Achille Maffini

LOGICA E……

Riflessioni sulla Matematica e dintorni

Cap. 8 del testo: **matem@tica** - per la classe QUINTA
a cura di M. Venè, F. Betti
Sansoni per la scuola, 1998

LOGICA E....

RIFLESSIONI SULLA MATEMATICA E DINTORNI

PER CHE

Quando si parla di logica si pensa, quasi istintivamente, alla capacità “di ragionare”. Ti sarà capitato spesso di dire o di sentire frasi del tipo “Non ha senso logico” oppure “Queste conclusioni non sono logiche” o, in ambito scolastico, “Spiegami la logica che hai seguito”. Viene quindi da pensare che la logica sia alla base di un ragionamento; in altre parole senza “logica” sembra non sia possibile portare avanti una discussione o esprimere un concetto. Le prime attenzioni a questo ruolo della logica si hanno nell’antica Grecia dove lo svilupparsi di una filosofia che può essere ritenuta alla base del pensiero occidentale richiedeva un’analisi specifica della scienza del ragionamento, analisi che doveva essere prioritaria rispetto ai contenuti stessi. Il padre riconosciuto della logica è Aristotele (384 a.C.-322 a.C.), il quale la vede come strumento del pensiero a cui dedica complessivamente sei opere. In esse fissa i principi cardine della logica che, per certi aspetti, ritroveremo anche nel tipo di percorso da noi seguito; in particolare stabilisce che i fondamenti della logica sono dati da tre principi: il principio di identità (ogni essere è uguale a se stesso: A=A), il principio di non contraddizione (esclude che il medesimo essere A possa, contemporaneamente, risultare tanto B quanto non B) ed il principio del terzo escluso (A risulterà o B o non B, essendo esclusa qualsiasi altra possibilità). Aristotele è il primo, inoltre, ad introdurre la distinzione tra definizione (enuncia o chiarisce il *significato* da dare ad una parola) e proposizione (afferma determinate *proprietà* di oggetti designati con un certo nome). Infine, con Aristotele inizia, attraverso il sillogismo, l’idea di schemi di pensiero. Un esempio tipico di sillogismo è il seguente: *Tutti gli uomini sono mortali; Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale*.

La logica aristotelica era soprattutto una logica di tipo semantico (da *semantike* che significa ‘che è segno, ‘che fa conoscere’), in cui il concetto di verità era strettamente legato a quello di deduzione.

La logica di Aristotele fu portata avanti nel medioevo dalla filosofia scolastica, ma anche da questa fu vista più come strumento del pensiero che non nell’ottica di disciplina a sé stante. Occorrerà attendere l’ottocento, per intenderla come linguaggio atto a descrivere gli enti matematici, cercando, nel frattempo, di dare loro una giustificazione razionale.

L’importanza della logica, tra le altre, è stata quella di aver fatto in ambito matematico la distinzione tra linguaggio (ciò che si studia) e metalinguaggio (ciò che lo studia).

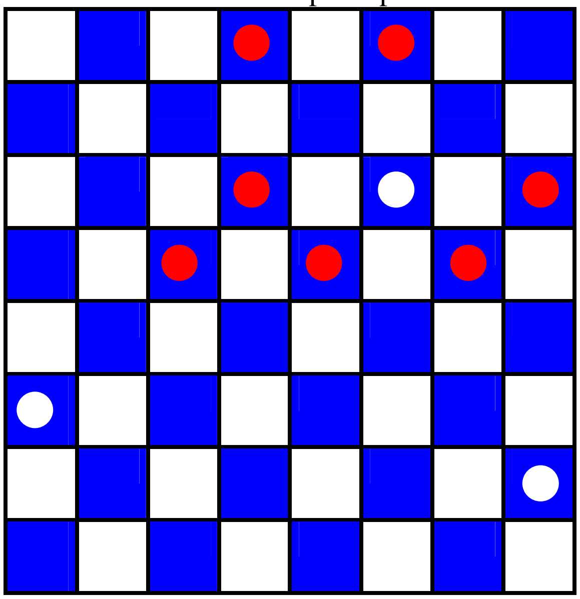
Come detto in precedenza, lo scopo della logica è stato quello di dare, sin dalle sue origini, delle tecniche di ragionamento e di poter stabilire, a partire da alcune premesse, quali conclusioni si possono trarre o, più in generale, se un certo ragionamento è corretto. Si badi che si sta parlando di correttezza di un ragionamento e non di “verità” di una frase. Questo cosa significa? La conseguenza più immediata di questa osservazione è che la logica si pone come un linguaggio che risulta essere “a monte” degli altri linguaggi, non solo scientifici, ma anche naturali.

In questo capitolo, che vuole essere più uno stimolo alla riflessione e alla discussione che non un capitolo “di studio” vero e proprio, cercheremo di trattare queste questioni per arrivare ad una riflessione generale sulla matematica. In questo cammino troverai, sparse nel testo, alcune domande che dovrebbero fungere da stimolo e proprio per questo la loro risposta non sarà sempre data immediatamente. Ti invitiamo a rifletterci per poi confrontare le tue risposte con quelle che ti verranno successivamente proposte.

Infine, un’avvertenza: ti accorgerai abbastanza presto che lo studio della logica matematica trattata in modo rigoroso è difficile, ma permette di avere uno strumento potente per capire la matematica ed il ruolo che questa disciplina ha avuto nel pensiero umano; puoi quindi capire perché tanti studiosi, anche non matematici, si sono occupati di essa.

1. UN GIOCO, PER COMINCIARE

Ti sarà spesso capitato di vedere su riviste di enigmistica problemi di scacchi o di dama in cui, da una configurazione iniziale, si richiede di trovare le mosse che portano alla vittoria uno dei due colori. Esamina ad esempio il problema che ti è proposto qui sotto e cerca di risolverlo:



Il rosso muove e vince (nel senso che è il primo a muovere e, dopo un certo numero di mosse, vince).

Non riconosci nella questione che ti è stata proposta la struttura di un teorema? Da una configurazione di partenza (<u>ipotesi</u>) devi giungere ad una configurazione finale (<u>tesi</u>) attraverso delle mosse condizionate dalle regole del gioco (<u>dimostrazione</u>).

La soluzione, come avrai notato, non è difficile, ma...c'è un piccolo particolare su cui ti invitiamo a riflettere e su cui, comunque, ritorneremo successivamente.

L'esempio di un gioco è il più semplice che si possa fare per comprendere il senso della matematica o, più propriamente, di una teoria matematica. Supponi, infatti, di voler insegnare il gioco della dama ad una persona che non lo conosce. Innanzi tutto dovresti descrivere gli elementi che si usano (scacchiera e pedine): ma supponi che non conosca neppure questi oggetti; dovresti allora descriverglieli con altri termini (ad esempio la scacchiera come un quadrato di 64 caselle quadrate alternativamente bianche e nere) nella speranza che i nuovi termini usati siano "noti". In caso contrario ne userai altri, ma alla fine troverete dei termini comuni, termini cioè che risultano noti senza bisogno di spiegarli. Tali termini vengono detti **primitivi** e, se ci pensi, in ogni contesto esistono termini siffatti poiché altrimenti si correrebbe il rischio di ritrovare, in una ipotetica catena di definizione, lo stesso termine che si vuole definire. Prova a cercare su un dizionario una parola qualunque, ad esempio casa, e ricerca successivamente i termini che ritrovi nella definizione.

Tra i termini primitivi che hai trovato nei tuoi studi matematici ricordiamo punto, retta, insieme. Te ne ricordi altri? Se però ci pensi, mentre i termini "primitivi" alla base di un contesto reale fanno riferimento a "parole" che designano cose note, cosa significa che ad esempio "punto" è un termine noto? Per rispondere a questa domanda, continuiamo con l'esempio del gioco.

Una volta introdotti gli elementi del gioco, dovrai descrivere le "regole del gioco". Tali regole non sono né vere né false: sono solo norme che permettono di giocare, stabilendo un legame tra i termini che hai già introdotto (scacchiera, pedine, ecc.). Chi non le rispetta non può giocare a dama; semplicemente. Questo non gli impedisce di fare un altro gioco (purché ne rispetti le regole!). In matematica tali regole sono dette **assiomi e regole d'inferenza**.

In pratica gli assiomi (le regole del gioco) sono le proposizioni che stabiliscono delle relazioni tra i termini primitivi. Ad esempio, nel gioco degli scacchi non è importante sapere che un pezzo si

chiami “cavallo” per avere informazioni su come giocare, ma è invece importante conoscere le relazioni che questo pezzo ha con gli altri, indipendentemente dal nome che gli si dà.
Supponiamo di aver spiegato al nostro interlocutore com’è fatta una scacchiera usando i termini (primitivi) quadrato, bianco e nero. Ritenendo poco opportuno dover ripetere tutte le volte la stessa frase concordiamo con lui di chiamare scacchiera “quella cosa lì”. Abbiamo dato una definizione.
Più in generale potremmo affermare che una **definizione** in matematica è
una frase in cui si introduce una parola (o una locuzione) nuova per indicare oggetti che godono di una determinata proprietà.

Se ci pensi un attimo, la frase sopra può risultare strana: abbiamo definito le definizioni. Come è possibile? Soprattutto com’è possibile usare un concetto per definire se stesso? Prima di rispondere a questa domanda, esaminiamo un classico paradosso linguistico, detto paradosso del mentitore. Supponi che una persona dica: “Io mento”. Sta mentendo o dicendo il vero? Se mente (cioè se la frase è falsa) non è vero che sta mentendo; se dice il vero è vero che sta mentendo. Nel corso dei secoli i logici e i matematici in genere trovarono altri paradossi analoghi. Ma da dove nasce il paradosso? Tutto è legato al fatto che la frase sta dicendo qualcosa su se stessa: non si distingue il *chi parla* dal *su che cosa parla*. In sostanza è come se si dovessero distinguere due livelli di linguaggio e in questo senso dovrebbe allora essere chiara la definizione di “definizione”: definiamo attraverso il metalinguaggio costituito dalla lingua italiana il termine “definizione” del linguaggio matematico. Ma perché i logici si sono occupati di queste cose e dei relativi paradossi? La risposta, in fondo, ci porta direttamente al motivo stesso per il quale la logica è nata, ma per rispondere occorre sapere “com’è fatta” la logica matematica.

2. SINTASSI DI UNA LOGICA DEL PRIM’ORDINE

Se si studia un linguaggio, ad esempio una lingua straniera, occorre conoscere alcune cose “di base”:
un alfabeto (cioè i simboli del linguaggio), una morfologia, una sintassi ed una semantica.
Nelle varie condizioni che daremo non dovremo mai perdere di vista il nostro scopo: avere uno strumento che ci permetta di fare un ragionamento ed uno che ci permetta di valutare un ragionamento.
Poichè anche la logica usa un linguaggio, che chiameremo $\mathcal{L}$, cominciamo con il dare l’alfabeto con cui opereremo:

D_1 : L’alfabeto $\mathcal{A}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ è costituito dai seguenti insiemi a due a due disgiunti:
a) un insieme C, eventualmente vuoto, di **costanti individuali**, che indicheremo con a_1, a_2, a_3,... In genere però si usano le prime lettere dell’alfabeto italiano (a, b, c, ..) anziché usare indici;
b) un insieme numerabile (cioè in corrispondenza biunivoca con l’insieme dei numeri naturali) V di **variabili individuali**[1] x_1, x_2, x_3,... (solitamente si usano le ultime lettere dell’alfabeto inglese x, y, z):
c) l’insieme {¬, ∧, ∨, →, ↔} dei **connettivi** che si chiamano, nell’ordine, «non», «e», «o», «implica» e «equivale»;
d) l’insieme {∀, ∃} dei **quantificatori** che si chiamano «quantificatore universale» e «quantificatore esistenziale»;
e) l’insieme {(,), **,**} dei **simboli ausiliari** («parentesi aperta», «parentesi chiusa» e «virgola»);
f) per ogni n>0, un insieme, eventualmente vuoto, $\mathcal{P}_n$, di **predicati n-ari**, (solitamente indicati con le lettere A, B, C, ...);

[1] Più propriamente si dovrebbe parlare, in questa fase, di indeterminate e di variabili quando le “frasi” del linguaggio vengono contestualizzate, cioè acquistano significato in un contesto ben preciso. Poiché nel seguito si faranno esempi per chiarire i vari aspetti proprio in contesti specifici si è preferito usare da subito il termine variabile.

g) per ogni n>0, un insieme, eventualmente vuoto, $\mathcal{F}_n$, di elementi detti **simboli funzionali n-ari**, solitamente indicati con le lettere f^n_1, f^n_2,..(in genere si usano le lettere f, g, h,..)

Parecchi dei simboli introdotti dal linguaggio sono a te già noti; non è superfluo però sottolineare come tali simboli costituiscano, di fatto, i termini primitivi della nostra «teoria».

Se la logica «serve» a formalizzare, tra le altre cose, i ragionamenti, non è difficile trovare nel linguaggio della logica delle analogie e dei simboli che «traducono» aspetti del linguaggio naturale. A tale proposito hai già visto nel biennio e all'inizio del triennio la relazione esistente tra i connettivi ed alcune locuzioni (congiunzioni, disgiunzioni, ecc.) del linguaggio naturale. Non ti dovrai mai dimenticare però che tra il linguaggio naturale e il linguaggio logico-matematico c'è una profonda differenza; in particolare non devi pensare che il linguaggio della logica serva per tradurre in modo formale il linguaggio naturale. Quando questo succederà sarà semplicemente per farti capire meglio alcuni concetti che introdurremo.

Vediamo in breve cosa si deve intendere per costanti individuali, variabili individuali e predicati n-ari.
Con le costanti individuali indicheremo enti del linguaggio definiti e fissati.
Per esempio nella frase

Carlo è fratello di Andrea o padre di Giovanni

i termini Carlo, Andrea, Giovanni, figurano come costanti individuali, mentre "è fratello di" e "è padre di" sono visti come predicati binari, nel senso che esprimono una relazione tra enti (o una proprietà) e che gli enti coinvolti da tale relazione sono due. In generale, una volta fissata la lettera maiuscola che esprime il predicato (ad esempio F per "è fratello di" e P per "è padre di") e le lettere minuscole che indicano le costanti (ad esempio le iniziali dei nomi) la frase precedente diventa

$$F(c,a) \vee P(c,g).$$

I simboli funzionali possono essere invece visti come le operazioni del nostro linguaggio, quelle cioè che a una o più costanti o variabili ne fanno corrispondere un'altra secondo una determinata legge.
In contesto matematico, risulta più semplice parlare di costanti (per esempio i numeri), di predicati (per esempio il predicato d'uguaglianza o, come esempio di predicato unario, la proprietà «essere numero naturale») o di simboli funzionali (per esempio le operazioni tra numeri).

Per quanto riguarda il concetto di <u>variabile individuale</u>, il termine dovrebbe esserti più familiare, nel senso che ne hai già parlato o sentito parlare in contesto algebrico: per esempio nell'equazione $3x+5=7-x$ la variabile x è **libera**, nel senso che può assumere qualunque valore all'interno dell'insieme numerico in cui tale variabile può...variare.

Attenzione! Non confondere il concetto di valori che può assumere la variabile con quello di valori che soddisfano l'equazione; come vedremo anche in seguito, i due concetti sono sostanzialmente diversi perché operano in contesti diversi.

Hai trovato un esempio di variabile libera nel linguaggio naturale quando hai studiato le lingue straniere in cui probabilmente ti sarà capitato di fare esercizi di questo tipo:
Ask and answer like this:

Where did you go yesterday?
I Went to................

the cinema *the beach* *the pencil* *the club* *a friend's house* *the moonwork*
college *town*

(osserva che, a buon senso, alcuni tra i termini proposti non darebbero significato alla frase).

Nel linguaggio comune non è così semplice trovare proposizioni contenenti variabili libere; questo perché il termine che compare come generico è implicitamente vincolato da un quantificatore. Consideriamo ad esempio le seguenti frasi:

Chi dorme non piglia pesci

Il cane è un animale fedele

Per tradurre in termini logici queste frasi occorre leggerle in questi termini:

Tutti coloro che dormono non pigliano pesci

Tutti i cani sono animali fedeli

Nella seconda frase nota come il termine «cane» indichi la categoria degli animali che hanno la proprietà di «caninità» e non un cane particolare; questo comporta che la frase, così com'è scritta, si riferisca a tutti gli animali che si possono ritenere «cani».
Introducendo i predicati D(x) (x dorme), P(x) (x piglia pesci), C(x)(x è un cane), A(x) (x è un animale), F(x) (x è fedele) si perviene alle seguenti formalizzazioni:

$$\forall x(D(x)\rightarrow\neg P(x))$$

$$\forall x(C(x)\rightarrow A(x)\wedge F(x))$$

che si leggono «*per ogni x, D di x implica non P di x*» la prima, mentre la seconda «*per ogni x, C di x implica A di x e F di x*». In questi casi, come vedi, abbiamo tradotto in «formule» frasi del linguaggio comune.
In generale diremo che una variabile è vincolata se cade sotto il raggio d'azione di un quantificatore.

Vale la pena fare una considerazione relativa ai simboli ausiliari: nell'insieme che li definisce compaiono due tipi di virgole: una (quella in grassetto) è un simbolo del linguaggio, l'altra (non in grassetto) è l'usuale virgola della lingua italiana che stiamo usando per definire quella linguistica.

Una volta fornito l'alfabeto si tratta di stabilire un criterio per costruire le parole del nostro linguaggio e, in subordine, un modo per riconoscere tra i possibili elenchi di simboli dell'alfabeto quelle che possono definirsi parole. Bada che in tutto questo non entra in questione il significato delle «parole». Per chiarire il tipo di problema, immagina uno straniero che, studiando l'italiano, si trovasse di fronte ai seguenti termini:
«rtsz, quelllo, caasa, estio». Indipendentemente dal loro significato, dovrà essere in grado di capire che le prime tre non potranno, in nessun caso, rappresentare «parole legittime» della lingua italiana. Per la quarta il problema è diverso e lo analizzeremo successivamente.
Occorre quindi definire che cosa è una parola nel nostro linguaggio:

D_2 : Una **stringa (o parola) del linguaggio** $\mathscr{L}$ è una qualunque sequenza finita di simboli dell'alfabeto $\mathscr{A}$.

Sono ad esempio stringhe del nostro linguaggio le seguenti sequenze:
$\forall x\neg yP(,)$ $\exists\exists\wedge(x))$ $a\vee($ mentre non lo sono
$3\leftrightarrow?)$ ♠$\rightarrow x$ $\forall xy\&x$
Si tratta poi di riconoscere, tra le varie parole, quelle legittime che chiameremo *formule ben formate*. Diamo quindi la morfologia del nostro linguaggio, cominciando a definire i termini, cioè i mattoni delle «parole legittime»:

D_3 : L'insieme dei **termini** del nostro linguaggio, che indicheremo con $\mathscr{T}$, è così costruito:
a) ogni costante individuale è un termine;

b) ogni variabile individuale è un termine
c) se $t_1,t_2,\ ,t_n$ sono termini ed f_n è un simbolo funzionale n-ario allora $f_n(t_1,t_2,\ ,t_n)$ è un termine.

Per esempio sono termini, per ciascuno dei casi precedenti:
a) 5, nel linguaggio matematico;
b) x, intesa come variabile, per esempio, in una equazione;
c) x+5, nell'usuale linguaggio dell'algebra (osserva che, secondo il nostro linguaggio, andrebbe scritta come +(x,5)).

Siamo ora in grado di dare la definizione di formula ben formata:

D_4 : Sia P un predicato n-ario e siano $t_1,t_2,t_3,...t_n$ termini; $P(t_1,t_2,\ ,t_n)$ è detta **formula atomica**.
Diremo che una stringa del linguaggio $\mathcal{L}$ è una **formula ben formata** (più brevemente fbf) se è definita dalle seguenti clausole:
a) ogni formula atomica è una fbf;
b) se A e B sono fbf allora $(\neg A)$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ sono fbf;
c) se A(x) è una fbf, essendo x una variabile libera in A, allora $\forall x(A(x))$ e $\exists x(A(x))$ sono fbf;
d) nient'altro è una fbf.

Anche in questo caso forniamo alcuni esempi di fbf, relativamente ai vari punti della definizione:
a) come esempio di formula atomica si può considerare x+5>6 (sempre secondo il nostro linguaggio andrebbe scritta come >(+(x,5),6));
b) nel linguaggio comune sono formule atomiche frasi del tipo *Carlo ama Antonia* e *Carlo è avvocato*; allora *Carlo ama Antonia e Carlo è avvocato* è una fbf;
c) $x\in\Re\rightarrow x+5>6$ è una fbf (per il punto b, essendo $x\in\Re$ e $x+5>6$ formule atomiche); quindi $\forall x(x\in\Re\rightarrow x+5>6)$ è una fbf;
d) $\forall x(x\in\Re\rightarrow\exists x(x+5>6))$ non è una fbf poichè la variabile x non è libera in $x\in\Re\rightarrow\exists x(x+5>6)$ essendo già vincolata dal quantificatore esistenziale.

