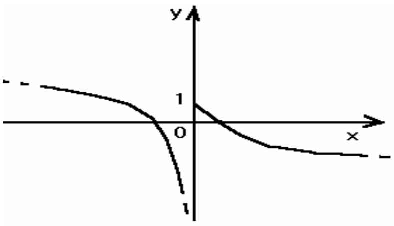
c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \ldots\ldots$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$

Avrebbero senso le scritture

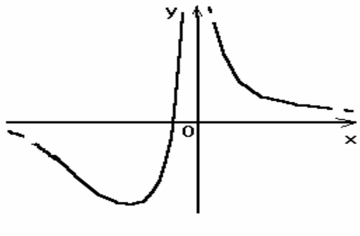
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ldots\ldots$ e $\lim_{x\to 6^-} f(x) = \ldots\ldots$? perchè ?

24) Interpreta utilizzando i limiti i seguenti grafici:

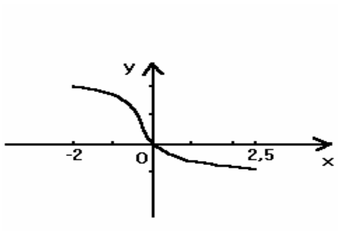
a)



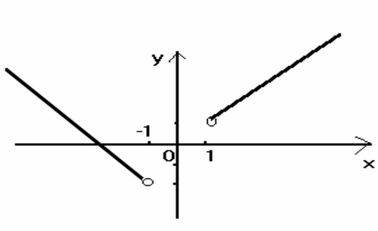
b)



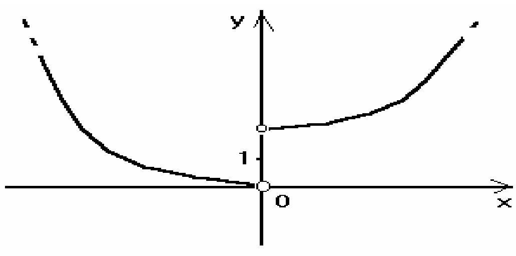
c)



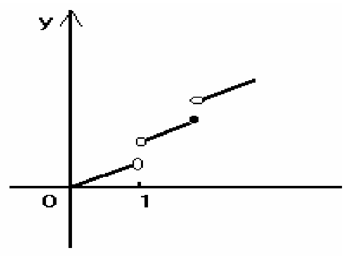
d)



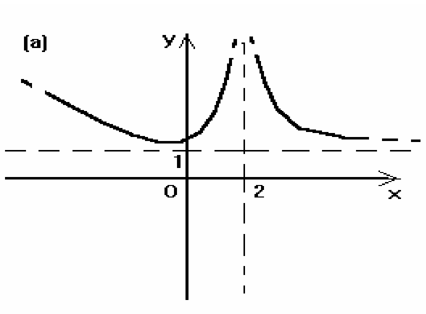
e)

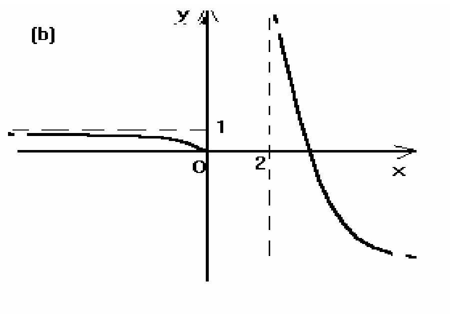


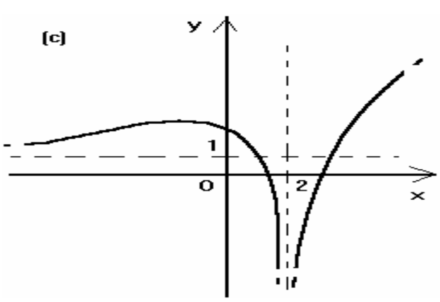
f)

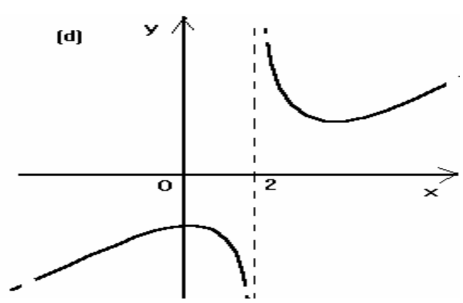


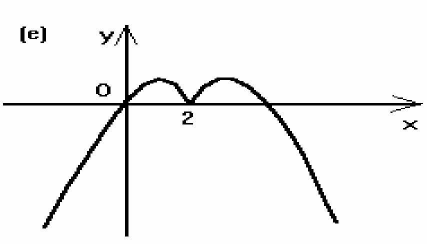
25) Quali delle seguenti scritture sono corrette per ciascun grafico assegnato?