La definizione precedente è ricorsiva e come tale utilizza una metodologia aritmetica.
In sostanza in definizioni di questo tipo si parte dall'individuare gli elementi costitutivi più semplici e da questi si passa poi a costruire elementi via via più complessi "combinandoli" con altri simboli del linguaggio. Forse tale definizione ti sarà risultata strana; cosa non va? Una definizione è, in genere, un'abbreviazione: si introduce un termine nuovo per abbreviare una frase contenente termini vecchi e quindi noti. Per esempio se definiamo il termine "rettangolo" diciamo che "è un parallelogramma con quattro angoli retti". In questa definizione si suppongono noti concetti come 'parallelogramma' e 'angolo retto'.
Definizioni di questo tipo sono dette **esplicite** in quanto è chiaro ciò che si definisce e attraverso cosa lo si fa. Nella definizione di fbf che abbiamo dato in precedenza le cose non vanno così: cosa si abbrevia con fbf? Nulla. Si parla subito di formule e si invita il lettore a riconoscerle "indicandogli" come ricondurre formule più lunghe a formule più corte, sino ad arrivare ai "mattoni" delle fbf, cioè le formule atomiche. Cosa siano le formule lo si deduce dal complesso del procedimento definitorio, ma non sono usate altre parole. Definizioni di questo tipo sono dette **implicite** e le difficoltà che puoi incontrare nel capirle sono ampiamente giustificate.
Un esempio di procedimento di questo tipo l'hai visto nel capitolo precedente a proposito delle grammatiche generative, in cui ti veniva fornito un metodo per generare frasi di un linguaggio attraverso un procedimento che ricorda molto quello introdotto per generare le fbf.

Come avrai notato, alcuni concetti che abbiamo trattato li hai già incontrati; ciò che abbiamo fatto e che faremo anche in seguito sarà rivederli alla luce di una formalizzazione più generale. Questo vale anche per il concetto di enunciato:

D_5 .
a) Una fbf A tale in cui non compaiono variabili libere si dice un **enunciato.**
b) Data una fbf A, chiameremo **chiusura universale** di A la fbf in cui tutte le variabili libere di A sono quantificate dal quantificatore universale.

Relativamente alla definizione precedente puoi osservare come le fbf
$A(a)\rightarrow B(a)$ e $\exists x(A(x)\rightarrow C(x,a))$ siano enunciati se a è una costante individuale, mentre non lo è $\exists x(A(x)\rightarrow C(x,y))$ poiché y è una variabile libera, e la sua chiusura universale è $\forall y\exists x(A(x)\rightarrow C(x,y))$. Tra gli esempi visti in precedenza, x+5>6 non è un enunciato e la sua chiusura universale è data da $\forall x(x+5>6)$.

OSSERVAZIONE. Quando si costruisce una formula ben formata è ovviamente importante l'ordine con cui sono associate le formule atomiche. Vediamo alcuni esempi.
Le due frasi

Se mangio e dormo, starò meglio
Mangio e se dormo starò meglio

ovviamente non indicano la stessa cosa. Se volessimo formalizzarle, indicando con M (mangiare), D (dormire) e S (stare meglio) i predicati unari coinvolti e con i (io) la costante individuale, le fbf corrispondenti sarebbero

$$(M(i)\wedge D(i))\rightarrow S(i)$$
$$M(i)\wedge(D(i)\rightarrow S(i))$$

Nelle due fbf ciò che cambia è il connettivo principale, cioè l'ultimo connettivo che è stato introdotto (l'implicazione nella prima fbf, la congiunzione nella seconda).
Senza le parentesi avremmo delle ambiguità nella lettura delle fbf composte. Per non appesantire troppo la scrittura, si sono stabilite alcune convenzioni sulle priorità dei connettivi; in particolare si ha la seguente scala, in ordine di priorità:

$$\neg$$
$$\wedge \quad \vee$$
$$\rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Connettivi posti sulla stessa riga hanno lo stesso ordine di priorità e quindi, in quei casi, risulta indispensabile mettere le parentesi. Ad esempio la fbf $A\wedge B\vee C$ è ambigua, mentre non la è $M(i)\wedge D(i)\rightarrow S(i)$ che tradurrebbe, ad esempio, la prima tra le frasi precedentemente proposte.

IN PRATICA
Un modo per costruire le fbf è il cosiddetto "metodo ad albero", la cui definizione è data per ricorsione e ricalca la l'analoga data per la costruzione delle fbf : la radice dell'albero è la fbf d'arrivo, mentre le foglie dell'albero sono le formule atomiche presenti nella fbf; i rami sono dovuti all'introduzione di un connettivo o di un quantificatore e la fbf così ottenuta si ritrova nei nodi da cui partono i rami. Questo metodo di procedere permette di visualizzare la costruzione ricorsiva delle fbf di cui si parlava in precedenza; non è superfluo osservare inoltre che tale costruzione è *morfo-sintatticamente corretta* se e solo se in ogni nodo (comprendendo anche la radice e le foglie) compaiono fbf.

Però attenzione! Questo non significa che la fbf formalizzi correttamente la proposizione indicata: questo dipende da come tu ne hai interpretato la costruzione.

Vediamo alcuni esempi.
Formalizziamo col metodo ad albero le seguenti proposizioni:
1) Se Andrea ha studiato o è fortunato, supererà l'esame.
2) L'addizione in N gode della proprietà commutativa.
Formalizziamo 1).
Siano a=Andrea, S(x)=«x ha studiato», F(x)=«x è fortunato», E(x)=«x supera l'esame».
Le formule atomiche sono allora S(a), F(a), E(a).
Il connettivo principale è l'implicazione, quindi prima occorre costruire l'antecedente e il conseguente:

$S(a) \qquad F(a) \qquad E(a)$

$S(a) \vee F(a)$

$S(a) \vee F(a) \rightarrow E(a)$

Formalizziamo 2).
Trattandosi di una proposizione matematica, sostituiamo le lettere che indicano i predicati con i relativi simboli che vengono visti, in questo contesto, come un'abbreviazione. Analogamente il simbolo funzionale è sostituito dall'operazione di somma.
Le formule atomiche diventano quindi $x \in N$, $y \in N$, $x+y=y+x$:

$x \in N \qquad y \in N \qquad x+y=y+x$

$x \in N \wedge y \in N$

$x \in N \wedge y \in N \rightarrow x+y=y+x$

$\forall y(x \in N \wedge y \in N \rightarrow x+y=y+x)$

$\forall x \forall y(x \in N \wedge y \in N \rightarrow x+y=y+x)$

Ti raccomandiamo, quando costruisci una fbf, di prestare attenzione alle parentesi. In particolare il numero delle parentesi aperte deve essere uguale al numero delle parentesi chiuse. Un modo comodo per verificarlo è quello di fare una somma algebrica delle parentesi: poni +1 per ogni parentesi aperta e -1 per ogni parentesi chiusa; alla fine la somma complessiva deve risultare 0. Ma attenzione: il fatto che tale somma sia 0 è condizione necessaria (ma non sufficiente) per la correttezza della formalizzazione.

Prova ora tu a formalizzare le seguenti proposizioni:
3) Se Andrea ha studiato, supererà l'esame e andrà in vacanza.
4) Se tutti i politici fossero onesti, l'Italia migliorerebbe

Le regole di un gioco nel linguaggio matematico sono gli assiomi e le regole di inferenza e insieme costituiscono la **sintassi** di un linguaggio. Quando si introducono gli assiomi di una teoria non è sempre facile capirne il «senso» poiché, per definizione di assioma, spesso sono dati «a priori»,

senza necessità di una giustificazione. Nel proporti un possibile sistema assiomatico per la nostra logica, ti forniremo però un commento o qualche esempio per gli assiomi o per gruppi di assiomi che ti possa permettere di capirne lo spirito.
Gli assiomi e le regole d'inferenza si possono suddividere grosso modo in due categorie:
a) alcuni stabiliscono come si «legano» i termini primitivi tra loro;
b) altri caratterizzano tali termini e quindi la logica, così come noi la impostiamo.
Vediamo esplicitamente tali assiomi, specificando anche la categoria d'appartenenza.

D 6. L'insieme degli **assiomi logici** è costituito da tutte e sole le fbf dei seguenti tipi:
siano A, B, e C fbf
1) $A \rightarrow A \vee B$ 2) $B \rightarrow A \vee B$ 3) $A \wedge B \rightarrow A$ 4) $A \wedge B \rightarrow B$
Questo primo gruppo di assiomi in cui sono stabilite delle relazioni tra l'implicazione e i connettivi $\wedge$ ed $\vee$ rientra nella categoria a). In particolare affermano che da una fbf si può 'dedurre' la formula stessa disgiunta ad un'altra e che dalla congiunzione di due fbf se ne può 'dedurre' una delle due; considera per esempio la seguente frase il cui «senso» sembra evidente:
Se un triangolo ABC è rettangolo, allora o ABC è rettangolo o è isoscele.
Al di là dell'evidenza, non sembra una frase molto significativa. Più significativa è la seguente situazione che giustifica gli assiomi 3 e 4. Considera il noto teorema di geometria:
In un triangolo ABC isoscele su AB, la mediana relativa ad AB è anche altezza.
Indicato con M il punto medio di AB, una possibile dimostrazione del teorema si basa sul confronto dei triangoli CAM e CBM. Non è improbabile trovare allora nella dimostrazione una frase del tipo
"Se il triangolo è isoscele e CM è la mediana relativa ad AB, allora, in particolare, CA=CB" che è come dire in sostanza che
"Se il triangolo è isoscele e CM è la mediana relativa ad AB, allora, in particolare, il triangolo è isoscele", cioè quanto espresso dall'assioma 3.
5) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 6) $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)) \wedge ((A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A))$
Anche questi due assiomi rientrano nella categoria a) e stabiliscono una relazione tra l'implicazione e l'equivalenza. In sostanza affermano che l'equivalenza «equivale» ad una doppia implicazione, come in effetti consideri quando dimostri un teorema che presenta una condizione necessaria ed una sufficiente, tipo
"Due rette sono parallele se e solo se tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali".
L'evidenza di questi primi sei assiomi ti risulterebbe più chiara se tu li guardassi dal punto di vista delle loro tavole di verità, come hai fatto al biennio, ma attenzione! Qui ci stiamo muovendo in un contesto sintattico, stiamo cioè dando delle regole: dimentica quindi di aver imparato le tavole di verità, sino a quando, almeno, non ti sarà detto esplicitamente!
Continuiamo col nostro sistema assiomatico:
7) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 8) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$
9) $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$ 10) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$
Questi assiomi, che potremmo far rientrare sia nella categoria a) che nella categoria b) risultano piuttosto semplici da comprendere se li si guarda in ottica «deduttiva»; ad esempio la frase, legata ad un vecchio detto popolare,
«*Se oggi è il 29 febbraio, l'anno è bisestile e se l'anno è bisestile allora sarà un anno sfortunato; allora se oggi è il 29 febbraio, sarà un anno sfortunato*»
che sembra abbia «senso», risulta giustificata dall'assioma 7. L'assioma 7 esprime una forma di proprietà transitiva dell'implicazione. L'assioma 8 può essere chiarito dal seguente teorema:

"Se un quadrilatero ha due lati opposti paralleli e uguali è un parallelogramma, se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali è un parallelogramma; allora se un quadrilatero ha due lati opposti paralleli e uguali o ha gli angoli opposti uguali è un parallelogramma".
Per l'assioma 9 considera il seguente esempio:
"Se un quadrilatero è un rombo allora ha tutti i lati uguali, se un quadrilatero è un rombo allora ha le diagonali perpendicolari; allora se un quadrilatero è un rombo ha tutti i lati uguali e le diagonali perpendicolari".
Infine l'assioma 10 pone l'accento sul fatto che gli antecedenti possono essere "compattati" con una congiunzione.

11) $A\wedge\neg A\rightarrow B$ 12) $(A\rightarrow B\wedge\neg B)\rightarrow\neg A$ 13) $A\vee\neg A$

Questi ultimi sono gli assiomi più delicati e rientrano esplicitamente nella categoria b): l'assioma 11 può essere letto in questo modo: *da una contraddizione si può dedurre qualunque cosa* ed è noto come ***falso intuizionista***; l'assioma 12 può essere letto in questo modo: se da una proposizione A deduco una contraddizione, allora deduco la negazione di A (ti dovrebbe ricordare le dimostrazioni per assurdo..). L'assioma 13 è senza dubbio il più caratterizzante, poiché è grazie ad esso che la logica che stiamo facendo è detta «classica». Tale assioma ripropone uno dei fondamenti della logica aristotelica: il principio del ***terzo escluso***.

Avrai forse notato come negli assiomi non compaiano esplicitamente dei quantificatori; sembra cioè che gli assiomi si riferiscano solo ai connettivi. In effetti le nostre regole sintattiche non sono complete, poiché mancano le regole d'inferenza. Una di queste, a te già nota, è il **modus ponens**:

D_7. Il **modus ponens** (in breve **MP**) è la relazione che ha per elementi le terne del tipo $(A,A\rightarrow B,B)$, in cui A e $A\rightarrow B$ si dicono **premesse** e B **conclusione**.

Esempi di applicazione del modus ponens li hai incontrati e utilizzati in diverse dimostrazioni di geometria. Ti saranno capitati teoremi in cui dovevi dimostrare l'uguaglianza di due angoli; per fare questo avrai magari dimostrato che un certo triangolo contenete i due angoli ha due lati uguali. D'altra parte un teorema a te noto afferma che
(1) Se un triangolo è isoscele ha gli angoli alla base uguali.
Se chiamiamo ABC il triangolo in questione, una volta dimostrato che AB=AC (cioè che il triangolo è isoscele) hai concluso (applicando appunto il modus ponens al teorema (1) ed al risultato ottenuto con la dimostrazione) che gli angoli in B e in C sono uguali.

Le altre, come detto, riguardano i quantificatori. In genere le regole d'inferenza si presentano come coppie o terne di fbf di cui le prime (o la prima) fbf costituiscono le premesse e l'ultima la conclusione. Introduciamo tali regole d'inferenza con degli esempi che ti permetteranno meglio di capirne il senso:

1) Considera per esempio la proposizione:
Nell'insieme dei numeri naturali, 3 è un numero dispari
Da questa discende che
Nell'insieme dei numeri naturali esiste un numero dispari
Quella vista è nota come **introduzione del quantificatore esistenziale** (in breve **i∃**) che è la relazione avente per elementi le coppie ordinate del tipo $(A(a),\exists xA(x))$; A(a) si dice <u>premessa</u> e $\exists xA(x)$ si dice <u>conclusione</u>.

2) Altro esempio; dalla proposizione
Se $a\in Z$ allora a ha opposto.
discende che
Ogni $x\in Z$ ha opposto

In questo caso si è operata l'**introduzione del quantificatore universale** (in breve **i∀**) che è la relazione avente per elementi le coppie ordinate (A(a), ∀xA(x)); A(a) si dice <u>premessa</u> e ∀xA(x) si dice <u>conclusione</u>.
Da osservare in questo esempio l'uso ambiguo di a: a è infatti un parametro fissato ma non noto. Ciò che conta nell'introduzione del quantificatore è che su a non siano state formulate ipotesi particolari

3) Dalla proposizione
Esiste il punto medio di u segmento
discende la possibilità, ad esempio nelle dimostrazioni dei teoremi, di fissare con una lettera specifica (solitamente M) il punto medio di un segmento dato:
Sia M il punto medio di [AB].
In questo caso si è eliminato il quantificatore esistenziale attraverso la regola di **eliminazione del quantificatore esistenziale** (in breve **e∃**) che è la relazione avente per elementi le coppie ordinate (∃xA(x),A(a)); ∃xA(x) si dice <u>premessa</u> e A(a) si dice <u>conclusione</u>;

4) Infine dalla proposizione
Tutti i numeri razionali hanno opposto
si deduce
Se $a \in Q$ ha opposto
In questo caso si è eliminato il quantificatore universale attraverso la regola di **eliminazione del quantificatore universale** (in breve **e∀**) che è la relazione avente per elementi le coppie ordinate (∀xA(x), A(a)); ∀xA(x) si dice <u>premessa</u> e A(a) si dice <u>conclusione</u>.
Anche in questo caso, come puoi notare, siamo in presenza di un uso ambiguo di a, ma ciò che è importante è che su di esso non siano fatte specifiche ipotesi. Così ad esempio quando si dimostra che in un rombo le diagonali sono perpendicolari si parte da un quantificatore universale (tutti i rombi..) per poi dimostrare il teorema su uno specifico rombo sul quale però non sono state fatte ipotesi particolari, garantendo in questo modo la generalità del risultato.

Relativamente agli assiomi si può osservare come di fatto siano degli schemi d'assiomi in quanto essendo A,B, C fbf, al loro posto potrebbero comparire espressioni contenenti connettivi o quantificatori.
Relativamente alle regole d'inferenza, invece, sarebbero opportune alcune considerazioni rispetto alle lettere che si utilizzano quando si introducono o si eliminano quantificatori; in particolare quando si introducono dei quantificatori la nuova variabile vincolata non deve essere già vincolata nella premessa; viceversa quando si eliminano dei quantificatori, la variabile vincolata che si toglie non deve più comparire come vincolata nella conclusione.
Questi chiaramente sono concetti piuttosto importanti, ma non di facile comprensione e si riferiscono ad uno studio più approfondito della logica. Riteniamo comunque opportuno accennarli per farti presente la complessità di certe condizioni.

Quando si introduce un sistema di assiomi e di regole d'inferenza, la prima cosa che ci si chiede spontaneamente è: perché proprio quello e non altri? "Bastano" gli assiomi introdotti o ne servono altri ancora? Quando sono sicuro di averne presi a sufficienza e non di più? Chi mi garantisce che, tra quelli presi, non ce ne siano di "equivalenti" (cioè espressioni diverse che dicono però la stessa cosa)?
Una breve riflessione su queste domande è opportuna. Quando ci si chiede se un certo numero di assiomi «basta» si pensa che la funzione di quegli assiomi sia quella di descrivere una teoria di cui si hanno già i caratteri generali e di cui si vogliono trovare le basi logiche. Un esempio in questo senso lo vedremo quando esamineremo teorie come la geometria euclidea o l'aritmetica. Se però si pensa a una teoria matematica come a una costruzione, dovrebbe risultare ovvio come tale

costruzione dipenda dall'impianto assiomatico scelto. Se per esempio dal gioco degli scacchi si togliesse l'arrocco e la possibilità di muovere il pedone di due caselle se non è mai stato precedentemente mosso, si avrebbe un altro tipo di gioco.

Anche in matematica si sono studiate teorie con assiomatiche più deboli di altre (ad esempio la già citata logica intuizionista ha un'assiomatica, come detto, più debole di quella classica, nel senso che il numero dei suoi assiomi e delle sue regole d'inferenza è un sottoinsieme proprio di quelli della logica classica) e che comunque riuscivano a risolvere determinati problemi. Vista in questo modo, la questione se un certo numero di assiomi "basta" è di fatto mal posta: più importante è vedere quali risultati (significativi) si possono ottenere con una certa assiomatizzazione e quali invece necessitano di un'assiomatizzazione (e quindi di **risorse**) più potenti.
Diverso il discorso degli assiomi "equivalenti" o del "di più". Di per sé non è un problema avere sistemi ridondanti, sistemi cioè in cui più assiomi o regole d'inferenza "dicono la stessa cosa". C'è indubbiamente un problema d'eleganza, ma anche e soprattutto di riconoscibilità. Se infatti due teoremi sono stati ottenuti con assiomi equivalenti, potrebbe non essere agevole osservare che i due teoremi esprimono la stessa proprietà.
In generale data una teoria assiomatica T, un sistema d'assiomi Γ di T si dice **indipendente** se ogni fbf di Γ non può essere dimostrata dagli assiomi rimanenti per mezzo delle regole d'inferenza. In caso contrario Γ si dice **dipendente**. Si dimostra che gli assiomi del nostro linguaggio sono indipendenti.

Abbiamo parlato di logica classica, falso intuizionista (e quindi logica intuizionista). Cosa significano queste classificazioni? Per farti capire la distinzione, partiamo da un problema apparentemente semplice.
Data un'equazione del tipo ax=b tu sai, dalla teoria delle equazioni di primo grado, che se $b\neq 0$, l'equazione è determinata (in R) se $a\neq 0$, impossibile se a=0.
Sotto questa classificazione, c'è l'implicita convinzione che sia sempre possibile stabilire se un numero è o non è uguale a zero. D'altra parte, come potrebbe essere diversamente? Considera allora la seguente questione:

«*Trova nell'insieme dei numeri reali la soluzione dell'equazione ax=b essendo*

b la tua età (in anni)

$$\begin{cases} a=n \ \ (0<n<10) \text{ se nell'espressione decimale di } \pi \text{ esistono dieci cifre } n \text{ consecutive;} \\ a=0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$
»

L'equazione proposta è determinata o impossibile? La risposta non si può dare, essendo impossibile determinare se nell'espressione decimale di π (che ti ricordiamo essere un numero decimale infinito non periodico) esistono dieci cifre consecutive uguali. Se volessimo dare una risposta a questo problema dovremmo poter conoscere esattamente la successione di tutti i decimali di π, cosa non possibile poiché, anche con un calcolatore noi potremmo dare solo rappresentazioni finite, seppure con un intervallo d'errore noto. Gli intuizionisti criticano alla logica classica proprio questo: l'incapacità, in alcuni problemi, di fornire un algoritmo per trovare un risultato di cui tale logica afferma l'esistenza. In sostanza una «cosa» esiste se faccio vedere come è fatta, non dimostrando (magari per assurdo) che esiste. Consideriamo un altro esempio per chiarire questo concetto su un problema meno strano.
Nel corso dei tuoi studi di analisi ti sei imbattuto nel teorema degli zeri per funzioni continue. Rivediamo l'enunciato di tale teorema:
«*Data una funzione reale a variabile reale y=f(x) continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b], se f(a)f(b)<0 esiste un valore $c\in]a,b[$ tale che f(c)=0. In simboli*

$$f(a)f(b)<0\rightarrow\exists c(c\in]a,b[\wedge f(c)=0)$$
»

La dimostrazione di questo teorema (come quelle dei teoremi di Rolle, Lagrange, Chaucy e di altri teoremi sulle funzioni continue che hai visto in questi anni) non è costruttiva: l'asserzione che esiste un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla, nulla dice su come trovare tale punto. Esempi di teoremi costruttivi li puoi trovare nel calcolo delle derivate in cui ti è detto non solo che esiste la derivata di una funzione (per esempio della funzione prodotto se i fattori sono derivabili), ma anche come trovare tale derivata. Molto grossolanamente potremmo affermare che i teoremi costruttivi terminano generalmente con una regola o una formula.
Il problema che comportano i teoremi non costruttivi come il teorema degli zeri risulta evidente se si considera ad esempio la funzione $y= \ln^2 x+x^2-3x+1$ che nell'intervallo [1,3] verifica le ipotesi del teorema degli zeri, ma di cui non si riesce a trovare il valore che ne verifica la tesi se non ricorrendo agli strumenti dell'analisi numerica i quali forniscono, tra l'altro, solo soluzioni approssimate e quindi razionali. Una prima conseguenza di queste osservazioni è che per gli intuizionisti i numeri reali, così come noi li conosciamo, non esistono. Una seconda conseguenza è che l'implicazione materiale $A \rightarrow B$ intuizionista risulta essere più rigida di quella classica e può essere espressa in questi termini: se si verifica A allora si verifica B (nel senso che fornisco un modo per trovare B); se A non si verifica, nulla si può dire.
Per concludere questa parte, ti proponiamo un problema classico, quello del monaco tibetano.

Un monaco tibetano abita alle pendici di un monte sulla cui sommità è posto un monastero in cui tutti i mesi il monaco va a pregare. Un'unica strada, lunga 34,6 km porta dalla casa del monaco al monastero. Il giorno adibito alla preghiera, il monaco parte sempre alle otto di mattina, percorre la strada facendo anche alcune soste per riposare o pregare; a volte corre preso dalla frenesia, ma arriva sempre puntuale alle otto di sera, ora d'apertura del monastero. Prega tutta notte e riparte per il ritorno alle otto del mattino seguente. La stanchezza e le tappe obbligate lungo il tragitto lo fanno arrivare a casa esattamente alle otto di sera, nonostante la strada in discesa.
Dimostra che esiste un punto lungo il tragitto in cui il monaco passa alla stessa ora sia all'andata sia al ritorno.

Il problema precedente è un tipico esempio di problema non costruttivo: in effetti, ti viene chiesto di dimostrare che **esiste** un punto tale che ecc. non di **trovare** il punto in cui il monaco ripassa alla stessa ora. Prima di affrontare la risoluzione, ti invitiamo a distinguere i dati utili da quelli non utili. Successivamente cerca la soluzione; ti accorgerai che c'è un modo piuttosto semplice e intuitivo, ma se vuoi dare una risposta formalmente corretta dovrai costruirti una particolare funzione e utilizzare il teorema degli zeri.

La logica, come detto, si pone come linguaggio formale adatto alla conduzione di un ragionamento, indipendentemente dal contesto. Se per esempio si vuole trattare un particolare argomento matematico (ma non solo) come la geometria euclidea o l'aritmetica, dovremmo introdurre un alfabeto e un sistema d'assiomi propri della teoria. Se ci si limita all'alfabeto, agli assiomi e alle regole d'inferenza della logica sopra introdotti, si parla di **calcolo dei predicati**.

2.1 DIMOSTRAZIONI, TEOREMI E DEDUZIONI.

Un altro punto "doloroso" è rappresentato dal concetto di teorema che, per quanto visto anche in precedenza, è strettamente connesso all'ambito sintattico in cui ci si sta muovendo. In questo senso uno dei maggiori risultati della logica è stato quello di aver chiarito cosa sia e come si debba organizzare in modo rigoroso una dimostrazione matematica. A tale proposito diamo la seguente

D 8. Una **teoria** del primo ordine T è data assegnando un linguaggio $\mathcal{L}$(T) del prim'ordine ed un insieme di fbf detto **insieme degli assiomi propri**.

Immagina di prendere un campione di studenti e di chiedere qual è l'aspetto della matematica (bada bene, non l'argomento) che hanno trovato più ostico: la maggior parte citerà i teoremi e le relative dimostrazioni. Ma cos'è esattamente una dimostrazione e perché sono considerate difficili?
Quando parli di teoremi probabilmente pensi alla geometria, il contesto cioè in cui ne hai fatte di più e con più difficoltà. La difficoltà maggiore consiste probabilmente nel fatto che, al contrario dell'algebra, non hai regole o principi a cui far riferimento, ma hai delle *proprietà* che devi *ricordare*, *saper applicare* e soprattutto *saper vedere* rispetto al contesto in cui ti stai muovendo. La dimostrazione è quindi una sorta di percorso *logico* che ti dovrebbe portare dalle ipotesi alla tesi, ma spesso questo percorso è tutt'altro che lineare e agevole, dovendo a volte ricorrere a cose come la fantasia che sembrano avere poco a che fare con un processo tipicamente razionale. Il linguaggio usato è poi la lingua italiana, nel senso che spieghi quello che stai facendo e le conclusioni a cui giungi utilizzando termini che non fanno parte della matematica. In sostanza si dimostrano proprietà interne alla teoria utilizzando concetti ad essa esterni, col rischio, che probabilmente hai più volte corso, di uno scarso rigore. Nasce allora l'esigenza di evitare quanto più possibile proposizioni esterne alla teoria; il caso ideale sarebbe quello di fare in modo che un teorema sia dimostrato solo utilizzando simboli e termini del contesto in cui ci si sta muovendo. E' quello che avviene con le dimostrazioni dei teoremi della logica formale.
Una dimostrazione, in senso logico, è qualcosa di più rigido e formalmente rigoroso rispetto alle dimostrazioni che hai fatto sino ad ora. In particolare in una dimostrazione logica noi troveremo solo fbf e ciascuna fbf è giustificata o da un assioma o da una regola d'inferenza. Per farti un esempio di questo modo di procedere, pensa a come risolvevi all'inizio le equazioni di primo grado: passavi da un'equazione a quella equivalente (e quindi scrivevi solo equazioni!) applicando uno dei principi di equivalenza; inoltre ti era chiesto di indicare, accanto a ciascuna nuova equazione, il principio applicato con il polinomio che si era sommato o per il quale si era moltiplicato o diviso. Anche in questo caso una dimostrazione sarà un insieme di **passi**, ciascuno formato da una fbf e da una giustificazione che sarà un assioma o una regola d'inferenza. In generale possiamo affermare che

D 9. a) Si chiama **dimostrazione** una successione finita di passi $P_1, P_2, P_3,...P_n$, dove la fbf di ogni passo o è un assioma o è ottenuta applicando ad una o due fbf dei precedenti passi una regola d'inferenza.
b) Una fbf A si dice **teorema logico**, in simboli $\vdash A$, se esiste una dimostrazione $P_1, P_2, P_3,...P_n$, con la fbf del passo P_n coincidente con A. Se $P_1, P_2, P_3,...P_n$, è una dimostrazione in una teoria T, allora A si dice **teorema di T** e si indica con $\underset{T}{\vdash} A$.

Si possono dimostrare piuttosto facilmente alcuni teoremi logici che definiscono le proprietà dei connettivi. In particolare si ottiene che $\wedge$ ed $\vee$ godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva dell'uno rispetto all'altro. Tutto ciò è sintetizzato nel seguente

T 1. Siano A, B, C fbf; allora
a) $\vdash A\rightarrow A$ b) $\vdash A\wedge B\rightarrow B\wedge A$ c) $\vdash A\vee B\rightarrow B\vee A$
d) $\vdash A\wedge(B\wedge C)\leftrightarrow(A\wedge B)\wedge C$ e) $\vdash A\vee(B\vee C)\leftrightarrow(A\vee B)\vee C$
f) $\vdash A\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ g) $\vdash A\vee(B\wedge C)\leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

A titolo d'esempio dimostriamo il punto b), indicando accanto alla fbf la relativa giustificazione (per gli assiomi useremo l'abbreviazione ax):

1. $A\wedge B\rightarrow A$	ax 3
2. $A\wedge B\rightarrow B$	ax 4
3. $(A\wedge B\rightarrow B)\rightarrow((A\wedge B\rightarrow A)\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B\wedge A))$	ax 9
4. $(A\wedge B\rightarrow A)\rightarrow(A\wedge B\rightarrow B\wedge A)$	MP applicato ai passi 3,2

5. $A\wedge B\rightarrow B\wedge A$ MP applicato ai passi 4,1

Altri importanti risultati, a livello di teoremi logici, riguardano la negazione:

T 2. Siano A e B fbf; allora
a) $\vdash A\leftrightarrow\neg\neg A$ b) $\vdash (A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$ c) $\vdash (A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$
d) $\vdash\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$ e) $\vdash\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$ (leggi di De Morgan)
Prova a dimostrarli...

OSSERVAZIONE. Alcune osservazioni sui teoremi logici del teorema precedente:
il teorema a) afferma che la doppia negazione di una proposizione equivale alla proposizione stessa, cioè che la trasformazione definita dalla negazione è involutoria; il teorema c) afferma che una frase ipotetica è equivalente a quella ottenuta scambiando l'antecedente col conseguente e negandoli: per esempio l'affermazione «se è il 29 febbraio, l'anno è bisestile» equivale a «se l'anno non è bisestile, non è il 29 febbraio» e non, come comunemente si sarebbe indotti a pensare «se non è il 29 febbraio, l'anno non è bisestile».
La fbf $\neg B\rightarrow\neg A$ è detta **contronominale** di $A\rightarrow B$, da non confondersi con la sua **inversa** data da $B\rightarrow A$.
Il teorema b) è particolarmente importante in quanto permette di "eliminare" l'implicazione sostituendola con una negazione e una disgiunzione. Non è superfluo osservare che questo teorema si dimostra utilizzando l'assioma 13 e quindi il risultato fornito è chiaramente classico.

Per definizione di teorema logico, ogni passo di una dimostrazione in $\mathcal{L}$ è un teorema logico. Questo comporta alcune osservazioni sul concetto di teorema e sul significato di modus ponens.
Partiamo dal MP. Quando abbiamo definito il MP si è affermato che da $A\rightarrow B$ e A si deduce B, senza soffermarci troppo sul termine «dedurre». In base a quanto osservato in precedenza, si potrebbe pensare di formulare il MP in questi termini:
« se $\vdash A\rightarrow B$ e $\vdash A$ allora $\vdash B$ » (da notare l'uso metalinguistico, in questo enunciato del se...allora.. che sarebbe scorretto tradurre con un $\rightarrow$, simbolo del linguaggio) cioè «**se** A implica B è un teorema e se A è un teorema **allora** B è un teorema». Per fare un esempio, sappiamo che **se**
Se il tasso di sconto scende, la borsa sale (possiamo considerarlo un teorema ecomomico) **e**
Il tasso di sconto è sceso **allora** (si deduce)
La borsa sale.
La cosa non è propriamente corretta poiché la struttura «se..allora..» regge una forma condizionale, mentre nell'ottica del MP si ha «$\vdash B$ **poiché** $\vdash A\rightarrow B$ e $\vdash A$», cioè, rispetto al nostro esempio, *La borsa sale* poiché *Se il tasso di sconto scende, la borsa sale* e *Il tasso di sconto è sceso*. In questo modo si evidenzia come il fatto di essere B teorema sia giustificato dall'essere A e $A\rightarrow B$ teoremi e non conseguenza di questi fatti.
Un'altra considerazione riguarda il concetto stesso di teorema. Un teorema è un risultato interno alla teoria che si sta studiando la cui dimostrazione dipende intrinsecamente dagli assiomi e dalle regole d'inferenza scelte. Non è un caso che sino ad ora non si sia parlato di «verità» come forse a qualcuno verrebbe spontaneo (per esempio parlando del teorema di Pitagora ti sarà venuto da sostenere che è «vero»). Perché non lo si è fatto? Perché i concetti di dimostrabilità e di verità sono profondamente diversi; apprezzeremo meglio questa differenza quando ci occuperemo della semantica del calcolo dei predicati. Per chiarire comunque questo punto, riprendiamo l'esempio del gioco della dama. Si affermava che la struttura del problema era quella tipica di un teorema: ipotesi, tesi, dimostrazione. E' possibile dare al teorema una struttura formale come quella definita in precedenza? Vediamo: una fbf sarebbe in una partita a dama una qualunque distribuzione delle

pedine (anche doppie) sulle caselle nere purché non superino il numero di dodici per ciascun colore; l'unico assioma sarebbe dato dalla disposizione iniziale delle pedine sulla scacchiera, mentre le regole d'inferenza sarebbero date dalle regole con cui si possono muovere, mangiare e promuovere le pedine. Un qualunque teorema sarebbe quindi dato da una qualunque situazione che si presenta nel corso di una partita (ogni mossa può essere «giustificata», se legittima). Se quindi vogliamo stabilire se quello proposto all'inizio del capitolo è un teorema del gioco della dama, dobbiamo vedere non solo se esiste una strategia che porti alla vittoria del nero, ma anche se la configurazione iniziale è una configurazione possibile nel corso di una partita di dama (se è, cioè, un teorema) e di questo dovresti avere qualche dubbio poiché, in effetti, non si arriverebbe mai, durante una partita, a quella configurazione.

Questo esempio dovrebbe però chiarirti il fatto che si parla di teorema all'interno «del gioco» ed in quest'ottica ha senso chiedersi se quella configurazione è «possibile» e non se è «vera» (più in generale quando giochi o pratichi uno sport ti chiedi se puoi fare quella mossa o quel gesto, non se è vero). Inoltre ti dovrebbe essere chiaro il concetto di teorema di una teoria T, in cui sono introdotti altri assiomi, oltre agli assiomi logici. In sostanza il linguaggio logico è una sovrastruttura su cui si inseriscono i vari linguaggi.

Nei problemi di dama o di scacchi tipo quello proposto, non ci si preoccupa però, in generale, se quella particolare condizione iniziale è possibile, ma si ragiona in questi termini: «supponendo possibile questa configurazione, dimostra che....». In sostanza ci si preoccupa di vedere quali conclusioni è possibile trarre da certe premesse e questo non è diverso da quello che fai quando dimostri un teorema, per esempio di geometria. Pensando ai teoremi logici (che, ti ricordiamo, sono fbf) eventuali premesse saranno anch'esse fbf. Il concetto di deducibilità di una fbf da altre è espresso dalla seguente definizione

D 10. Sia $\Gamma=\{A_1 , A_2 , A_3 , \quad , A_n\}$ un insieme finito di fbf; diremo che una fbf A è **deducibile** in $\mathscr{L}$ da Γ (in simboli $\Gamma \vdash A$) se e solo se esiste un sequenza di fbf $B_1 , B_2 , B_3 ,...., B_m=A$ e, per ogni i, o B_i è un assioma, o $B_i \in \Gamma$, o B_i è una conseguenza diretta, per mezzo delle regole d'inferenza, di precedenti fbf della sequenza.

Tale sequenza si chiama *dimostrazione* (*o deduzione*) di A da Γ.

Gli elementi di Γ sono le *ipotesi* o *premesse* della dimostrazione.

La definizione precedente introduce quindi il concetto di deduzione, inteso come conseguenza di (certe) premesse.

In un'ottica puramente linguistica, non è inusuale pensare all'implicazione come connettivo strettamente legato al concetto di deduzione. Questo vale anche per la matematica ed è garantito da un importante teorema che introdurremo con un esempio.

Considera il seguente teorema di geometria:

Sia ABCD un parallelogramma; traccia due rette BE e DF fra loro parallele che incontrano AC in E ed F rispettivamente. Dimostra che BEDF è un parallelogramma.

In questo teorema hai quattro ipotesi:

A_1: ABCD è un parallelogramma;

A_2: $BE \parallel DF$

A_3: $BE \cap AC=\{E\}$

A_4: $DF \cap AC=\{F\}$

da cui si dovrebbe dedurre la tesi

B: BEDF è un parallelogramma.

Ovviamente questa non è una deduzione nel linguaggio $\mathscr{L}$, ma nell'ambito della geometria euclidea.

In sostanza dire che B è deducibile dalle ipotesi $\Gamma=\{A_1 , A_2 , A_3 , A_4\}$ equivale ad affermare che è un teorema della geometria euclidea la proposizione

Dato un parallelogramma ABCD e tracciate due rette BE e DF fra loro parallele che incontrano AC in E ed F rispettivamente, allora BEDF è un parallelogramma.
Tutto questo è espresso dal seguente teorema

T 3 (teorema di deduzione). Sia Γ un insieme finito di enunciati, A un enunciato e B una fbf;
$\Gamma, A \vdash B$ se e solo se $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ cioè
«B è deducibile da Γ e da A se e solo se $A \rightarrow B$ è deducibile da Γ».

In particolare posto $\Gamma=\{A_1 , A_2 , A_3 , \ \ , A_n\}$

$$\Gamma \vdash B \text{ se e solo se } \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\ldots . \rightarrow (A_n \rightarrow B))\ldots).$$

Osserva che, per l'assioma 10 applicato n volte, si ha che

$$\Gamma \vdash B \text{ se e solo se } \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots . \wedge A_n \rightarrow B$$

Come hai visto nell'esempio precedente è cambiato poco nella forma, poiché in ambito euclideo le due formulazioni sono equivalenti. In ambito logico la differenza è invece sostanziale, poichè il teorema di deduzione permette di isolare nei teoremi logici le premesse dalle conclusioni o, viceversa, partendo da certe premesse ricavare le conclusioni che renderebbe la forma implicativa un teorema logico. Questo permette di introdurre il concetto di equivalenza logica:

D 11. Date due fbf A e B, diremo che sono **logicamente equivalenti** e scriveremo $A \dashv\vdash B$, se e solo se $B \vdash A$ e $A \vdash B$.

In geometria hai trovato diversi esempi di equivalenze tra proposizioni, soprattutto quando hai caratterizzato alcune figure geometriche. Dire per esempio di un triangolo che ha due lati uguali equivale a dire che ha due angoli uguali. In sostanza, indicata con A la proposizione «*il triangolo ha due lati uguali*» e con B «*il triangolo ha due angoli uguali*» dire che A è equivalente a B significa dire che A è deducibile da B e che B è deducibile da A.
Il seguente teorema, a questo punto, dovrebbe essere evidente:

T 4. a) $A \dashv\vdash B$ se e solo se $\vdash A \leftrightarrow B$.
b) La relazione $A \dashv\vdash B$ nell'insieme delle fbf è una relazione d'equivalenza.

Per chiarire il punto a) del precedente teorema, riprendiamo l'esempio dei triangoli isosceli. Il teorema afferma che l'equivalenza (logica) delle fbf A e B equivale al fatto che la fbf $A \leftrightarrow B$ è un teorema (logico). Riportando il tutto nell'ambito della geometria euclidea, questa formulazione giustifica l'enunciato con cui si caratterizzano i triangoli isosceli. In effetti, dopo aver dimostrato che dall'uguaglianza dei lati si deduce l'uguaglianza degli angoli e viceversa, si formula il teorema in questi termini:
Un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

Osserva, inoltre, come la definizione di deducibilità e il teorema precedente permettano di passare da una condizione linguistica ($A \leftrightarrow B$ oppure $A \rightarrow B$) a una metalinguistica (quella di equivalenza o di deducibilità). Questo ci permette, da un punto di vista pratico, di trattare le proposizioni come se fossero espressioni algebriche, in cui poter sostituire a certe fbf altre a queste equivalenti.
Vediamo alcune applicazioni dei risultati trovati nel seguente IN PRATICA

IN PRATICA.
1) Sia Γ l'insieme formato dalle seguenti premesse:
A_1 : Se vado dallo zio Gianni, incontro Anna, ma non vedo Maria.