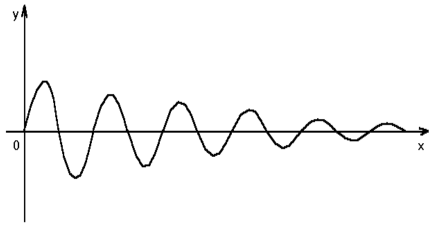












1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ 7) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ 9) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

26) Considera le seguenti funzioni e determinane il dominio. Con l'uso della calcolatrice e del grafico deducine il comportamento agli estremi degli intervalli che ne determinano il campo di esistenza.

a) $y = \log_{1/2}x$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^{-x}$

d) $y = x^2$ e) $y = 4-x^2$ f) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$

g) $y = \dfrac{1-x}{x}$ h) $y = tgx$ con $-p/2<x<p/2$

i) $y = cotgx$ con $0<x<p$ l) $y = senx$ m) $y = cosx$

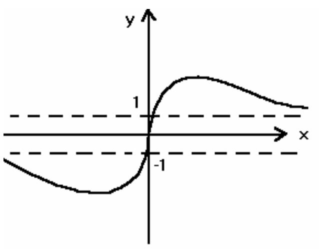
n) $y = arctgx$ o) $y = arccotgx$ p) $y = \log_3|x|$

q) $y = |\log_{1/3}x|$ r) $y = 2^{|x|}$ s) $y = \sqrt{1-x^2}$

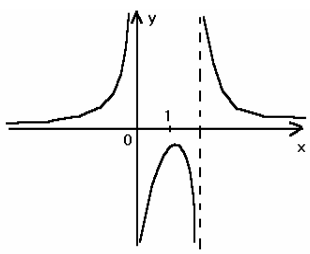
t) $y = \sqrt{1+x^2}$ u) $y = |x|$ v) $y = \dfrac{|x|}{x}$

27)Noto il grafico della funzione $f : x \to f(x)$ dedurre:

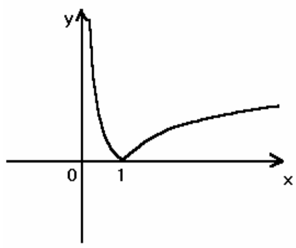
dominio e insieme delle immagini, intersezione con gli assi, positività e negatività, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, concavità. Dedurne, inoltre, il comportamento agli estremi degli intervalli che ne determinano il campo di esistenza.



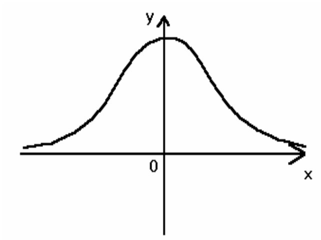
a)

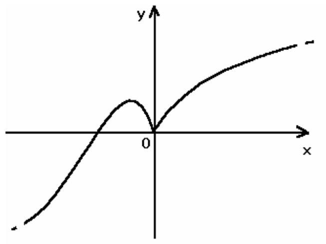


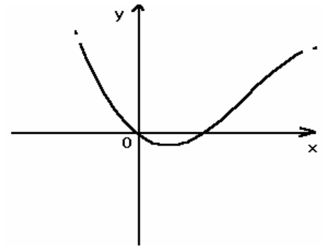
b)

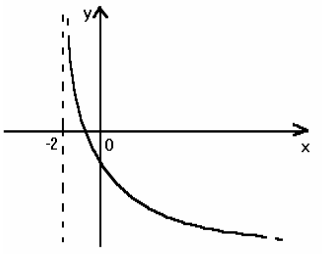


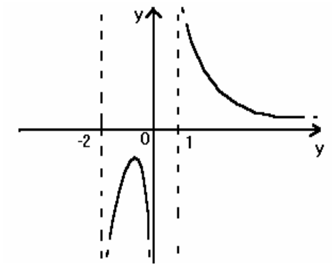
c)