A_2 : Se non vedo Maria, non posso portarle il disco.
A_3 : Porto il disco a Maria.
Quali conclusioni si possono trarre da queste premesse? Per formalizzare le frasi precedenti occorre tenere presente che servono cinque costanti individuali (io=i, Gianni=g, Anna=a, Maria=m, disco=d) e quattro predicati, tre binari (A(x,y)='x va da y', V(x,y)='x vede y', I(x,y)='x incontra y') ed uno ternario (P(x,y,z)='x porta y a z').
Le premesse di Γ diventano quindi
A_1 : $A(i,g)\to I(i,a)\wedge\neg V(i,m)$
A_2 : $\neg V(i,m)\to\neg P(i,d,m)$ A_3 : $P(i,d,m)$
Per semplificare le scritture, nel seguito ometteremo le costanti individuali. E' il caso di osservare che, essendo state tutte le variabili dei predicati sostituite da costanti individuali, tutte le fbf coinvolte sono enunciati e questo permette di fare una deduzione di tipo proposizionale.
La A_2 , per T2c è equivalente a $P\to V$.
Potremmo procedere con una dimostrazione formale; anzi a rigore dovremmo fare solo in questo modo. Quello che ci interessa non è tanto insegnarti come si effettuano le dimostrazioni formali (decisamente complesse e pesanti), quanto farti capire lo spirito di una deduzione. Procederemo così in modo «meta-dimostrativo», indicando le fbf che sono conclusioni e come sono state dedotte:
da A_3 e da $P\to V$ si ottiene, per MP, **V** (evidenziamolo come risultato ottenuto);
da A_1, tramite gli assiomi 4 e 7 si ottiene $A\to\neg V$;
$A\to\neg V$ è equivalente per T2c e T2a a $V\to\neg A$
da $V\to\neg A$ e da V si ottiene, per MP, **¬A**
Quindi posso dedurre, dalle premesse *che non vado da Gianni e vedo Maria.*

2)Vediamo ora la seguente deduzione che coinvolge dei quantificatori:
Sia Γ l'insieme delle seguenti premesse:
A_1 : Tutti gli studenti vanno in vacanza, ma non al mare
A_2 : Chi ama l'acqua va al mare.
A_3 : Carlo è uno studente.
Quali conclusioni si possono trarre da queste premesse?
Per la formalizzazione di queste proposizioni servono quattro costanti individuali: v=vacanza, m=mare, a=acqua, c=Carlo e tre predicati : S(x)='x è studente' (unario), V(x,y)='x va in y' (binario), A(x,y)='x ama y' (binario)
Le premesse diventano quindi
A_1 : $\forall x(S(x)\to V(x,v)\wedge\neg V(x,m))$
A_2 : $\forall x(A(x,a)\to V(x,m))$
A_3 : $S(c)$
La meta-dimostrazione che risolve il problema può essere espressa in questi termini:
la A_1 può essere **particolarizzata** con c, cioè alla variabile è possibile sostituire la costante c (tanto vanno bene tutte!). Questo procedimento, al solito, è garantito da un teorema, che ti risparmiamo.
La fbf diventa quindi $S(c)\to V(c,v)\wedge\neg V(c,m)$;
da $S(c)\to V(c,v)\wedge\neg V(c,m)$ e $S(c)$ per MP si deduce $V(c,v)\wedge\neg V(c,m)$;
da $V(c,v)\wedge\neg V(c,m)$ si deducono, grazie agli assiomi 3 e 4, **V(c,v)** e **¬V(c,m);**
la A_2 può essere particolarizzata con c, cioè $A(c,a)\to V(c,m)$;
per T_2c $A(c,a)\to V(c,m)$ è equivalente a $\neg V(c,m)\to\neg A(c,a)$;
da $\neg V(c,m)$ e $\neg V(c,m)\to\neg A(c,a)$ per MP si deduce **¬A(c,a)**.
Quindi dalle premesse si può dedurre: *Carlo va in vacanza*, *Carlo non va al mare* e *Carlo non ama l'acqua.*

Prova tu a dedurre, dalle seguenti premesse, le relative conclusioni:

3) A_1: Se scrivo a Sara non le telefono
A_2 : Se non scrivo a Sara, le manderò dei fiori.
A_3 : Telefono a Sara.

4) A_1: Tutte le persone devote vanno a Roma
A_2 : Chi va a Roma visita il Colosseo
A_3 : Giacomo non ha visitato il Colosseo.

Per concludere, un'ultima considerazione sulla contronominale. Dal concetto di deducibilità e dal teorema T2c si ha che $A \vdash B$ se e solo se $\neg B \vdash \neg A$.
Un esempio a te noto di applicazione di questa equivalenza l'hai trovato quando abbiamo dimostrato la condizione necessaria di parallelismo, che ti ricordiamo:
Date due rette distinte r ed s tali che r | | s tagliate da una trasversale t, formano angoli alterni interni uguali.
La dimostrazione viene fatta negando la tesi e deducendo, da tale negazione, la negazione dell'ipotesi (se, in effetti, le rette fossero parallele nell'ipotesi che gli angoli alterni interni fossero diversi, si arriverebbe all'assurdo della negazione del V postulato di Euclide).

2.2. TEORIE COERENTI

Immagina che nel gioco del calcio sia introdotta questa regola senza che vengano modificate le altre:
Se viene battuto un calcio d'angolo, il difensore può prendere la palla con le mani
In una partita può presentarsi allora la seguente situazione:
viene battuto un calcio d'angolo (premessa); per modus ponens applicato alla regola precedente si può dedurre che un difensore prenda la palla con le mani. D'altra parte un'altra regola del gioco del calcio stabilisce che nessun giocatore, escluso il portiere nella propria area, possa prendere volontariamente la palla con le mani. Si arriverebbe così ad una contraddizione all'interno del gioco stesso, contraddizione che impedirebbe di giocare a calcio.
Più in generale

D 12. a)Una teoria T si dice **contraddittoria** se esiste una fbf di $\mathcal{L}(T)$ tale che $\vdash_T A$ e $\vdash_T \neg A$.
b) Una teoria T si dice **coerente** se non è contraddittoria

Per caratterizzare il concetto di teoria coerente o contraddittoria si dimostra il seguente

T 5. Sia T una teoria; allora si ha:
T è coerente se e solo se esiste una fbf di T che non è un teorema di T o, equivalentemente,
T è contraddittoria se e solo se ogni fbf è un teorema di T.

La proposizione precedente caratterizza, come detto, le teorie contraddittorie e quelle coerenti; in particolare la caratterizzazione di teoria contraddittoria si può leggere in questi termini: se una teoria è contraddittoria, al suo interno si può dimostrare di tutto. Chiaramente il linguaggio usato è improprio, ma dovrebbe farti capire come l'esistenza di una contraddizione, una sola, all'interno di una teoria vanifichi tutta la teoria.
E' per esempio quanto è successo agli inizi del novecento al filosofo tedesco Frege (1848-1925) che, in procinto di pubblicare il secondo volume della sua opera *Principi* con la quale si prefiggeva di ricondurre l'aritmetica a principi logici utilizzando la teoria degli insiemi, incappò in quello che poi divenne famoso come **Paradosso di Russell**. Scrive Frege all'inizio dell'appendice al secondo volume dei Principi:
"A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione".

Cos’era successo? Tra i principi assunti da Frege per formalizzare la teoria degli insiemi, particolare importanza assunse il *Principio di comprensione*: data una qualunque proprietà esiste sempre (ed è unico in virtù del principio di estensionalità che afferma l’uguaglianza di due insiemi aventi gli stessi elementi) l’insieme di tutti e soli gli “oggetti” che godono di quella proprietà.
Nella pratica matematica hai costruito parecchi insiemi utilizzando tale proprietà, avendo l’accortezza che la proposizione scelta non sia soggettiva o ambigua (ad esempio ‘essere bello’).
Considera ora la proprietà: “non appartenere a se stesso” cioè considera l’insieme $R=\{x:x\notin x\}$.
Tale insieme non è vuoto, in quanto ad esempio l’insieme degli alunni della tua classe non è un alunno. Ci si chiede allora: R appartiene o non appartiene ad R? Secondo il principio di comprensione R appartiene ad R se e solo se verifica la proprietà che caratterizza gli elementi di R che è quella di non appartenere a se stessi. In simboli

$$R\in R\leftrightarrow R\notin R$$

il che porta chiaramente ad un’antinomia. La teoria degli insiemi, così come era formulata, si presentava in termini non coerenti. La delusione di Frege fu tale ed era così radicata la sua convinzione sull’impossibilità di superare paradossi di questo tipo da indurlo a ritirarsi dall’insegnamento ed a passare in silenzio il resto della sua vita.

2.3 TEORIE COERENTI ?

Il problema della coerenza di una teoria è un problema puramente matematico, se ci si accorge che la matematica *non descrive* una realtà, ma *può servire* per descrivere una realtà; in altre parole le applicazioni della matematica non sono sempre causa dello sviluppo delle teorie matematiche. Anzi, solo alcune delle teorie matematiche hanno poi trovato un’applicazione successiva; altre sono lì, in attesa, e molte di queste (probabilmente la stragrande maggioranza) non la troverà mai, senza per questo esserne sminuite. In alcuni casi (il più famoso è forse costituito dalla teoria della relatività di Einstein) sono stati i risultati matematici precedentemente trovati a permettere l’intuizione che ha portato a taluni risultati in fisica o chimica. In sostanza è come se la matematica fosse servita come un cannocchiale per “vedere” con la ragione ciò che l’occhio non aveva ancora visto (e forse non avrebbe mai potuto vedere).
Non è strano allora che sino all’Ottocento la matematica sia stata ritenuta una garanzia di verità. La comparsa delle geometrie non euclidee (di cui daremo un breve cenno in seguito) ha messo in crisi questo concetto, ponendo così il problema, noto come «Il problema dei fondamenti», di stabilire su cosa si basa la matematica e cosa ne garantisca l’esistenza. Nel seguito ci occuperemo solo di alcuni aspetti di questo problema.
Nella parte precedente ti sarai reso conto di come possano essere complesse le dimostrazioni formali, le quali però hanno un grosso pregio: i passaggi della dimostrazione sono tutti riconducibili agli assiomi e alle regole d’inferenza in modo esplicito e quindi la loro correttezza è sempre “sotto controllo”. Questo permette di avere una sicurezza enorme nella dimostrazione, ma non solo. Immagina di poter riscrivere secondo una terminologia logica una teoria, ad esempio la geometria euclidea, aggiungendo agli assiomi della logica gli assiomi propri della teoria. I teoremi diventerebbero quindi teoremi nel senso da noi dato nella D 9. Ma tali risultati, ottenuti appunto in modo formale, fornirebbero una proprietà degli **enti logici** coinvolti. In sostanza si dimostrerebbe una proprietà valida per tutti quegli oggetti che verificano gli assiomi. Questo modo di procedere è stato tipico di Hilbert (1862-1943) in alcuni suoi lavori, in cui cercò di formalizzare la matematica in senso logico e di trovare, all’interno di tale formalizzazione, la giustificazione della sua stessa esistenza.
In una delle sue opere Hilbert riscrive **Gli elementi** di Euclide in termini logici. Questo cosa significa? Euclide, per esempio, non parla di termini primitivi, ma cerca di definire concetti quali punto, retta ecc. con evidenti problemi di circolarità. Inoltre l’assiomatizzazione di Euclide è piuttosto carente su certi concetti, come ad esempio le relazioni d’ordine. Hilbert individua innanzi tutto i termini primitivi e successivamente gli assiomi necessari che suddivide in cinque gruppi:

1) gli assiomi di appartenenza (per esempio: “Per due punti distinti passa una ed una sola retta”);
2) gli assiomi di ordinamento (per esempio: “Se un punto B sta fra A e C allora sta anche tra C ed A”);
3) assiomi di uguaglianza (per esempio: “Su una data semiretta avente origine in A’ esiste un punto B’ tale che |A’B’|=|AB|, essendo AB un segmento dato”);
4) assioma delle parallele;
5) assiomi di Archimede e della continuità.
Al dì la della specifica assiomatizzazione, è importante rilevare il ruolo che acquista il concetto di termine primitivo hilbertiano: mentre nell’ottica classica con una teoria si intende parlare di qualcosa, nella nuova prospettiva una teoria assiomatica descrive enti qualunque, *purché soddisfino gli assiomi*. In sostanza i termini primitivi trovano una loro definizione implicita negli assiomi. A tale proposito Hilbert osservò: ”Si deve essere in grado di dire ogni volta, invece di ‘punti, rette e piano’, ‘tavoli, sedie e boccali di birra’”. La geometria diventa pura forma, in cui la coerenza (logica) è l’unico arbitro.

Con l’aritmetica, le cose non vanno molto diversamente. Il problema di stabilire cosa siano i numeri naturali senza coinvolgere questioni insiemistiche che portavano in sé il rischio del paradosso di Russel, fu affrontato da G. Peano (1858-1932) e dalla sua scuola nel 1889. Peano introdusse quattro concetti primitivi: numero, uno, successivo e uguaglianza. A questi aggiunse nove assiomi. Anziché dare l’assiomatica di Peano, vediamo come Hilbert riscrisse l’aritmetica, secondo le indicazioni del matematico italiano. Come si diceva, l’intento di Hilbert era quello di vedere le teorie matematiche in modo formale; per fare questo, diede un linguaggio ed una serie di assiomi. Il calcolo dei predicati coincide, grosso modo, con quello da noi proposto. Introdusse poi alcuni simboli propri della teoria e il sistema di assiomi specifici. Partiamo dai simboli propri:
1) una costante individuale, lo zero: 0
2) un predicato binario: =
3) tre simboli funzionali: ’ (successivo; unario), +, • (somma e prodotto; binari).
Si tratta ora di dare l’impianto assiomatico, cioè le regole ritenute indispensabili per una trattazione rigorosa del concetto di numero naturale. Innanzi tutto occorrerà specificare le proprietà del predicato d’uguaglianza che, come noto, individua una relazione d’equivalenza; successivamente si dovrà descrivere l’insieme dei numeri naturali, insieme che deve contenere lo 0 ed il successivo (cioè il numero che «viene dopo» un numero dato; per esempio 2’=3, 3’=4, ecc.) di ciascun numero già presente. L’insieme dei numeri naturali è costruito quindi con la funzione successivo, perciò risulta piuttosto intuitivo pensare che il successivo di un numero debba essere unico, che numeri diversi abbiano successivi diversi e che lo 0 non sia il successivo di ciascun numero, cioè sia il primo numero naturale. Infine dovranno essere dati degli assiomi che dicano come si comportano le operazioni + e •.
Diamo di seguito gli assiomi specifici della teoria T dei numeri naturali con un breve commento sul loro significato per riconoscerli rispetto a quanto detto in precedenza:

N1. $\forall x(x=x)$	(l’uguaglianza è riflessiva)
N2. $\forall x\forall y(x=y\rightarrow y=x)$	(l’uguaglianza è simmetrica)
N3. $\forall x\forall y\forall z(x=y\rightarrow(y=z\rightarrow x=z))$	(l’uguaglianza è transitiva)
N4. $\forall x\forall y(x=y\rightarrow x'=y')$	(“il successivo di” è una funzione)
N5. $\forall x\forall y\forall z\forall k(x=y\wedge z=k\rightarrow x+z=y+k\wedge x\bullet z=y\bullet k)$	(la somma e il prodotto godono della proprietà di monotonia)
N6. $\forall x(\neg(x'=0))$	(lo 0 non è il successivo di alcun numero)
N7. $\forall x\forall y(x'=y'\rightarrow x=y)$	(la funzione successivo è iniettiva)
N8. $\forall x(x+0=x)$	(lo 0 è l’elemento neutro della somma)

N9. $\forall x \forall y(x+y'=(x+y)')$ (la somma di un numero col successivo di un altro è uguale al successivo della somma dei due numeri)

N10. $\forall x(x*0=0)$ (lo 0 è l'elemento assorbente del prodotto)

N11. $\forall x \forall y(x \bullet y'=x \bullet y+x)$ (il prodotto è distributivo rispetto al successivo)

N12. $\alpha(0) \wedge \forall x(\alpha(x) \to \alpha(x')) \to \forall x \alpha(x)$, essendo α una formula di T.

Esplicitamente, a parte lo 0, non sono evidenziati altri numeri; ma se poniamo 0'=1, (0')'=2, ecc. ritroveremmo i numeri naturali (numerali) così come noi li conosciamo, scritti solo in modo diverso.
Tutti gli assiomi N1-N11 sono, per certi aspetti, intuitivi. Non così si può dire dell'assioma N12, detto anche **Assioma d'induzione o Principio d'induzione** che non a caso trattiamo a parte.
L'assioma d'induzione può essere letto in questi termini: se una proprietà è dimostrata in 0 e, da P(x) si deduce P(x'), allora è dimostrata da tutti i numeri naturali. Questo perché se è dimostrata P(0) è dimostrabile P(1) (il suo successivo); ma se è dimostrabile P(1), è dimostrabile P(2) e così via; $\alpha(0)$ è detta **base induttiva**, mentre la supposizione che sia $\alpha(x)$ viene detta **ipotesi induttiva**.
L'assioma d'induzione è particolarmente importante sia per dimostrare proprietà sui numeri naturali, sia per definire operazioni sui numeri. Un tipico esempio è dato dalla definizione di potenza:
Dato $a \in N$, si pone
$a^0=0'$ e
$\forall n(a^{n'}=a \bullet a^n)$
ritrovando così l'operazione che già conosci senza dover scrivere cose del tipo
$a^n=a \bullet a \bullet .... \bullet a$ n volte che da un punto di vista matematico sono scorrette, in quanto non è chiaro cosa sostituiscono i puntini.

IN PRATICA
1) Una questione importante, non ancora affrontata, è questa: gli assiomi garantiscono l'esistenza di numeri naturali diversi da 0? E quanti sono?
Dimostriamo innanzi tutto che $\neg(0'=0)$. Banalmente

1. $\forall x(\neg(x'=0))$	ax N6
2. $\forall x(\neg(x'=0)) \to \neg(0'=0)$	particolarizzazione
3. $\neg(0'=0)$	MP 1,2

Questo significa che esiste almeno un altro numero diverso da 0: il suo successivo, che chiameremo 1.

2) Dimostra che ogni numero naturale è diverso dal suo successivo.
La conseguenza immediata di questa proprietà è che i numeri naturali sono infiniti.

Le dimostrazioni rigorosamente formali sono piuttosto pesanti e a volte sembra che complichino le cose più del dovuto. Ovviamente non è così poiché il loro rigore giustifica le difficoltà che comportano. Ci sono però condizioni in cui alcune cose si possono semplificare, senza perdere in rigore. Un esempio tipico è costituito proprio dall'utilizzo del principio d'induzione per l'estensione di alcune proprietà a tutti i numeri naturali. Facciamo alcuni esempi per vedere come muoversi.

IN PRATICA
1) L'assioma N9 pone, nella determinazione del successivo di una somma, una dissimmetria tra x e y, cioè tra il primo ed il secondo addendo. Utilizzando il principio d'induzione dimostriamo una proprietà della funzione successivo, rispetto alla somma, che chiameremo dello **scambio del**

successivo che renderà simmetrica tale situazione. La proprietà, che indicheremo con α, è espressa dal seguente enunciato

$\forall x \forall y(x+y'=x'+y)$

che possiamo leggere in questi termini:

«comunque si prendano due numeri naturali, la somma del primo col successivo del secondo è uguale alla somma del successivo del primo col secondo». Volendo fare un esempio numerico, è come affermareche se a 3 sommo il successivo di 5 (cioè 6) ottengo lo stesso risultato del sommare al successivo di 3 (cioè 4) il numero 5.

Dimostriamo questa proprietà non con una dimostrazione così formale come la precedente, anche se citeremo gli assiomi di volta in volta utilizzati. Il nostro scopo è soprattutto quello di mostrarti come si può applicare il principio d'induzione.

Se si vuole utilizzare il principio d'induzione occorre stabilire su quale tra le due variabili quantificate si procede con l'induzione. Noi faremo una dimostrazione su y. In questo caso si fa un'induzione su y mentre x viene particolarizzata da una costante (che indicheremo con m), rappresentante un generico (ma fissato!) numero naturale. L'enunciato diventa allora

$\forall y(m+y'=m'+y)$

Dimostriamo che vale per y=0: $(m+0')=(m+0)'=m'=m'+0$

La seconda e terza uguaglianza sono giustificate dall'assioma N8; la prima dall'assioma N9.

Supponiamo che valga per y, cioè che $m+y'=m'+y$; dimostriamo che allora vale anche per y':

$m+(y')'=(m+y')'=(m'+y)'=m'+y'$

La prima e terza uguaglianza sono giustificate dall'assioma N9; la seconda dall'ipotesi induttiva. Risultano così verificate le due condizioni $\alpha(0)$ e $\forall y(\alpha(y)\rightarrow \alpha(y'))$ per cui $\forall y\alpha(y)$.

Nel seguito, salvo diverso avviso, utilizzeremo per i numeri naturali la scrittura ordinaria. Questa scelta rende le espressioni di più facile lettura; ma chi garantisce che $n'=n+1$, essendo + l'operazione di somma definita dagli assiomi N8 e N9? Una risposta a tale domanda ti sarà fornita negli esercizi.

2) Dimostriamo la proprietà $\alpha(n)$:'la somma dei numeri che vanno da 0 ad n è data da $S=\frac{n(n+1)}{2}$'.

Per n=0 si ha S=0 e quindi risulta verificato $\alpha(0)$ (base induttiva).

Supponiamo che la somma dei numeri da 0 a n sia $S=\frac{n(n+1)}{2}$ (ipotesi induttiva). Calcoliamo la somma dei primi numeri naturali da 0 a n+1. Poiché la somma dei numeri da 0 a n è $\frac{n(n+1)}{2}$ (per ipotesi induttiva), la somma richiesta è data da

$S=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ per cui è verificato $\alpha(n+1)$.

Per la genericità di n, si è verificato l'antecedente dell'assioma d'induzione. Quindi la proprietà vale per tutti i numeri naturali.

3) Dimostra che $1+3+5+7+...+(2n+1)=n(n+1)$

4) Dimostra che la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di primo elemento a e ragione q è $S= a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Il principio d'induzione è un'arma potente in mano ai matematici, ma va usata con molta attenzione, soprattutto se si ha a che fare con insiemi finiti. Per convincerti di quanto detto, considera la seguente storiella: se ad una persona si toglie un capello, non rimane calva; se dopo aver tolto n capelli non è calva, togliendone un altro non è calva. Tutte queste premesse sembrano

corrette; per il principio d'induzione tolto un qualunque numero di capelli quella persona non rimane calva. Se il ragionamento ti sembra corretto, provalo su te stesso!
Un'ultima considerazione. L'assioma d'induzione è sicuramente anomalo, in quanto coinvolge, nella sua formulazione, un generico predicato α. In un certo senso, per esprimerlo correttamente, dovremmo quantificarlo universalmente e diventerebbe
$\forall\alpha(\alpha(0)\wedge\forall x(\alpha(x)\rightarrow\alpha(x'))\rightarrow\forall x\alpha(x))$. Ma nel nostro linguaggio non è possibile quantificare predicati o funzioni in quanto non abbiamo variabili predicative o funzionali (ricorda: abbiamo solo variabili individuali!). Logiche in cui questo è possibile sono le logiche del **secondo ordine** (è allora chiaro perché la nostra logica è stata definita del primo ordine), in cui esistono variabili predicative o funzionali, rendendo più ricca la capacità espressiva del linguaggio formale, anche se questo, come vedremo, ha un prezzo piuttosto caro.
Concludiamo col dire che indicheremo con N l'insieme degli 'enti' che verificano gli assiomi; tieni conto che in questo contesto si cambia ambito rispetto a quanto fatto sino ad ora perché, citando l'insieme dei numeri naturali così come li conosci, si fa un 'esempio' di enti che verificano gli assiomi o, come si dice in matematica, si fornisce un modello. Ma questo, come detto, è un altro discorso.

L'idea di una matematica formalizzata che si tenta di impostare alla fine dell'Ottocento, si scontra con l'opinione diffusa tra coloro che non se ne occupano specificatamente, secondo cui la matematica si occupa di oggetti definiti. Di fatto, in matematica non si dice che cosa sono le cose che si studiano, ma si determinano solo le operazioni su di esse in base a leggi non ambigue espresse dagli assiomi. Quelle che hai studiato in questi anni non erano che alcune delle possibili realizzazioni di tali concetti. In quest'ottica dovrebbe essere chiara l'importanza delle dimostrazioni formali: negli intenti di Hilbert dovevano costituire gli strumenti garanti di una teoria; garanti anche di verità. In polemica con Frege (il quale deduce la non contraddittorietà degli assiomi dalla loro verità) Hilbert sostiene che se degli assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, cioè esistono enti definiti per mezzo di questi assiomi; e questo è il criterio della verità e dell'esistenza.
La coerenza, quindi, come garanzia di verità e d'esistenza. Poiché la coerenza è un concetto interno alla teoria, anche la verità deve poter essere dedotta all'interno della teoria stessa. Da una verità assoluta occorre quindi passare ad un concetto più relativo, che è quello della coerenza interna. Il passo, come detto, è stato intrapreso nell'Ottocento quando si sono sviluppate le geometrie non euclidee.
Sino all'Ottocento la geometria euclidea è stata considerata un esempio di verità che il nostro intelletto coglie in quanto tale.
Nell'Ottocento cambia qualcosa. La stessa idea di libertà che sul piano storico ha portato, a partire da quella francese, a tutte le rivoluzioni del XIX secolo ha permesso anche ai matematici di pensare in modo alternativo all'assiomatica euclidea. In sostanza così come Galileo nel Seicento aveva guardato il cielo con un cannocchiale, il matematico dell'ottocento guarda alla geometria solo in termini assiomatici e non «reali».
Com'è noto, la geometria euclidea è caratterizzata dal famoso Quinto postulato, di cui viene data la versione più abituale, pur non essendo quella formulata da Euclide:
Data una retta r e un punto P esterno ad essa, esiste una e una sola retta s passante per P e parallela a r.[2]
Gli assiomi posti da Euclide alla base della sistematizzazione della geometria sono garantiti, secondo il geometra greco, dalla loro evidenza. Non così per il quinto postulato; questa diffidenza è espressa non solo dal fatto che lo eviti sino a che gli è possibile, ma anche dal nome stesso. In effetti, per Euclide il termine assioma (dal greco aksioma=dignità) ha la prerogativa dell'evidenza,

[2] A rigore ciò che afferma in più l'assioma è l'unicità della parallela, in quanto l'esistenza si dimostra con gli assiomi precedenti, cioè almeno una retta parallela ad una retta r passante per un punto P esterno ad r data esiste sempre.

mentre postulato (dal latino postulatum=richiesta) viene visto come una scelta (arbitraria) fatta dal matematico. Nella matematica moderna la distinzione non ha più significato.
Per circa duemila anni si è cercato, senza riuscirci, di dimostrare questo postulato a partire dagli altri assiomi della geometria euclidea. Nell'Ottocento, come detto, si cambia la prospettiva, preoccupandosi non di dimostrare che il quinto postulato è conseguenza degli altri, ma di vedere cosa succederebbe se si negasse il quinto postulato. Noi vedremo, per sommi capi, alcuni risultati delle geometrie non euclidee confrontati con quelli della geometria euclidea, non dopo aver rilevato come il vero padre delle geometrie non euclidee sia un gesuita italiano, Gerolamo Saccheri (1667-1733) che, cercando di dimostrare quanto fosse assurdo, dal punto di vista di una presunta evidenza, negare il quinto postulato d'Euclide, dimostrò di fatto, diversi teoremi delle geometrie non euclidee.
Negare il quinto postulato di Euclide significa ammettere due cose possibili:
a) Data una retta r e un punto P esterno a essa, non esiste alcuna retta s passante per P e parallela a r[3].
b) Data una retta r e un punto P esterno a essa, esistono più rette passanti per P che non incontrano r. Di fatto l'esistenza di almeno due rette che non incontrano r, comporta che ve ne siano infinite (almeno quelle comprese tra le due di cui si è assunta l'esistenza). Tra di loro ve ne sono esattamente due che non incontrano r (le indicheremo con a e b) e "separano" le rette che intersecano r da quelle che non la intersecano. Chiameremo *parallele* le rette a e b, mentre le altre che non intersecano sono dette *iperparallele*.
La geometria che utilizza il postulato a) in luogo di quello euclideo fu sviluppata da B.Riemann (1825-1866) e la chiameremo R; la geometria che utilizza il postulato b) in luogo di quello euclideo fu sviluppata da N. Lobacevskij (1793-1856) e J. Bolyai (1802-1860) e la chiameremo L.
Nella seguente tabella riporteremo quattro teoremi in cui nella prima colonna forniremo le ipotesi e nelle altre tre le tesi relative alle geometrie euclidea (che indicheremo con E), R ed L.

Ipotesi	E	R	L
Dato un triangolo ABC	la somma degli angoli interni è uguale ad un angolo piatto	la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto	la somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto
Se due triangoli ABC e A'B'C' hanno gli angoli ordinatamente uguali	sono simili	sono uguali	hanno la stessa area
Sia ABCD un quadrilatero rettangolo in A e B. Se AC=BD allora	DC=AB (il quadrilatero è un rettangolo)	DC<AB	DC>AB
In un triangolo ABC un angolo esterno è	uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti	minore della somma degli angoli interni non adiacenti	maggiore della somma degli angoli interni non adiacenti

Lo specchietto proposto è chiaramente indicativo e serve per mostrarti un confronto fra i risultati di teorie ottenute con assiomatiche diverse. Puoi così osservare come, a partire dalle stesse ipotesi, si ottengano teoremi diversi. Bada bene: teoremi diversi. La domanda che può risultare spontanea è allora questa: quale delle tre è 'vera'? Chi credeva nella verità della geometria euclidea, pensava ad una verità a priori sorretta dall'evidenza della realtà. Senza entrare nel merito di cosa sia la realtà, questo criterio, per la prassi matematica, non basta. E non è neppure significativo il fatto che, ad esempio, la teoria della relatività di Einstein utilizzi la geometria di Riemann. E allora, quale delle tre è 'vera'? Per rispondere occorre trovare una contraddizione in una delle tre teorie o il concetto di verità ha altre connotazioni?

[3] Per quanto detto nella nota precedente, oltre alla negazione del postulato della parallela occorre negare almeno un altro assioma. Non approfondiremo troppo questi aspetti che esulano un po' dal nostro discorso.

Nel caso del lavoro di Frege la contraddizione fu trovata, permettendo di riscrivere in termini formalmente più corretti la teoria degli insiemi. Ma per le altre teorie (matematiche o non) chi garantisce la loro non contraddittorietà? In sostanza, il fatto di non aver trovato contraddizioni all'interno della geometria euclidea ne garantisce la coerenza? Chiaramente no, a meno che non si dimostri, in altro modo, che una teoria è coerente senza andare a considerare tutte le proposizioni della stessa (osserva che, mentre il concetto di contraddittorietà dipende da un quantificatore esistenziale, quello di coerenza dipende da un quantificatore universale).
Oltre a questo, non è sempre facile vedere se di una proposizione o della sua negazione esiste la dimostrazione, con l'ulteriore difficoltà del non sapere, nel caso non la si trovi, se tale dimostrazione non esiste o non si è riusciti a trovarla. Per renderti conto di tale difficoltà, riprendi l'esempio della dama o degli scacchi: se ti viene mostrata una configurazione "legittima" (ad esempio, per la dama con le pedine sulle caselle giuste) è sempre facile (e possibile) stabilire se quella configurazione proviene da una partita reale, se cioè è stata ottenuta come teorema della teoria? Prendi qualche problema proposto da giornali di enigmistica e prova a rispondere: ti accorgerai che non è facile.

Un'altra questione strettamente connessa a questa è quella della completezza di una teoria. Come avrai avuto modo di osservare, gli enunciati rivestono un ruolo particolare tra le fbf: alcuni teoremi importanti coinvolgono solo fbf di questo tipo. In genere si può pensare agli enunciati come a fbf che forniscono 'delle proprietà'; ma per affermare questo occorrerebbe poter dire di un enunciato o (aut) della sua negazione se sono teoremi di una teoria. Una teoria per cui ciò sia possibile è detta completa. Più in generale

D 13. Sia A un enunciato di una teoria T coerente. T si dice **sintatticamente completa** se e solo se o A o la sua negazione ¬A (ma non entrambi contemporaneamente!) sono teoremi della teoria.

Nella definizione precedente è sotteso un quantificatore universale all'enunciato A. Questo fa pensare che gli enunciati siano fbf «particolari». Il problema comunque di stabilire se un sistema è (sintatticamente) completo è strettamente legato a quello di stabilire cosa significhi caratterizzare una struttura mediante un sistema assiomatico, cosa che abbiamo intravisto in precedenza con i lavori di Hilbert.
Le questioni introdotte, come si vede, non sono semplici, anche perché riguardano l'essenza stessa della matematica; tale tipo di problemi rientra nella categoria più vasta nota come «Il problema dei fondamenti». In sostanza, su cosa poggia la matematica? Chi garantisce la coerenza o la completezza di una teoria? Poiché la matematica non è una scienza sperimentale, soprattutto perché è difficile individuarne "l'oggetto" di studio, questo è un problema cardine e dalla sua risposta si può dedurre il senso o meno del lavoro che si sta facendo. In ogni caso, prima di rispondere a queste domande dobbiamo affrontare le questioni di tipo semantico, per capire meglio, da un punto di vista logico, un concetto che sino ad ora si è cercato (non sempre riuscendovi) di evitare: quello di verità.

2.4 LOGICA E CALCOLATORI

Se hai seguito le proposte fatte e se hai riflettuto sui problemi che ti sono stati posti, ti sarai reso conto come mai la parte sintattica della logica sia in genere trascurata: è difficile. Ma è anche molto importante, perché senza un'analisi sintattica del linguaggio non risulta chiaro neppure il concetto di teorema , confondendo così il concetto di dimostrazione con quello di verità. D'altro canto hai incontrato e ti sei impadronito, durante i tuoi studi superiori, di concetti che sono prettamente sintattici. Su tutti, i linguaggi di programmazione e l'uso del calcolatore in generale. Ti è sempre stato detto (come nel capitolo riguardante gli automi) che il calcolatore è "stupido" nel senso che esegue ciò che il programmatore gli impone: se il calcolatore "sbaglia" è per colpa nostra. Questo perché il calcolatore "non interpreta", nel senso che esegue ciò che l'istruzione gli indica, senza entrare nel merito se questo era ciò che il programmatore voleva.

Quando esegui ad esempio un programma in Pascal ti preoccupi della morfologia del linguaggio (nel senso che devi scrivere correttamente le ‘parole’) e della sintassi, sintassi che ti viene fornita nella presentazione dell’istruzione che la definisce; pensa ad esempio ai cicli o all’assegnazione delle variabili. Gli errori evidenziati dal calcolatore in fase di compilazione sono prevalentemente di carattere morfologico (non riconosce parole) o sintattico (istruzione usata in modo non corretto; ad esempio il repeat senza l’until). Ma quando definisci una variabile integer e gli fornisci come assegnazione un numero decimale, che tipo di errore segnala il calcolatore? In quale ambito ci si muove, morfologico, sintattico o qualcos’altro? Se ci rifletti un attimo ti accorgerai che l’errore è ancora di carattere sintattico, ma la risposta, rispetto alla precedente, non è così immediata. Perché? Il dubbio è che il calcolatore ‘interpreti’; ma per risolvere questo dubbio occorre stabilire cosa significa, in matematica, ‘interpretare’.

3. SEMANTICA DI UNA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

Nella parte relativa alla morfologia e alla sintassi del linguaggio $\mathcal{L}$ ci siamo preoccupati di stabilire come si costruiscono le frasi e cosa significhi dedurre. Nulla si è detto a proposito della verità o meno delle proposizioni trattate. Questa preoccupazione pone in modo prioritario il problema di stabilire cos'è la verità.
Aristotele affermava che "vero è dire di ciò che è, che è e di ciò che non è, che non è"; dunque un criterio assoluto di verità. La sua posizione venne però messa in dubbio già in età classica dai filosofi della scuola di Megara cui si deve il paradosso del mentitore.
Per Cartesio un criterio per la verità è costituito dalle idee chiare e distinte.
Anche per quanto riguarda le questioni matematiche, varie erano le posizioni filosofiche. Ad esempio nel caso della geometria, alla domanda per quale ragione le proposizioni geometriche siano vere è stato risposto in vari modi: 1) sono vere in virtù delle proprietà inerenti alla natura delle cose; 2) sono vere approssimativamente al mondo fisico; 3) sono vere perché sono una nostra intuizione a priori.
Come è facile intuire, le definizioni filosofiche di verità non forniscono un criterio operativo per valutare se una proposizione matematica sia vera o no. Una risposta a questo problema fu fornita da Tarski nel 1935 che diede un criterio matematico per verificare la verità di un enunciato, in un certo contesto. La proposta di una semantica per i linguaggi astratti della matematica, è nata dall'analisi del paradosso del mentitore. La soluzione prospettata da Tarski fu quella di distinguere tra linguaggio oggetto e metalinguaggio. Si può inoltre dimostrare che in ogni linguaggio in cui sia possibile predicare la verità o falsità di ogni enunciato, si ha il paradosso del mentitore. Dunque per parlare della verità di un enunciato del linguaggio oggetto è necessario "spostarsi" nel metalinguaggio, che deve essere strettamente "più potente" del linguaggio studiato.

Partiamo con una considerazione di carattere linguistico: se ad un programma in Pascal si fa leggere la parola "elefante" questa viene interpretata dal programma come una stringa di otto lettere. In sostanza il programma sarà in grado di leggere tale parola se prima è stato definito un Array of Char di (almeno) otto elementi. In caso contrario il calcolatore segnala un errore di tipo (se l'array non è di caratteri) o di lunghezza (non prenderà, in questo caso, tutte le lettere che compongono la parola assegnata). Quindi l'interpretazione che il calcolatore (o meglio il programma) dà della parola elefante è puramente linguistica: per lui il termine "elefante" è assimilabile a qualunque altro termine di otto lettere. Ben diverso l'atteggiamento di una persona; ma non tutte le persone interpretano tale parola allo stesso modo. Se a leggerla è ad esempio un editor di una casa editrice (cioè colui che corregge i manoscritti come romanzi, racconti, ecc. già destinati dalla casa editrice alla pubblicazione), si preoccuperà di vedere come si inserisce nel conteso di una frase e se i verbi, gli aggettivi e gli articoli sono concordati col sostantivo. Un bambino invece penserà istintivamente al mammifero terrestre più grande con una lunga proboscide. Se poi l'interlocutore fosse un africano o un indiano darebbe al termine un'interpretazione più precisa: per il primo sarebbe un mammifero con la proboscide e con grandi orecchie; per il secondo avrebbe invece piccole orecchie, per cui la frase "L'elefante ha le orecchie larghe" (una volta stabilito cosa si intende per "larghe", ad esempio tramite il rapporto tra la superficie delle orecchie e quella corporea) avrebbe, per i due, valori di verità diversi. Se poi l'interlocutore fosse stato un abitante dell'attuale Italia prima della venuta di Pirro il termine e la frase non avrebbero avuto significato, in quanto il termine "elefante" non avrebbe trovato nessuna interpretazione. Vediamo di riassumere quanto espresso:
a) il calcolatore dà del termine un'interpretazione puramente linguistica: riconosce solo le lettere per quello che devono essere;
b) l'editor si preoccupa del termine e della frase in modo puramente sintattico: ne valuta la correttezza;

c) l'indiano, l'africano, l'italico interpretano il termine in funzione della loro realtà ed in base a questa interpretazione riescono a stabilire se la frase è vera, falsa o priva di significato: siamo in un ambito decisamente semantico.
Le stesse considerazioni possono valere anche per termini privi di significato, ma morfologicamente corretti come il termine *estio* visto nella prima parte.
Il passo successivo è ovviamente quello di stabilire cosa significa "interpretare" da un punto di vista logico-matematico. In modo intuitivo risulta abbastanza semplice pensare che debba esistere una funzione che va dall'insieme dei termini a disposizione al mondo considerato, intendendo come mondo una realtà concreta, funzione che mi permetta di poter assegnare ad ogni termine uno specifico significato. Ad esempio nel nostro caso questo è possibile se come mondi si considerano l'Africa o l'India, cioè contesti in cui al termine elefante riesco ad associare un'entità reale; in questi contesti, e solo in questi contesti, è possibile stabilire la verità di proposizioni tipo quella proposta. La cosa da osservare e che risulta essere il cardine di tutte le considerazioni che faremo successivamente è che per parlare di verità devo uscire dall'ambito linguistico in cui la frase "l'elefante ha le orecchie larghe", costruita con le regole della sintassi italiana, risulta comunque corretta, anche per chi non sa cosa sia un elefante.
Facciamo un altro esempio. Considera le tre frasi seguenti:

Roma è la capitale d'Italia
Roma è bisillaba
Roma è il centro del mondo
Quesa frase cotiene quatro errori

Queste quattro frasi dicono cose vere? Consideriamo le prime tre. Se interpretiamo la parola Roma sempre allo stesso modo, chiaramente no. D'altra parte tutte e tre hanno un 'fondo di verità'; di solito si dice che la loro verità "dipende dal contesto". In questo senso, nella prima frase si pensa a Roma come città; nella seconda frase si pensa a Roma come parola: si valuta (semanticamente) una proprietà (sintattica) della parola 'Roma'. A rigore tale frase andrebbe scritta mettendo in evidenza, con apici, questa particolare lettura della parola Roma: *'Roma' è bisillaba* . La terza frase è per certi versi la più strana, tra le prime tre: sintatticamente è corretta, ma è vera? Letta "alla lettera" chiaramente no, in quanto Roma non si trova al centro della Terra (pensando alla Terra come mondo); ma se la si legge in senso metaforico, soprattutto pensando al tempo dei Romani o al Rinascimento non è difficile riconoscerle una "verità". Questo è tipico delle metafore, delle metonimie e in genere di tutte le figure retoriche: utilizzare un termine in modo simbolico, al di là del suo significato intrinseco. Affinché questo uso possa però fornire informazioni, è necessario che gli interlocutori abbiano non solo lo stesso linguaggio e lo stesso contesto in cui interpretare tale linguaggio, ma anche la stessa formazione culturale che permetta loro di leggere "tra le righe". Pensa allo sconcerto di una persona che interpretasse alla lettera frasi del tipo: 'La corona visiterà i territori alluvionati' oppure 'Il cuore ha delle ragioni che la ragione non ha'!
Un'ultima considerazione: se non esistesse un aspetto semantico nel linguaggio, non solo le persone non potrebbero comunicare, ma non potrebbero neppure mentire!
Sulla quarta frase cosa diresti? Se conti il numero degli errori ti accorgerai che ci sono tre errori di morfologia ed uno di semantica, poiché appunto gli errori sono tre; ma se c'è anche l'errore semantico, gli errori diventerebbero quattro: scomparirebbe quindi l'errore semantico per cui gli errori si ridurrebbero a tre. Ma allora? Questa frase dovrebbe ricordarti il paradosso del mentitore, cioè è una frase *autoreferente*: tutto il problema è legato al fatto che l'asserzione (quattro errori) si riferisce a una proprietà della frase stessa.
Ma formalmente come trattare la semantica? La semantica proposta da Tarski si basa su un'idea tutto sommato semplice: se nel linguaggio i vari simboli (variabili, costanti individuali, costanti predicative, ecc.) hanno un significato puramente formale, si tratta di interpretare tali simboli in un insieme, facendo loro assumere una connotazione «reale» e dicendo successivamente cosa significa dire che una fbf contenente un connettivo o un quantificatore è «vera». Osserviamo innanzi tutto alcune cose che distinguono il nostro linguaggio dal metalinguaggio, o linguaggio naturale, dal

punto di vista semantico. Il rigore e la non ambiguità implicite nelle fbf da noi costruite comporta che di esse sia possibile dare un giudizio solo in termini di vero o falso. Se ad esempio si afferma che “Paolo è buono”, è difficile poter dire, in modo oggettivo, se questa frase è vera o falsa; d’altra parte la sua negazione non comporta la cattiveria del tipo in questione. Ma come definire la verità? Già da quest’esempio si vede come si dovrebbe avere un concetto assoluto di bontà, al di sopra della soggettività del contingente. D’altra parte se si potesse dare all’interno del linguaggio stesso un concetto di verità si ricadrebbe nel paradosso del mentitore. Ci si deve quindi riferire ad una struttura esterna in cui poter stabilire la verità o falsità delle fbf interpretate.
In questo contesto ci limiteremo a dare una idea di massima di come tale costruzione venga fatta; successivamente passeremo alla semantica algebrica in cui ritroverai i concetti semantici (tavole di verità) già appresi al biennio.