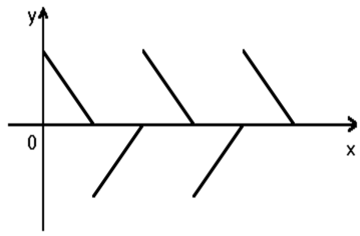
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

28) Dedurre il grafico della funzione $f : x \rightarrow f(x)$ noto che:

a) è definita su tutto $\Re$

interseca gli assi nel punto (0,0)

è positiva per $x \neq 0$

cresce per $0<x<2$

decrese per $x<0 \cup x>2$

è concava verso l'alto per $x < 2-\sqrt{2} \cup x > 2+\sqrt{2}$ e verso il basso per $2-\sqrt{2}< x <2+\sqrt{2}$

ha un massimo relativo in M(2,1) e un minimo assoluto in m(0,0)

valgono $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) è definita per $x \neq \pm 1$ ed è dispari

interseca gli assi coordinati nel punto (0,0)

è positiva per $-1< x <0 \cup x >1$

è negativa per $x <-1 \cup 0 < x <1$

decresce per ogni $x \in D$

non ha nè massimi nè minimi

è concava verso il basso per $x <-1 \cup 0 < x <1$

è concava verso l'alto per $-1< x <0 \cup x >1$

valgono $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

c) è definita per x <1 v x >2

interseca gli assi coordinati nei punti A(-2,0), B(0,-4), C(3,0)

è positiva per x<-2 v x>3

è negativa per -2<x<1 v 2<x<3

cresce per x>2 e decresce per x<1

non ha nè massimi nè minimi ed è sempre concava verso il basso

valgono $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

d) è definita per ogni x $\in\Re$ ed è pari

interseca gli assi nel punto (0,0)

è positiva per x $\neq$ 0

cresce per x<√3 ∪ 0<x<√3

decresce per √3<x<0 ∪ x>√3

ha massimi nei punti (√3,3) e (√3,3), minimo in (0,0)

è concava verso l'alto per x<-4 ∪ x>4 e verso il basso per -4<x<4

valgono $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

CONFRONTO FRA INFINITI E INFINITESIMI

Costruiamo per punti, in uno stesso R.C.O. Monometrico i grafici delle seguenti funzioni, ristrette all'intervallo [0,+∞).

$y = \sqrt[4]{x}$

x	1	2	3	10	1000
y	1	1,1892	1,316	1,7783	5,6234

$y = \sqrt[3]{x}$

x	1	2	3	10	1000
y	1	1,2599	1,4422	3,1623	10

$y = \sqrt{x}$

x	1	2	3	10	1000
y	1	1,4142	1,732	3,1623	31,623

$y=x$

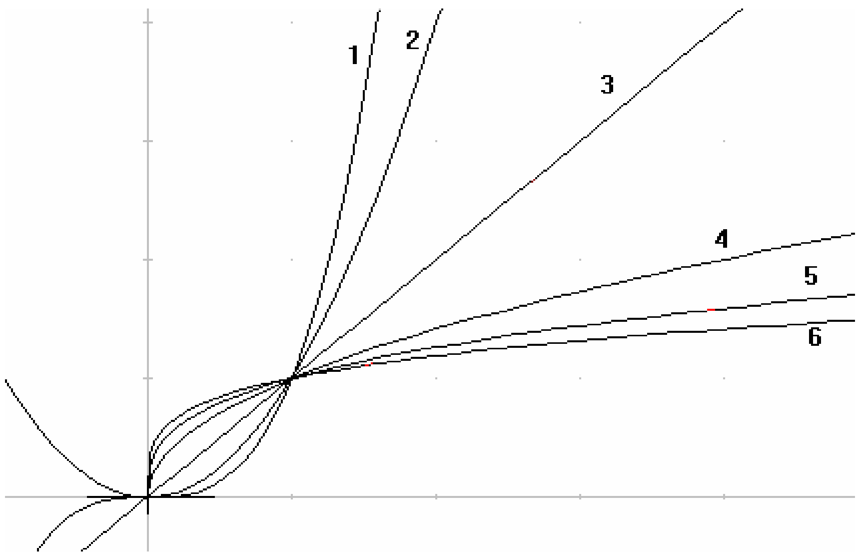
x	1	2	3	10	1000
y	1	2	3	10	1000

$y=x^2$

x	1	2	3	10	1000
y	1	4	9	100	10^6

$y=x^3$

x	1	2	3	10	1000
y	1	8	27	1000	10^9



Osserviamo che:

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

I limiti di tutte le funzioni considerate per x che tende a $+\infty$, sono uguali a $+\infty$, ma, dai grafici, si intuisce che alcune raggiungono valori "molto grandi" più rapidamente di altre.