3.1 INTERPETAZIONI, VERITA’ E MODELLI

Innanzi tutto occorre partire con l’interpretare il linguaggio $\mathscr{L}$ in un opportuno mondo

D 14. Una interpretazione M del linguaggio $\mathscr{L}$ è data da una coppia ordinata (D,g), essendo D un insieme non vuoto detto **dominio** e g una funzione così definita:
a) se c è una costante, g(c) è un elemento di D;
b) se P è un predicato n-ario, g(P) è un predicato n-ario di D.
c) se f è un simbolo funzionale n-ario, g(f) è una funzione da D^n a D.

La definizione precedente ci permette di dire che nel “mondo” D le costanti vengono interpretate come elementi di D, i predicati n-ari come predicati (n-ari) di D e le funzioni come funzioni in D. Per chiarirti meglio il senso della definizione, considera la seguente fbf
$\forall x(A(x)\rightarrow B(f(x,a),c))$
In tale fbf compaiono due predicati (A, unario, e B, binario), un simbolo funzionale binario f e due costanti individuali a e c. Tale formula, per quanto ci riguarda, ha un significato puramente formale; l’unica cosa che possiamo dire è relativa alla sua correttezza morfologica. Affinché tale fbf assuma un significato, occorre interpretarla in un mondo. Per fare questo occorre dare un significato ad A, B e f, e alle costanti a e c. Se per esempio prendiamo come dominio D l’insieme dei numeri naturali e interpretiamo il predicato A(x) con «x è un numero pari», B(x,y) con «x è multiplo di y», f con l’usuale prodotto tra numeri naturali, la costante a col numero 3 e la costante c col numero 2, l’interpretazione in N della fbf precedente diventa:
«ogni numero naturale pari moltiplicato per 3 è un multiplo di 2».
Osserva che la proposizione ottenuta fornisce una proprietà ‘vera’ in N; ma se cambi l’interpretazione dei predicati o delle costanti non è detto che la proposizione sia ancora ‘vera’: basta per esempio interpretare A(x) con «x è un numero dispari» lasciando inalterato il resto per ottenere una proposizione ‘falsa’ in N. Tutto questo per farti capire come i concetti di ‘vero’ e ‘falso’ non dipendano dalla fbf, ma da dove e da come tale fbf viene interpretata.
Abbiamo messo tra virgolette i termini vero e falso poiché, al di là di un loro significato intuitivo, di fatto non sono mai stati rigorosamente definiti. Per il momento è importante che risulti chiaro come se voglio parlare di verità di una proposizione questo è possibile in certi casi e non possibile in altri. Consideriamo come ulteriore esempio le seguenti coppie di frasi (in cui si vuole, tra l’altro, fare un parallelismo tra frasi del linguaggio naturale e frasi matematiche):

a) Dumbo è un elefante	4 è un numero naturale dispari
b) ....è un elefante	x è un numero naturale dispari
c) Tutti sono elefanti	Tutti i numeri naturali sono dispari
d) Esiste un elefante	Esiste un numero naturale dispari

E’ piuttosto ovvio affermare che le a) sono la prima vera e la seconda falsa, le c) false, le d) vere, mentre sulle frasi del tipo b) nulla si può dire: dipende da quello che si scrive al posto dei puntini o

che si mette al posto della x. Sembra quindi che si possa parlare di verità o falsità di una proposizione solo se questa non ha variabili libere. Non è difficile trovare proposizioni che possano smentire tale affermazione (ad esempio la proposizione “x è un numero o x non è un numero”), ma in generale questo problema per frasi aperte si pone. Ma perché delle frasi a), c), d) si può dire se sono vere o false? Non certo per motivi sintattici, ma perché riusciamo ad interpretarle, esiste cioè un mondo in cui hanno senso. In questo caso, contrariamente all’esempio della fbf precedente, è la proposizione che ci fa pensare al mondo in cui interpretare la frase per stabilirne la verità.
Le frasi del tipo b) ti sono note come frasi aperte e le hai usate ad esempio per costruire gli insiemi, visti come le collezioni degli elementi che le rendono vere. A tale proposito dovrebbe allora risultarti chiaro come anche la teoria degli insiemi diventi una interpretazione del linguaggio della logica (concetto quindi semantico) e non una giustificazione delle scelte fatte dalla logica stessa!
Per tali frasi non si riesce a dire se sono ‘vere’ o ‘false’ se non dopo aver sostituito alla variabile un elemento. Sembra quindi che il concetto di verità o falsità sia prerogativa degli enunciati; questo è espresso nella seguente definizione che sarà, ancora una volta, di tipo ricorsivo:

D 15. a) Dato un enunciato A e un’interpretazione M=(D,g) diremo che **A è vero in M (o che M è modello di A)** e scriveremo $\models_M A$ nei seguenti casi:
1) Se $A=P(t_1, t_2,...t_n)$ è una formula atomica, essendo P un predicato n-ario, M è modello di A se e solo se i termini della fbf atomica interpretata sono in relazione secondo l’interpretazione del predicato in D;
2) Se $A=\neg B$ allora A è vero in M se e solo se B **non** è vero in M (osserva che anche B è un enunciato);
3) Se $A=B\wedge C$ allora A è vero in M se e solo se B è vero in M **e** C è vero in M (qui e nel seguito anche B e C sono enunciati);
4) Se $A=B\vee C$ allora A è vero in M se e solo se B è vero in M **o** C è vero in M;
5) Se $A=B\rightarrow C$ allora A è vero in M se e solo se B è **non** vero in M **o** C è vero in M;
6) Se $A=B\leftrightarrow C$ allora A è vero in M se e solo se B è vero in M **se e solo se** C è vero in M;
7) Se $A=\exists x B(x)$ allora A è vero in M se e solo se **esiste** una costante c di D tale che B(c) è vero in M;
8) Se $A=\forall x B(x)$ allora A è vero in M se e solo se **per ogni** costante c di D, B(c) è vero in M;
b) Un enunciato A si dice **falso in M** se e solo se A **non** è vero in M;
c) Se Γ è un insieme di enunciati si dice che **M è modello di Γ** e lo indicheremo con $\models_M \Gamma$ se e solo se M è modello di ogni enunciato di Γ. In particolare se Γ è l’insieme degli assiomi di una teoria T, diremo che **M è modello di T;**
d) Si dice che un enunciato è **valido** e lo indicheremo con $\models A$ se e solo se è vero in ogni interpretazione del linguaggio $\mathcal{L}$.

Finalmente siamo incappati nel concetto di verità di cui tanto abbiamo sentito l’esigenza.
Prima di procedere riteniamo che la definizione precedente meriti alcune osservazioni.
Il punto 1) si riferisce al concetto di verità delle formule atomiche.
I punti 2)-6) sono piuttosto ovvi e si riferiscono ai vari connettivi. Consideriamo per esempio il punto 3: in termini intuitivi, cosa significa dire che in un certo mondo la frase «Andrea è uno studente e Andrea guida la moto» è vera? Significa che se fornisco un’interpretazione per i termini ‘Andrea’, ‘studente’ e per il concetto ‘guidare la moto’ affinché la frase sia vera, deve risultare vero che Andrea è uno studente e contemporaneamente che Andrea guida la moto. Entrambe queste proposizioni possono essere vere per un particolare Andrea, mentre possono non esserlo (almeno una delle due) per un altro Andrea. Ti invitiamo a cercare, tra le tue conoscenze due persone che si chiamino Andrea e che rendano vera o falsa la frase precedente.
In queste definizioni, si è messo in evidenza in grassetto l’elemento che caratterizza la verità (ad esempio il **non** nella 2); ciò che è importante sottolineare è come il connettivo (concetto linguistico)

venga tradotto in ambito semantico da una locuzione metalinguistica (non, e, o, ecc.) e questo per sottolineare ancora una volta il fatto di come il concetto di verità possa essere dato solo con un metalinguaggio più potente del linguaggio oggetto ed in ogni caso al suo esterno. La stessa scrittura $\models_M A$ è un'abbreviazione e come tale è un concetto metalinguistico.
Il punto 5) poteva essere espresso anche in questi termini, forse più intuitivi:
5') Se $A=B\rightarrow C$ allora A è vero in M se e solo se **se** B è vero in M **allora** C è vero in M.
La scelta fatta ha due motivazioni: a) ribadire il concetto di implicazione materiale così com'è inteso nella logica classica; b) fornire una definizione che possa più facilmente ricondurre alla (nota) tavola di verità dell'implicazione.
I punti 7 e 8 si riferiscono ai quantificatori ed anche in questo caso ritroviamo un concetto di per sé intuitivo. Dire che «tutti i numeri naturali moltiplicati per 0 danno 0» è vera, significa che se vado a sostituire alla variabile quantificata un numero qualunque, ma fissato, ottengo una proposizione vera; viceversa se la proposizione fosse quantificata esistenzialmente me ne basterebbe trovare uno solo. Così ad esempio la proposizione
«Data una retta r ed un punto P esiste una retta passante per P e perpendicolare ad r»
è vera nella geometria euclidea (cioè nel mondo D della geometria euclidea in cui i termini della proposizione vengono interpretati in modo usuale) poiché si riesce a trovare la retta che verifica la proposizione, fissati r e P; il fatto che tale retta sia unica è ininfluente per la verità della proposizione.
Per le fbf che non sono enunciati vale la seguente

D 16. Sia A una fbf. A è vera in M se e solo se la sua chiusura universale è vera in M.

Prima di parlare del concetto di validità facciamo un esempio per riassumere quanto detto.

Considera la fbf A: $\forall x\exists y(D(x,a)\rightarrow U(f(x,y),b))$
In questa formula compaiono due predicati binari (D e U), un simbolo funzionale binario (f), due costanti (a e b) e due variabili vincolate (x e y). Se vogliamo stabilire la verità o falsità della fbf proposta dobbiamo interpretare i termini che vi compaiono. Supponiamo di prendere come dominio D l'insieme dei numeri razionali, con $g(D(x,y))$='$x\neq y$', $g(U(x,y))$='$x=y$', $g(f(x,y))$='$x\bullet y$' (prodotto tra numeri razionali), $g(a)=0$ e $g(b)=1$. La fbf diventa allora $\forall x\exists y(x\neq 0\rightarrow x\bullet y=1)$. Tale formula esprime la proprietà che ogni numero razionale diverso da zero ha l'inverso rispetto al prodotto. In questo caso non si può fare una verifica diretta della sua verità in Q in quanto il quantificatore universale presupporrebbe la verifica su tutti i numeri razionali non nulli. Per garantirne la verità dobbiamo fare allora una dimostrazione (sintattica) in Q. Questo non deve stupire: ciò che cerco è la verità di A in Q e quindi la giustificazione (in Q) della formula interpretata.
La fbf A non è però valida; se anziché prendere come dominio Q avessimo preso N tale fbf non sarebbe più stata vera, in quanto posto x=3, non esiste nessun y in N tale che 3y=1; quindi non tutte le costanti sostituite alla x soddisfano la fbf.

In generale per dimostrare che un enunciato quantificato universalmente è vero in un modello o che un enunciato quantificato esistenzialmente è falso in un modello, occorre fare una dimostrazione di carattere generale all'interno del modello; per dimostrare che un enunciato quantificato universalmente è falso in un modello o che un enunciato quantificato esistenzialmente è vero in un modello occorre trovare un elemento che renda rispettivamente falso il primo (o vera la sua negazione) e vero il secondo.

Dalla definizione precedente emerge un altro fatto importante: il concetto di verità è un concetto relativo. La **verità assoluta** è espressa dalla **validità**. Per chiarire meglio la differenza fra verità e validità possiamo riprendere una delle frasi considerate all'inizio di questo paragrafo: "L'elefante ha le orecchie larghe". Alla luce di quanto detto a proposito dell'elefante indiano e di quello africano, questa proposizione risulta vera nel modello “Africa”, ma non valida, in quanto risulta falsa nel modello “India”. Invece la frase “La neve è bianca”, pensando alla Terra come l’insieme dei “mondi” in cui è interpretabile, è valida in quanto in tutti i modelli terrestri la neve è ‘bianca’.

La semantica di Tarski ci ha risolto il problema della verità fornendo un metodo matematico (e non filosofico!) per definirla e quindi per operare con essa. Sarebbe opportuno tu ne apprezzassi l’eleganza, soprattutto se hai cercato qualche volta di dare una risposta al problema di cosa voglia dire “verità”. Ci sono due ‘piccoli’ nei in questa definizione di cui ti diamo cenno semplicemente per farti capire come le insidie in matematica siano sempre presenti: uno riguarda il fatto che, al solito, si tratta di una definizione ricorsiva, una definizione cioè che usa metodi algebrici; l’altro il fatto che fa uso pesantemente degli insiemi. Ma gli insiemi esistono? E l’aritmetica è coerente? Dopo quello che è stato detto sino ad ora, ti dovrebbe venire il dubbio che le risposte siano tutt’altro che scontate. Inoltre, così com’è formulata, sembra poco operativa per stabilire non solo la verità o falsità di una fbf, ma anche (scopo del nostro lavoro) la correttezza di un ragionamento. E’ quanto affronteremo nella parte successiva.

3.2 VALUTAZIONI.

La parte precedente ti avrà, supponiamo, creato qualche difficoltà; le cose trattate, in effetti, non sono semplici. Soprattutto il dubbio che potrebbe esserti venuto è come “operare” praticamente col concetto di “verità”. Se il nostro scopo era quello di valutare la correttezza di un ragionamento, gli strumenti a disposizione sembrano scarsamente indicati per farlo. D’altro canto al biennio hai imparato ad operare con le tavole di verità che ti permettevano di “fare dei conti” e stabilire, attraverso un risultato, un criterio di verità per una frase. Come si lega quello che ti abbiamo presentato in questo contesto con quanto hai precedentemente imparato? L’idea è che, una volta interpretato un linguaggio in un mondo M, venga assegnata ad ogni fbf interpretata un valore di un insieme in cui si possano eseguire delle operazioni. E’ quello che faremo in questa parte, in cui di fatto algebrizzeremo la semantica, ritrovando risultati già noti come le tavole di verità.
Consideriamo innanzi tutto la seguente struttura algebrica

$\mathcal{B}$=(B={0,1}, ~,∪,∩) dove

~ è un’operazione unaria, mentre ∪, ∩ sono operazioni binarie; l’elemento 1 lo chiameremo “vero”, mentre l’elemento 0 lo chiameremo “falso”. Se si parla di operazioni, occorre indicare come operano sugli elementi di {0,1} fornendo ad esempio le tavole pitagoriche di tali operazioni:

~	
0	1
1	0

∪	0	1
0	0	1
1	1	1

∩	0	1
0	0	0
1	0	1

Puoi facilmente verificare che $\mathcal{B}$ è **un’algebra di Boole.**

Oltre a quelle introdotte nella struttura presentata, consideriamo altre due operazioni, definite tramite le precedenti:

A⇒B=(~A)∪B A⇔B=(A∩B)∪((~A)∩(~B))

Ti invitiamo a verificare che le tavole pitagoriche di queste due nuove operazioni sono date da:

⇒	0	1
0	1	1
1	0	1

⇔	0	1
0	1	0
1	0	1

Osserva che l'operazione $\Rightarrow$ non è commutativa; la tabella è stata costruita prendendo come primo elemento (A) il valore sulla colonna e come secondo elemento (B) il valore sulla riga (vedi freccia).
Non dovrebbe esserti difficile riconoscere nelle tavole pitagoriche proposte le tavole di verità dei connettivi, leggendo al posto di 0 e 1 rispettivamente F e V.
Risulta piuttosto evidente come il fatto di interpretare le fbf in un'algebra di Boole e qui valutarle con le tavole pitagoriche delle rispettive operazioni, farà dipendere il concetto di verità da tali operazioni. Non è superfluo allora osservare che tali tavole sono fatte in un'ottica classica, come si deduce dalla definizione (e dalla rispettiva tavola pitagorica) dell'operazione $\Rightarrow$: semanticamente questo significa che nel nostro modo di definire la verità o una proposizione è vera o è vera la sua negazione.
A questo punto rimane da vedere come vengono (re)intepretate le fbf da D a $\mathcal{B}$ attraverso una funzione detta **valutazione** (e che indicheremo con v) che opera sugli elementi di D nel seguente modo:
a) ad ogni formula atomica viene associato 0 oppure 1;
b) l'interpretazione dei connettivi è ovvia: $\neg$ viene interpretato in $\sim$, $\wedge$ in $\cap$, $\vee$ in $\cup$, $\rightarrow$ in $\Rightarrow$ e infine $\leftrightarrow$ in $\Leftrightarrow$.
c) se $A=\forall xB(x)$ allora $v(A)=1$ se e solo se per ogni costante c di D $v(B(c))=1$;
d) se $A=\exists xB(x)$, allora $v(A)=1$ se se solo se esiste una costante c di D tale che $v(B(c))=1$.

La cosa nuova in apparenza riguarda la valutazione dei quantificatori; ma il punto c afferma in sostanza che un enunciato risulta vero nell'algebra di Boole (cioè vale 1) se risultano vere tutte le fbf ottenute sostituendo alla x tutte le costanti di D e in modo analogo per il quantificatore esistenziale. Come vedi, niente di nuovo rispetto alla definizione di modello, se non per il fatto che in questo contesto si possono anche fare....i conti, per stabilire la verità di un enunciato interpretato in un modello.
Vediamo di chiarire con un esempio.
Consideriamo l'enunciato $A=\forall x(P(x,a)\rightarrow Q(f(x,a),a))$. Interpretiamo tale enunciato in $M=(D,g)$ dove D=N, e la funzione g è tale da interpretare P in >, Q in $\geq$, f nel prodotto in N e a in 2.
L'enunciato precedente tradurrebbe allora la proposizione
"Comunque si prenda un numero (naturale) maggiore di 2, il suo prodotto con 2 è maggiore o uguale a 2".
Questa esprime una affermazione vera in N; ma come dimostrarlo?
Seguendo la definizione di verità per un enunciato, dobbiamo dimostrare che per ogni numero naturale n $v(n>2\rightarrow n\bullet 2\geq 2)$.
La dimostrazione può essere fatta utilizzando le leggi di monotonia sui numeri naturali (poichè n>2 allora n>1; moltiplicando ambo i membri per 2 si ottiene il conseguente dell'implicazione) e deve essere fatta in generale.
Se invece f fosse stato interpretato nel Massimo Comun Divisore, l'enunciato sarebbe falso poiché posto x=3 si avrebbe
$v(3>2\rightarrow MCD(3,2)\geq 2) = v(3>2)\Rightarrow v(MCD(3,2)\geq 2) = 1\Rightarrow 0 = 0$.
Vorremmo che tu prestassi bene attenzione ai passaggi fatti: **prima** abbiamo interpretato l'enunciato (formale) nel dominio N e **poi** abbiamo valutato nell'algebra di Boole $\mathcal{B}$ tale enunciato.