Possiamo quindi stilare una specie di "graduatoria" di infiniti.

In generale, considerata $y = x^n$ con $n \in Q^+$ e x tendente a $+\infty$, al crescere di n ci troviamo in presenza di infiniti "più rapidi": n è detto **ordine di infinito**.

Conosci però altre funzioni che tendono all'infinito per x tendente a $+\infty$ e precisamente

$y = \log_a x$ e $y = a^x$ con a>1.

Studiamo in particolare y = lnx e proviamo a confrontarla ad esempio con

$y = x$ $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[7]{x}$

Costruiamo in uno stesso R.C.O.M. i relativi grafici dopo aver completato le seguenti tabelle:

y=lnx

x	1	10	100	1000	10^6	10^{10}
y	0	2,3	4,6	6,9	13,31	23,02

y=x

x	1	10	100	1000	10^6	10^{10}
y	1	10	100	1000	10^6	10^6

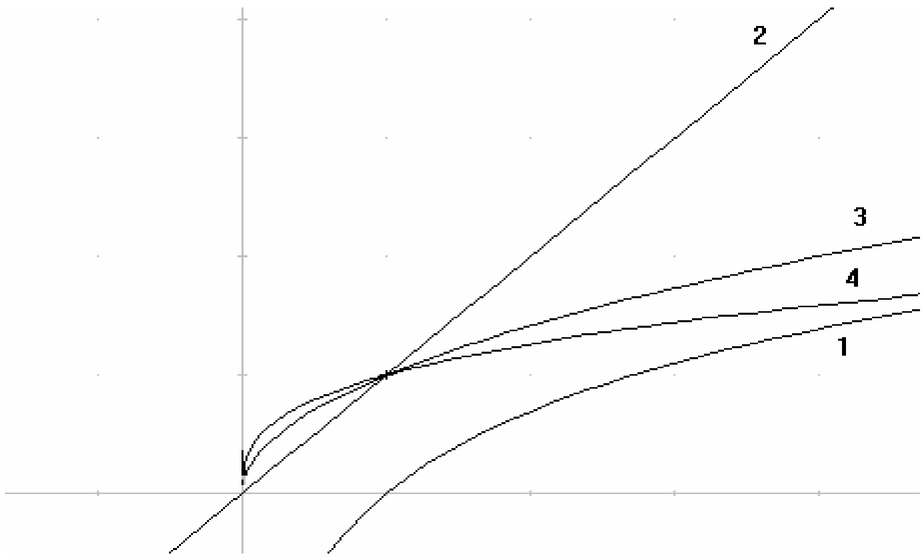
$y=\sqrt{x}$

x	1	10	100	1000	10^6	10^{10}
y	1	3,16	10	31,62	1000	100000

$y=\sqrt[7]{x}$

x	1	10	100	1000	10^6	10^{10}

y	1	1,58	1,93	2,68	7,19	26,82



Si vede chiaramente che y = ln x è un infinito più debole di y = x e y = √x, ma si intuisce anche, dalla tabella, che è più debole di $y = \sqrt[7]{x}$ in quanto, per valori molto molto grandi,la funzione $y=\sqrt[7]{x}$ assume valori superiori a ln x.

Si può dimostrare che ln x è un infinito più debole di qualunque potenza di x; in simboli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Questo sintetizza il fatto che pes ogni $n \in Q^+$ il denominatore, per x tendente a $+\infty$, "vince" il confronto con il numeratore.