IN PRATICA.
1) Considera la fbf $A=E\wedge C\rightarrow F\vee\neg E$, in cui supponiamo E, C, F formule atomiche. Interpretiamo tale formula in M=(D,g) e sia v una valutazione. Stiamo operando in modo generico; allora $v(A)=v(E)\cap v(C)\Rightarrow v(F)\cup\sim v(E)$ (anche sulle operazioni nell'algebra di Boole usiamo la stessa convenzione sulle priorità vista per i connettivi). In sostanza valutiamo le fbf E, C, F con la valutazione v: otterremo degli zero o degli uno. Eseguiamo poi le operazioni indicate; il risultato ottenuto fornirà il valore di A. Poiché ogni valutazione può assumere per ciascuna fbf due valori, in totale avremo $2^3=8$ valutazioni possibili per la fbf A, ritrovando così la tavola di verità di A:

	v(E)	v(C)	v(D)	~v(E)	v(E)∩v(C)	v(F)∪~v(E)	v(A)
v_1	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	0	1	1	0	1	1
v_3	0	1	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	0	0	0	1
v_5	0	1	1	1	0	1	1
v_6	1	0	1	0	0	1	1
v_7	1	1	0	0	1	0	0
v_8	1	1	1	0	1	1	1

Abitualmente, per semplificare la scrittura, si omette v sulle fbf, "confondendo" la fbf con la sua valutazione, cosa che nel seguito faremo spesso anche noi. Quando lo fai (o lo vedi fare), ricordati sempre che stai facendo una cosa comoda, ma impropria.
2) Costruisci le tavole di verità degli assiomi logici.

Svolgendo il punto 2) dell'IN PRATICA precedente, ti sarai accorto che gli assiomi logici hanno tavole di verità il cui risultato finale è sempre 1, qualunque sia la *valutazione* (attenzione!) applicata. Parliamo di valutazione perché per valutarli non ti sei rifatto ad un modello particolare, ma, pensando ad una generica interpretazione, tutte le valutazioni li soddisfacevano. In sostanza un enunciato A è una tautologia se e solo se per ogni interpretazione M e ogni valutazione v, v(A)=1 (e questo è un altro modo per dire che è valida) ed è una contraddizione se e solo se per ogni interpretazione M e ogni valutazione v v(A)=0. Sarà un caso che ogni assioma sia valido? E cosa succederà per i teoremi logici? Ti invitiamo a provarlo sui teoremi logici di T1 e T2.

Quanto osservato in precedenza a proposito delle valutazioni ci permette di dare la seguente definizione, utile per il confronto semantico di fbf:

D 17. Due enunciati A e B sono **tautologicamente equivalenti** e lo indicheremo con $A|\!=\!|B$ se e solo se ogni modello di A è modello di B e viceversa.

Consideriamo una interpretazione M=(D,g) ed indichiamo con A' e B' le fbf interpretate in M; quanto espresso dalla definizione precedente può essere riscritto come segue: A e B sono tautologicamente equivalenti se e solo se per ogni valutazione v, v(A')=v(B'); questo può essere anche espresso dicendo che v(A')=1 se e solo se v(B')=1, ritrovando così il concetto di equivalenza tautologica che hai visto con le tavole di verità.
Infine

T 6. La relazione $|\!=\!|$ nell'insieme degli enunciati è di equivalenza.

IN PRATICA.

1) Cosa significa che la seguente proposizione «Non tutti i numeri naturali sono divisibili per 3» è vera? Significa che è possibile trovare un numero naturale (per esempio 4) non divisibile per 3. La proposizione precedente risulta quindi equivalente alla seguente: «Esistono numeri naturali non divisibili per 3». Quanto detto rappresenta una proprietà di carattere generale evidenziata dalla seguente equivalenza tautologica, relativa ai quantificatori:

$$\neg\forall x A(x) \models\mid \exists x \neg A(x)$$

(che potremmo leggere «“non per ogni x” equivale a “esiste un x tale che non”»)

Dimostrazione. Sia M=(D,g) un modello di $\neg\forall x A(x)$, cioè $\models_M \neg\forall x A(x)$. Allora $\models_M \neg\forall x A(x)$ *se e solo se* (non $\models_M \forall x A(x)$) *se e solo se* (non per ogni elemento c di D $\models_M A(c)$) *se e solo se* (esiste un elemento c di D tale che non $\models_M A(C)$) *se e solo se* (esiste un elemento c di D tale che $\models_M \neg A(c)$) *se e solo se* $\models_M \exists x \neg A(x)$.

Osserva, nella dimostrazione precedente l'uso metalinguistico di termini come 'se e solo se', 'esiste', 'per ogni'.

2) Dimostra che $\neg\exists x A(x) \models\mid \forall x \neg A(x)$

(cioè «“non esiste un x tale che” equivale a “per ogni x non”»)

e trova qualche proposizione come esempio di tale equivalenza.

3) Attraverso il concetto di equivalenza tautologica verifica le seguenti proprietà dei connettivi:

	CONNETTIVI $\wedge$ e $\vee$	
CONNETTIVO $\wedge$		CONNETTIVO $\vee$
1. $A\wedge B \models\mid B\wedge A$	commutativa	6. $A\vee B \models\mid B\vee A$
2. $(A\wedge B)\wedge C \models\mid A\wedge(B\wedge C)$	associativa	7. $(A\vee B)\vee C \models\mid A\vee(B\vee C)$
3. $A\wedge A \models\mid A$	idempotenza	8. $A\vee A \models\mid A$
4. $(A\wedge B)\vee C \models\mid (A\vee C)\wedge(B\vee C)$	distributive	9.$(A\vee B)\wedge C \models\mid (A\wedge C)\vee(B\wedge C)$
5. $(A\wedge B)\vee A \models\mid A$		10 $(A\vee B)\wedge A \models\mid A$

CONNETTIVO $\neg$

11. $\neg\neg A \models\mid A$

12. $\neg(A\wedge B) \models\mid \neg A\vee\neg B$ Leggi di De Morgan 13. $\neg(A\vee B) \models\mid \neg A\wedge\neg B$

CONNETTIVI $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

14. $A\rightarrow B \models\mid \neg A\vee B$ 15. $A\leftrightarrow B \models\mid (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

Con le interpretazioni semantiche è ora possibile giustificare il fatto che il quantificatore universale “regga” l'implicazione, mentre il quantificatore esistenziale la congiunzione.

Partiamo dal quantificatore universale, la cui struttura generale è della forma $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$.

La proprietà A(x) definisce in un certo senso il dominio della proposizione, l'insieme degli elementi cioè per cui ha senso porsi il problema che sia verificata la proprietà B(x). Gli elementi che non verificano A(x) rendono automaticamente vera la proposizione, in quanto, com'è noto, se l'antecedente di un'implicazione è falso, la proposizione risulta vera. Questo inoltre giustifica la presenza del connettivo $\rightarrow$ anziché del connettivo $\wedge$ come si potrebbe forse pensare.

Se per esempio si considera la proposizione "In ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto", formalizzata da una fbf del tipo $\forall x(T(x)\rightarrow S(x,\pi))$ con (abbastanza) ovvio significato dei termini, e la si interpreta nella geometria euclidea si osserva che un quadrilatero non pregiudica la verità dell'enunciato, come invece si avrebbe col connettivo $\wedge$.
Per quanto riguarda il quantificatore esistenziale considera la seguente proposizione ed interpretala in R: "Esiste un numero intero reciproco di 5".
Se la sua formalizzazione fosse $\exists x(I(x)\rightarrow R(x,5))$, questa risulterebbe verificata per esempio da $\sqrt{2}$, rendendo tale valore falso l'antecedente dell'implicazione (e quindi vera la proposizione). Questo esempio ti dovrebbe far capire come mai un enunciato quantificato col quantificatore esistenziale non possa avere una struttura implicativa poiché in questo caso deve essere esplicitamente verificata la proprietà che definisce gli enti coinvolti. Il connettivo che lega le due proposizioni non può quindi che essere la congiunzione logica.
La struttura generale di un enunciato quantificato esistenzialmente è quindi la seguente
$\exists x(A(x)\wedge B(x))$.
Anche col quantificatore esistenziale c'è in genere una proposizione che definisce l'ambito (il dominio) in cui sono presi i termini. Negli enunciati che coinvolgono insiemi numerici si tende (in modo improprio) a collegare l'insieme d'appartenenza esplicitamente alla variabile nel quantificatore. Ad esempio
$\forall x\in N(P(x)\vee D(x))$ sta per "Ogni numero naturale è pari o dispari", mentre
$\exists x\in N(D(x,5))$ sta per "Esiste un numero naturale divisibile per 5".
Tieni conto che, in queste scritture c'è già, di fatto, una interpretazione semantica delle fbf.
In base a quanto visto in precedenza e alle proprietà dei connettivi si può infine concludere che
(i) $\neg\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\models\!\!=\!|\exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$ (ii)$\neg\exists x(A(x)\wedge B(x)\models\!\!=\!|\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x))$.
Prova tu a dare qualche esempio linguistico che giustifichi quanto espresso da (i) e (ii).

3.2. SEMANTICA E RAGIONAMENTI

Una volta introdotto il concetto di verità e aver dato attraverso un'algebra di Boole un mondo in cui operare con tale concetto dovremmo essere finalmente in grado di valutare un ragionamento.
In generale come si presenta un ragionamento? Ci sono alcune premesse e c'è una conclusione: il ragionamento è corretto se la conclusione è conseguenza delle premesse. Potremmo allora procedere con una deduzione: vedere cioè in termini sintattici quali conclusioni si possono dedurre dalle premesse e confrontare i risultati ottenuti con la conclusione assegnata. A parte le difficoltà che hai visto intrinseche nelle dimostrazioni formali, c'è un altro aspetto da non trascurare: operando in modo deduttivo, si ottengono informazioni in più rispetto alle richieste, con notevole dispendio di energia (un calcolatore ne sa qualcosa...) non sfruttando, per contro, delle informazioni che già si hanno (la conclusione assegnata). Prima di procedere dobbiamo allora dire cosa si intende, dal punto di vista semantico, quando si dice che una proposizione è vera a partire da certe premesse. In pratica si tratta di stabilire un concetto di verità condizionata e non una verità assoluta. Diamo al proposito la seguente

D 18. Sia Γ un insieme di enunciati e sia A un enunciato.
A è **conseguenza tautologica** di Γ (in simboli $\Gamma\models A$) se ogni modello di Γ è modello di A.

Particolarmente importante per i nostri scopi risulta essere il seguente

T 7. (Teorema di conseguenza tautologica)
Sia Γ un insieme di enunciati e siano A e B enunciati.
$\Gamma,A\models B$ se e solo se $\Gamma\models A\rightarrow B$. In particolare, $A\models B$ se e solo se $\models A\rightarrow B$.

Il teorema T7 ci permette di rispondere alla domanda che ci siamo posti in precedenza: una fbf è vera a partire da certe premesse se è una tautologia la fbf formata da un'implicazione avente come antecedente la congiunzione delle premesse e come conseguente la fbf stessa.
Viceversa è possibile "smontare" una fbf in cui il connettivo principale è un'implicazione portando l'antecedente tra le premesse. Vedremo come procedere nei due modi. E' comunque utile osservare come il Teorema di conseguenza tautologica permetta di preoccuparsi della verità del conseguente di un'implicazione *a condizione* che l'antecedente sia vero. Come per il teorema di deduzione, anche in questo caso l'implicazione materiale si avvicina più ad un concetto intuitivo di implicazione.

IN PRATICA.
Consideriamo i seguenti ragionamenti e valutiamone la correttezza:
a) Se compro la motocicletta, non posso comprare una radio. Se non compro la radio, non posso sentire le trasmissioni sportive. Quindi se compro la motocicletta, non posso sentire le trasmissioni sportive.
b) Qualche uomo è astronauta. Tutti gli astronauti vanno sulla Luna. Quindi qualche uomo va sulla Luna.
c) Esiste un alunno biondo. Esiste un alunno diligente. Quindi esiste un alunno biondo e diligente.
d) Un triangolo isoscele ha i lati uguali. Un triangolo isoscele ha gli angoli alla base uguali. Il triangolo ABC non ha angoli uguali. Quindi esiste un triangolo non isoscele con due lati uguali.
Valutiamo a): innanzi tutto occorre formalizzare le proposizioni che vi compaiono. Introduciamo i seguenti predicati:
$C(x,y)$='x compra y' $A(x,y)$='x ascolta y'
e le seguenti costanti individuali:
i=io   m=motocicletta   r=radio   t=trasmissioni sportive.
In modo formale, indicando con Γ l'insieme delle premesse e con A la conclusione, si avrebbe:
$\Gamma=\{C(i,m)\to\neg C(i,r), \neg C(i,r)\to\neg A(i,t)\}$ $A=C(i,m)\to\neg A(i,t)$
Per verificare la correttezza del ragionamento si potrebbe costruire la tavola di verità della fbf
$(C(i,m)\to\neg C(i,r)\wedge(\neg C(i,r)\to\neg A(i,t))\to(C(i,m)\to\neg A(i,t))$
e vedere se si tratta di una tautologia. Poiché sono coinvolte cinque formule atomiche, dovremmo considerare $2^5=32$ valutazioni; troppe.
Si può però procedere in altro modo. Il teorema di conseguenza tautologica permette di "portare" la fbf $C(i,m)$ tra le premesse per cui si tratta di verificare se
$C(i,m)\to\neg C(i,r), \neg C(i,r)\to\neg A(i,t), C(i,m) \models \neg A(i,t)$
(per comodità vengono omesse le parentesi graffe sugli elementi di Γ).
Sia quindi v una valutazione modello di $C(i,m)\to\neg C(i,r)$, $\neg C(i,r)\to\neg A(i,t)$, $C(i,m)$. Poichè $C(i,m)\to\neg C(i,r)$ è vera, essendo vero l'antecedente, è vero anche il conseguente, per cui $C(i,r)$ è falso. L'antecedente di $\neg C(i,r)\to\neg A(i,t)$ è vero ed essendo l'implicazione vera, allora $\neg A(i,t)$ è vero. Quindi ogni valutazione modello delle premesse è modello anche della conclusione.
Come vedi i valori di verità delle varie formule atomiche si trovano "a cascata". Per evidenziare questo, ti riscriviamo il ragionamento fatto mettendo in evidenza i livelli in cui si sono trovati i valori di verità: livelli inferiori si riferiscono a momenti successivi:

$C(i,m)\to\neg C(i,r), \neg C(i,r)\to\neg A(i,t)$, $C(i,m) \models \neg A(i,t)$

1   1   1

1

1

1

1

Le frecce indicano le derivazioni dei vari valori; in rosso si sono evidenziati la formula ed il valore che mostrano la correttezza del ragionamento.

Questo modo di procedere ti potrà sembrare complesso, ma con un po' d'esercizio dovrebbe risultarti più maneggevole. Vediamo gli esempi successivi in cui compaiono dei quantificatori.

Valutiamo b):

Abbiamo tre predicati (due unari e uno binario):

U(x)='x è uomo' A(x)= 'x è astronauta' A'(x,y)='x va su y'

ed una costante individuale:

l=Luna

$\Gamma=\{\forall x(A(x)\rightarrow A'(x,l)), \exists x(U(x)\wedge A(x)\}$ $A=\exists x(U(x)\wedge A'(x,l))$

Dobbiamo verificare se

$\forall x(A(x)\rightarrow A'(x,l)), \exists x(U(x)\wedge A(x)) \models \exists x(U(x)\wedge A'(x,l))$

Lavoriamo, come prima, sulle premesse. Sia v una valutazione modello di Γ.

Dire che v è modello di $\exists x(U(x)\wedge A(x))$, significa dire che esiste una costante a per cui $v(U(a)\wedge A(a))=1$; dire che v è modello di $\forall x(A(x)\rightarrow A'(x,l))$ significa che per ogni costante c, $v(A(c)\rightarrow A'(c,l))=1$; quindi in particolare $v(A(a)\rightarrow A'(a,l))=1$. Riprendiamo il metodo dei livelli sopra introdotto:

$\forall x(A(x)\rightarrow A'(x,l)), \exists x(U(x)\wedge A(x)) \models \exists x(U(x)\wedge A'(x,l))$

$A(c)\rightarrow A'(c,l)$ $U(a)\wedge A(a)$

$A(a)\rightarrow A'(a,l)$

1 1

1 1 1

1

Esiste quindi una costante (a) tale che $v(U(a)\wedge A'(a,l))=1$ poiché entrambe le formule atomiche hanno come modello v; per definizione di soddisfazione di una fbf quantificata esistenzialmente, si può concludere che $\Gamma\models A$ e quindi il ragionamento è corretto.

Valutiamo c):

Ci servono tre predicati unari:

A(x)='x è alunno' B(x)='x è biondo' D(x)='x è diligente'

$\Gamma=\{\exists x(A(x)\wedge B(x)), \exists x(A(x)\wedge D(x))\}$ $A=\exists x(A(x)\wedge B(x)\wedge D(x))$

$\exists x(A(x)\wedge B(x)), \exists x(A(x)\wedge D(x)) \models \exists x(A(x)\wedge B(x)\wedge D(x))$

Sia v una valutazione modello di Γ; allora è modello di $\exists x(A(x)\wedge B(x))$, cioè esiste una costante a per cui $v(A(a)\wedge B(a))=1$ ed esiste una costante b per cui $v(A(b)\wedge D(b))=1$. Col metodo a livelli:

$\exists x(A(x)\wedge B(x)), \exists x(A(x)\wedge D(x)) \models \exists x(A(x)\wedge B(x)\wedge D(x))$

$A(a)\wedge B(a)$ $A(b)\wedge D(b)$

1 1

1 1 1 1

Poiché però nulla si può dire su B(b) o su D(a) poiché a e b possono non coincidere, non si può concludere che A sia conseguenza tautologica di Γ, per cui il ragionamento è scorretto.

Valutiamo d)

Introduciamo i predicati e le costanti. Pur trattandosi di un ragionamento di tipo geometrico, a noi interessa, in questo contesto, l'aspetto logico. Usiamo quindi predicati che permettano di semplificare la scrittura, senza preoccuparsi troppo di una corretta formalizzazione geometrica.

I(x)='x è triangolo isoscele' L(x)='x ha i lati uguali' A(x)='x ha gli angoli alla base uguali'

t=triangolo ABC

$\Gamma=\{\forall x(I(x)\rightarrow L(x)), \forall x(I(x)\rightarrow A(x)), \neg A(t)\}$ $A=\exists x(\neg I(x)\wedge L(x))$

Si tratta di vedere se

$\forall x(I(x)\to L(x)),\ \forall x(I(x)\to A(x)),\ \neg A(t) \models \exists x(\neg I(x)\wedge L(x))$

$I(c)\to L(c)$ $\quad$ $I(k)\to A(k)$ $\quad$ per ogni costante c e ogni costante k

1

$I(t)\to L(t)$ $\quad$ $I(t)\to A(t)$ $\quad$ in particolare per c=t e k=t

1 $\quad$ 1 $\quad$ 0

0

0

0

1/0

Osservando i risultati in rosso si evidenzia che l'unico elemento di cui è garantita l'esistenza è t; ma poiché $v(\neg I(t))=1$, il valore di $v(\neg I(t)\wedge L(t))$ dipende da quello di $v(L(t))$ che può essere indifferentemente 0 o 1. Quindi il ragionamento non è corretto.

La difficoltà nella valutazione di un ragionamento è in generale nella partenza, dopo di che le cose dovrebbero venire a cascata. Ti forniamo di seguito un breve specchietto che potrebbe servirti da guida (indicativa) nella valutazione dei ragionamenti che ti si presenteranno.

a) Se nel ragionamento non compaiono fbf con quantificatori su tutta la fbf, si parte dalla soddisfacibilità di eventuali formule atomiche o congiunzioni di formule atomiche presenti nelle premesse.

> a')Se nelle condizioni precedenti relative ai quantificatori non ci sono premesse sotto forma di formule atomiche, ma la conclusione compare sotto forma di implicazione, si parte dal porre la soddisfacibilità dell'antecedente della conclusione (si utilizza il teorema di conseguenza tautologica)

b) Se nelle premesse compaiono fbf con quantificatori su tutta la fbf occorre prima passare alle costanti individuali (generica, se il quantificatore è universale, particolare se il quantificatore è esistenziale; osserva che la costante del quantificatore esistenziale condiziona quella del quantificatore universale) e poi procedere come sopra.

Come utile applicazione di quanto sino ad ora imparato, prova questo semplice, ma importante

T 8. Nelle regole d'inferenza la conclusione è conseguenza tautologica delle premesse.

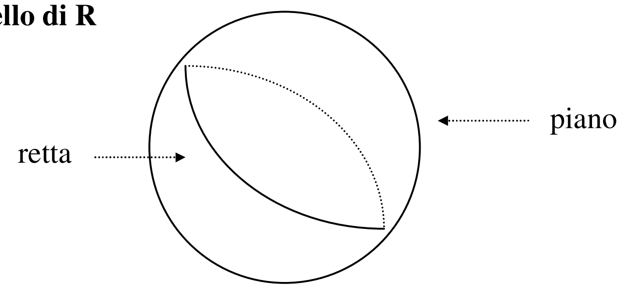
3.3. MODELLI E TEORIE

Dando la definizione di verità, si è parlato di verità rispetto ad un modello e di validità (verità rispetto a tutti i modelli). Di fatto abbiamo così introdotto un concetto di verità relativa (nel primo caso) e di verità assoluta (nel secondo caso). La distinzione non è banale, anche rispetto a questioni extramatematiche. In termini generali potremmo dire che una teoria "ha senso", da un punto di vista matematico, se è coerente o se ha un modello? E' più facile dimostrare la coerenza di una teoria o trovarne un modello? Forse dipende dall'ambito in cui ci si muove e forse dipende anche dagli scopi che ci prefiggiamo con quella teoria per cercare con più sollecitudine un risultato piuttosto che un altro. Vediamo di chiarire il concetto ripercorrendo il tragitto seguito.