La stessa cosa si può dimostrare per $\log_a x$ con a>1, per cui in generale si dice che il logaritmo (con base maggiore di 1), ha ordine di infinito minore di ciascuna potenza razionale positiva di x. Formalmente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln_a x}{x^n} = 0 \quad \text{con } a>1 \text{ e } \forall n \in Q^+.$$

Procediamo in modo analogo per la funzione esponenziale

$y = e^x$

x	1	10	50	100	150	200
y	2,7183	22026,47	$5{,}18*10^{21}$	$2{,}69*10^{43}$	$1{,}39*10^{65}$	$7{,}23*10^{86}$

y = x

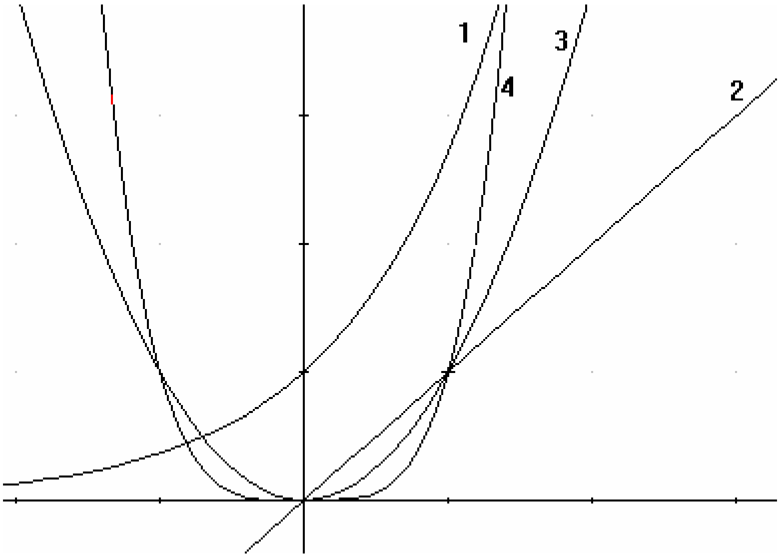
x	1	10	50	100	150	200
y	1	10	50	100	150	200

$y = x^2$

x	1	10	50	100	150	200
y	1	100	2500	10000	22500	40000

$y = x^{10}$

x	1	10	50	100	150	200
y	1	10^{10}	$9{,}77 * 10^{16}$	10^{20}	$5{,}77 * 10^{21}$	$1{,}02 * 10^{23}$



Si puo' notare che la funzione esponenziale e' un infinito di ordine superiore a qualunque potenza di x, in simboli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \forall n \in Q^+$$

Si dimostra che, in generale,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty \qquad \forall n \in Q^+ \text{ con } a > 1$$

Confronti analoghi a prima si possono fare quando si hanno funzioni tali che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$y = \sqrt[4]{x}$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,56234	0,31623	0,17783	0,1

$y = \sqrt{x}$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001

y	0,31623	0,1	0,03162	0,01

$y = x$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,1	0,01	0,001	0,0001

$y = x^2$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,01	0,0001	10^{-6}	10^{-8}

$y = x^3$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,001	0,000001	10^{-9}	10^{-12}

Stavolta nelle tabelle prendiamo in considerazione valori prossimi a 0. Si intuisce che al crescere di n, cresce la "velocita'" di avvicinamento a 0; n si dice ordine di infinitesimo.

Consideriamo ora la funzione sin x, che per $x \to 0$ e' un infinitesimo.

$y = \sin x$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,0998	0,09999	0,001	0,0001

$y = x$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,1	0,01	0,001	0,0001

Si puo' notare che sin x e x hanno nelle immediate vicinanze do 0 lo stesso comportamento, in simboli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

In modo analogo si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$$

Si dice che le funzioni sin x e tg x sono infinitesimi del 1° ordine, o in altre parole che, nelle vicinanze dell'origine, si possono approssimare con la funzione x

$\sin x \approx x$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x \approx x$ $\qquad$ in un intorno di (0)

Consideriamo ora la funzione $y = e^x - 1$ che per $x \to 0$ e' un infinitesimo.

$y = e^x - 1$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,1052	0,01005	0,001	0,0001

$y = x$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	0,1	0,01	0,001	0,0001

Si puo' notare che $y = e^x - 1$ e $y = x$ hanno lo stesso comportamento, nelle immediate vicinanze dello 0, per cui si pio' concludere che anche $y = e^x - 1$ e' un infinitesimo del 1° ordine.

In generale, si dice che una funzione y=f(x) e' **un infinito** per x→ a, quando $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

ed e' **un infinitesimo** per x→a quando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Anche in tal caso si puo' stabilirne l'ordine di infinito o infinitesimo confrontandole rispettivamente con $y = \dfrac{1}{(x-a)^n}$ e $y = (x-a)^n$