Nella parte relativa alla sintassi della logica predicativa abbiamo esaminato dal punto di vista assiomatico alcuni giochi, la geometria euclidea e le geometrie non euclidee. Ma anche l'aritmetica, come visto, è una teoria, la stessa logica di cui ti abbiamo dato in questi anni alcune costruzioni la è. Così come risulta naturale non chiedersi se la dama "è vera" altrettanto naturalmente viene da chiedersi quale geometria o quale teoria economica sia "vera", ed in generale se sono vere le cose che fai in matematica. Il motivo è semplice: mentre si riconosce al gioco un aspetto semplicemente speculativo, le altre discipline rimandano ad una (presunta) realtà a cui si vuole fare riferimento. La semantica tarskiana ci dice semplicemente questo: se vuoi sapere se la tal teoria è vera, trovane un modello. Ma cos'è un modello, ad esempio, per la geometria? Posso semplicemente "guardare il

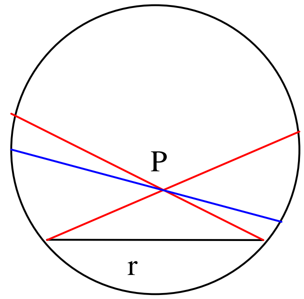
mondo” come facevano gli Egizi e i Greci e stabilire così la verità della geometria euclidea rispetto alle altre? Nella parte relativa alla sintassi abbiamo detto come le tre assiomatizzazioni portino a teorie (apparentemente) coerenti, ma questo, al di là delle difficoltà per dimostrare la coerenza di una teoria, come si lega con la verità? Poiché come sai nella realtà fisica non esistono i punti, le rette, i piani ecc., ma solo una grossolana approssimazione di questi concetti, il modello richiesto non può essere un modello fisico.
Prendiamo ad esempio la geometria di Riemann. Dobbiamo dare innanzi tutto un “mondo” in cui interpretare i termini ed una funzione che interpreti tali termini. Ebbene come mondo prendiamo lo spazio euclideo e consideriamo la seguente interpretazione:
il termine ‘piano’ è interpretato in superficie sferica
il termine ‘punto’ in coppia di punti euclidei diametralmente opposti su tale superficie
il termine ‘retta’ in cerchio massimo sulla sfera (un cerchio cioè ottenuto come intersezione della sfera con un piano passante per il suo centro)

Modello di R



Per poter affermare che queste interpretazioni sono legittime, occorre innanzi tutto provare che verificano gli altri assiomi della geometria (euclidea e non), cosa non difficile e che ti invitiamo a fare. In queste condizioni tale costruzione risulta essere modello della geometria rimaniana, nel senso che la proposizione
Per un punto (della superficie sferica) non è possibile tracciare alcun cerchio massimo che risulti parallelo (ad intersezione vuota) ad un cerchio massimo assegnato
è un teorema della geometria euclidea; quindi si potrebbe dire che **se** la geometria euclidea è coerente (parlando di teoremi dobbiamo riferirci ad un concetto sintattico) **allora** la geometria di Riemann ha un modello, cioè è vera.
Può sembrare strano che si mischino così aspetti sintattici con aspetti semantici. A parte il fatto che in seguito vedremo un teorema che lega i due concetti, questa cosa non deve stupire più di tanto: per la geometria di Riemann, vista come teoria, la geometria euclidea diventa una meta-teoria. Il problema della coerenza è interno alla geometria euclidea, mentre quello di verità viene posto all’esterno della geometria rimaniana attraverso un modello in cui interpretarla.
Allo stesso modo si può costruire un modello euclideo per la geometria di Lobacevskij in questo modo:
il termine ‘piano’ è interpretato in cerchio
il termine ‘punto’ in punto euclideo in tali cerchi
il termine ‘retta’ in corda
Tale costruzione risulta essere modello della geometria di Lobacevskij (mostra ancora una volta che sono verificati gli altri assiomi) nel senso che la proposizione
Per un punto P (del cerchio) è possibile tracciare due rette che risultino parallele (cioè che si incontrano con la retta data su un punto della circonferenza) ad una retta assegnata r
è un teorema della geometria euclidea. Anche in questo caso si possono ripetere tutte le considerazioni fatte in precedenza.

Modello di L



In rosso sono evidenziate le rette passanti per P e parallele ad r; in blu una delle rette iperparallele.

In generale potremmo dire quindi che **se** la geometria euclidea è coerente **allora** le geometrie non euclidee hanno un modello, cioè sono vere. La cosa indubbiamente più sorprendente è che le varie geometrie, nate come negazione del postulato caratterizzante la geometria euclidea, siano giustificate proprio dalla geometria euclidea quando il buon senso farebbe pensare ad una contrapposizione netta tra queste tre teorie: logica e buon senso, evidentemente, non vanno di pari passo.
Il sospetto che potrebbe venire è allora questo: se ragioniamo in termini puramente logici, forse la geometria euclidea non è così "privilegiata" rispetto alle altre. Si potrebbe allora costruire all'interno di R (o di L) un modello per E ed arrivare così ad affermare che se R (L) è coerente allora E è vera.
Forse non ti sorprenderà più di tanto, a questo punto, la risposta positiva a tale questione, anche se omettiamo la costruzione di tali modelli, vista la scarsa dimestichezza che hai con questi tipi di geometrie.
Un altro tipo di considerazione che si può fare è che mentre le frasi che coinvolgono cose, persone o animali (l'elefante indiano o africano, ecc.) fanno riferimento ad un mondo "reale", i modelli di cui abbiamo parlato prima sono modelli frutto di teorie matematiche, cioè in sostanza sono modelli sintattici in quanto sono a loro volta "costruiti".
Nell'ottica della geometria basterebbe quindi provarne la coerenza di una qualunque delle tre ed avere così un modello per le altre. E' forse più facile ragionare rispetto alla geometria euclidea, quella con cui abbiamo una maggiore dimestichezza. E "garantisce" R ed L; ma chi garantisce E? L'evidenza di Euclide e di Kant, in ottica moderna, ovviamente non basta più, anche perché, come visto, le geometrie euclidea e non euclidee hanno pari dignità. La risposta che aveva dato Hilbert, in ottica formalista, era stata quella di interpretarla in un opportuno dominio numerico: quello costituito dall'analisi ed in fondo questa è quello che hai fatto (anche se in termini ovviamente meno complessi) quando hai studiato la geometria analitica. In questa costruzione sono verificati gli assiomi della geometria euclidea, per cui ***se*** *l'analisi è coerente,* ***allora*** *la geometria euclidea è vera*. Come puoi ben immaginare il problema è stato solo spostato dalla geometria all'analisi. Nel 1900, al Congresso internazionale di Parigi, Hilbert affidò da risolvere ai matematici, come sfida al nuovo secolo, una lista di 23 problemi aperti della matematica, animato com'era dalla filosofia positivista secondo cui qualunque problema ben posto ha soluzione. Tra questi c'era anche quello di dimostrare, in modo diretto, la coerenza dell'analisi. In sostanza la coerenza dell'analisi non doveva passare attraverso la costruzione di un modello, ma essere provata al suo interno, per non correre il rischio di cadere in un pericoloso circolo vizioso.

Prima di concludere, due parole sulla semantica dei giochi. Come detto in più occasioni, il gioco ha una struttura chiaramente sintattica che impedisce di parlare di verità. Questo è e rimane vero, anche se alcuni giochi, come quelli con tavolieri o come i giochi di ruolo sono esemplificazioni di situazioni reali con regole rigide e ben definite. Questo impedisce alla situazione reale di essere un modello per il gioco, anche se nel modello reale si ritrova a volte la filosofia che sta alla base stessa del gioco. Per fare un esempio, il gioco degli scacchi, arrivato in occidente dall'India passando per il mondo arabo (il termine 'Scacco matto' ha origine persiana: in persiano "Re" si dice "Scià" e il

nostro scacco matto deriva dalla frase persiana *shah mat* , letteralmente “il re è morto”), riproduce sulla scacchiera una battaglia fra eserciti schierati e gerarchicamente strutturati, il cui scopo è la distruzione fisica dell’esercito nemico. Il Go, ritenuto la versione orientale degli scacchi , è ancora la trasposizione di una battaglia, ma tra eserciti non schierati (le pedine vengono poste a mano a mano sulla scacchiera) e non strutturati gerarchicamente (le pedine sono tutte uguali). Ma soprattutto lo scopo non è l’eliminazione fisica dei nemici, ma il controllo del territorio; le pedine avversarie vengono rese inoffensive. Regole e scopi diversi per rispecchiare filosofie diverse.
Modelli reali si ritrovano anche nei giochi di carte: un esempio molto familiare è costituito dai semi delle carte da briscola che rappresentano i quattro ordini principali del mondo rinascimentale: i denari rappresentavano i mercanti, i bastoni i contadini, le spade i nobili e le coppe gli ecclesiastici.
D’altra parte la lettura delle carte (fatta per lo più coi tarocchi) non è altro che una interpretazione semantica di situazioni ‘sintattiche’ (le carte devono essere mischiate in un certo modo e scoperte in un certo ordine). Un interessante esempio di ‘letture’ di questo tipo si trovano nel libro di Italo Calvino “Il castello dei destini incrociati”.

3.4 VERITA’ E DIMOSTRAZIONE

Nella parte relativa alla sintassi abbiamo dato il concetto di teorema logico relativo ad una fbf mentre ora abbiamo parlato di verità per una fbf. Le analogie tra i teoremi T3 e T7 fanno pensare ad uno stretto legame fra i due concetti, cosa confermata anche dall’osservazione fatta a proposito del confronto tra geometria euclidea e geometrie non euclidee. La cosa, anche se può sembrare intuitiva, non è banale. Infatti, mentre il concetto di dimostrazione è interno alla teoria, per dare il concetto di verità abbiamo dovuto utilizzare un metalinguaggio in cui la teoria stessa si immerga. In generale si pensa che le dimostrazioni forniscano proposizioni vere (i teoremi) e che, viceversa, per ottenere delle proposizioni vere occorra fare delle dimostrazioni. Sorge, in modo spontaneo, il problema se il concetto di dimostrazione coincida con quello di verità; in altre parole se l’insieme delle proposizioni dimostrabili coincide con l’insieme delle proposizioni vere.
La risposta è diversa a seconda del soggetto di cui si sta parlando: se ci si sofferma a linguaggi del primo ordine come quello da noi considerato e a strutture puramente logiche la risposta è affermativa ed è garantita dal seguente fondamentale teorema, dimostrato da Gödel nel 1930:

T 9. **(Teorema di completezza)**
Sia A un enunciato ; allora

A è un teorema (logico) se e solo se A è valido

Il teorema di completezza getta di fatto un ponte tra gli aspetti sintattici e quelli semantici della logica: ogni teorema è vero in qualunque modello e viceversa. Il concetto di verità e quello di dimostrazione coincidono, **all’interno di una logica del primo ordine**. Per logiche del secondo ordine il teorema di completezza non vale; la loro maggiore espressività, di cui si parlava a proposito del principio d’induzione, ha questo notevole costo: l’insieme delle proposizioni dimostrabili non coincide con l’insieme delle proposizioni vere.
Ma cosa succede per un teorema all’interno di una teoria, come può essere la geometria euclidea o l’aritmetica?
La risposta a tale domanda è cruciale: se esistesse un teorema di completezza ad esempio per l’aritmetica, sarebbe risolto in un certo senso il problema dei fondamenti della matematica, nel senso che si troverebbero, al suo interno, le basi su cui poggia. Questa speranza venne definitivamente a cadere nel 1931, anno in cui Kurt Gödel (1906-1978) dimostrò due teoremi che avrebbero radicalmente cambiato il modo di pensare e vedere la matematica:

PRIMO TEOREMA DI GÖDEL
Sia A la teoria che definisce l’ordinaria aritmetica formale.
Se A è coerente allora A è incompleta.

SECONDO TEOREMA DI GÖDEL
Sia A la teoria che definisce l'ordinaria aritmetica formale.
Se A è coerente allora non è possibile dimostrare "A è coerente" in A.

Vediamo la portata di questi due teoremi. Il primo sostiene che nell'ipotesi in cui l'aritmetica sia coerente, ci sono al suo interno enunciati indecidibili di cui cioè non si riesce a dire se essi o la loro negazione sono teoremi dell'aritmetica e la sua dimostrazione si basa appunto sulla costruzione di una siffatta formula. Interessante la lettura di questo teorema come contronominale: se l'aritmetica fosse completa, non sarebbe coerente. L'incompletezza dell'aritmetica è un male necessario (e auspicabile!). Per sommi capi, per dimostrare questo teorema GÖdel assegnò a tutti i simboli dell'aritmetica un numero, per cui ogni fbf dell'aritmetica fu tradotta in un numero. Ebbene, al termine del suo processo GÖdel trovò una formula autoreferente e quindi indecidibile; una formula cioè di cui non fosse possibile dire se era vera o falsa. In sostanza è come se avesse ritrovato nell'aritmetica l'analogo del paradosso del mentitore.
Il secondo teorema è ancor più esplicito: l'aritmetica non riesce a dimostrare al suo interno la sua coerenza (e la sua verità). Per dimostrare questo ha bisogno di una (meta)teoria superiore; ma chi garantisce la coerenza di questa (meta)teoria?
Questi teoremi sono stati indubbiamente un duro colpo per tutti coloro che, a partire dai Greci sino a Kant ed ai positivisti di inizio secolo avevano riposto nella matematica una fiducia estrema come disciplina garante della verità. Quante volte hai sentito o detto frasi del tipo "E' matematico" oppure "La matematica non è un'opinione", tutte espressioni testimonianti questa profonda fede. I risultati di Gödel ribaltano tutto questo: la matematica, non avendo neppure la possibilità della verifica sperimentale, sembra non reggersi su nulla, se non sulla logica che sta alla base delle sue costruzioni, ma che non ne garantisce la coerenza, appunto. Ciò che stupisce i matematici, ma che li rassicura, in fondo, è che le cose, malgrado tutto "funzionino", come in un gioco.
Una conferma formale a questa rassicurazione si è avuta con i risultati di Gentzen (1909-1945) che forniscono una prova diretta della coerenza dell'aritmetica: egli ha dimostrato che nessuna dimostrazione (formale) dell'aritmetica può terminare con **la** contraddizione 0=1. Il problema è che una tale verifica deve essere fatta con una forma "più raffinata" di induzione (con un procedimento infinito, quindi). Se l'aritmetica vuole dimostrare la sua coerenza al suo interno (e con una logica al primo ordine) non può farlo al finito; in pratica è come se si avesse un teorema con una dimostrazione infinita. Per avere una dimostrazione al finito devo usare logiche del secondo ordine (per le quali non vale il teorema di completezza!) e comunque al di fuori dell'aritmetica. Ma chi garantisce la coerenza di queste logiche?
Se questo risultato garantisce in un qualche senso una coerenza (relativa) dell'aritmetica, non riesce comunque a garantire la coerenza di altre teorie importanti quali l'analisi e quindi la stessa geometria (euclidea), di cui l'analisi costituisce, come detto, un modello. Il programma di Hilbert di riscrivere in modo formale la matematica riducendola a forme al finito (e quindi riportando anche l'infinito al finito) trova qui il suo capolinea. Ma, come spesso succede per il pensiero umano, questo apparente limite ha permesso ai matematici di intraprendere le strade della formalizzazione e di percorrerle al di là degli intenti finitisti di Hilbert. La sua idea è sopravvissuta ai suoi scopi.
Sorge allora un dubbio: la matematica, in fondo, è un (grande) gioco oppure trova giustificazione in una qualche realtà? La domanda è aperta ed ognuno (anche tu!) può dare la sua risposta.

3.5 TEOREMI DI GÖDEL E POLITICA

Ti sarà sorto il dubbio che i problemi sollevati in precedenza in fondo siano solo della matematica e che quindi la loro trattazione, riferendosi ad una disciplina specifica, riguardi solo poche persone e pochi ambiti. La cosa non è propriamente così e se in un qualche modo ritieni che il tuo mondo (di persona e di studente di discipline economiche) non sia intaccato dai teoremi di Gödel, forse dovrai ricrederti. Se vuoi vedere alcuni esempi della vita 'reale' in cui si ritrovano forme analoghe del teorema di incompletezza ti consigliamo il libro di Hofstadter “Gödel, Escher, Bach”-Adelphi. In questa sede vogliamo soffermarci invece sull’esempio forse più noto di applicazione dei teoremi di Gödel alla scienza politica e all’economia: *La teoria di sistemi perfettamente democratici* proposta da K. Arrow.

Kenneth Arrow, economista americano premio Nobel nel 1972, espose cinque condizioni fondamentali, essenziali per ogni democrazia che qui riportiamo in una sisntesi proposta nel 1980 da Morton Davis, professore di matematica al City College di New York, nel libro MatHematically Speaking:

1. *Il meccanismo decisionale deve dare origine ad un’unica scala di preferenze*. Quali che siano le preferenze dei membri di una società, il meccanismo deve consentire di esprimere una ed una sola scala sociale di preferenze.

2. *La società dovrebbe essere sensibile alle preferenze dei propri membri.*

Quanto più gli individui preferiscono un’alternativa, tanto più dovrebbe preferirla anche la società nel suo complesso. Si supponga che un meccanismo decisionale dia origine ad una scala sociale di preferenze, basata sulla preferenza dei membri della società, in cui l’alternativa X risulta preferita a Y. Se le scale individuali di preferenza mutassero in modo tale per cui in alcuni crescesse il gradimento per X mentre rimane invariato quello per Y, nella nuova scala sociale di preferenze X dovrebbe ancora risultare preferito a Y.

3. *La scelta sociale tra due alternative si fonda sulla scelta dei membri della società tra quelle due alternative (e non su scelte tra altre alternative).*

Si supponga che la società preferisca X a Y e che la gente muti la propria opinione rispetto ad altre alternative, ma non rispetto a X e Y. In questo caso, X dovrebbe rimanere preferito a Y. La decisione sociale su quale sia la scelta migliore tra X e Y non dovrebbe dipendere dalla decisione su quale alternativa preferire tra U e V.

4. *La procedura decisionale non dovrebbe ammettere preconcetti.*

Per ogni coppia di alternative X e Y, deve esistere una possibilità di preferenza individuale che dovrebbe consentire alla società di preferire X a Y. In caso contrario, se Y venisse automaticamente preferito a X, le preferenze di gruppo non sarebbero rispondenti a quelle dei membri del gruppo.

5. *Non sono ammissibili pregiudizi individuali.*

Arrow assume la non ammissibilità di una dittatura: le scelte sociali non possono identificarsi con le scelte di un singolo individuo. Se non si volesse soddisfare questa condizione, sarebbe piuttosto facile trovare un meccanismo elettorale, ma Arrow non lo riterrebbe rappresentativo degli individui che danno origine al gruppo.

Quasi tutti i commentatori giudicano le condizioni richieste del tutto ragionevoli per qualunque metodo democratico che consenta di prendere decisioni sulla base dell’espressione individuale di preferenze per mezzo del voto. Ciò che Arrow ha dimostrato è che un sistema elettorale perfettamente democratico (un sistema, cioè, nel quale si imponga sempre la scelta della maggioranza) risulta impossibile senza che venga violata una delle cinque condizioni di base. Come è stato notato da P. Samuelson (altro Nobel americano per l’economia nel 1970) e da altri commentatori, il teorema di Arrow ha avuto, sulla scienza politica e sull’economia, lo stesso impatto che ebbe, sul pensiero matematico, il teorema di incompletezza di Gödel.

4. RIFLESSIONI SU ASPETTI SINTATTICI E SEMANTICI NELL’ALGEBRA.

Prima di concludere, vogliamo proporti alcune riflessioni su aspetti sintattici e semantici relativi a questioni che hai affrontato in questi anni.

Partiamo da una domanda semplice:

è vero che

$$\frac{x^2-1}{x+1}=x-1 \qquad (A)?$$

Prima di proseguire, cerca di rispondere.
Innanzi tutto, la domanda è ben posta o era più opportuno parlare di correttezza? Per rispondere occorrerebbe stabilire in quale contesto ci si muove. In sostanza cosa ti permette di scrivere che i due termini sono uguali? Se pensi a x^2-1 e $x+1$ come elementi dell'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in R, la domanda è mal posta: ti si dovrebbe chiedere se la scrittura è corretta, ed in questo caso la risposta è affermativa. L'ambito in cui ti muovi è puramente sintattico e le operazioni che hai definito e che esegui sull'insieme dei polinomi ti permettono di giustificare il risultato ottenuto.
Non è improbabile però che qualcuno abbia risposto affermativamente ponendo la condizione $x \neq -1$.
Qual è il tipo di lettura che è stato dato in questo caso? Non è improbabile che i due termini siano stati visti in modo funzionale, cioè come le leggi che definiscono le funzioni

$$y=\frac{x^2-1}{x+1} \qquad \text{e} \qquad y=x-1$$

Il ragionamento fatto è stato probabilmente questo:
"le due proposizioni esprimono la stessa funzione se $x \neq -1$"
In questo caso la risposta è stata di carattere semantico: la scrittura è stata interpretata come uguaglianza di relazioni funzionali. Ma non solo! Troppo spesso si dimentica che per assegnare una funzione occorre dare, oltre ad una proposizione, anche gli insiemi su cui tale funzione opera. Ponendo $x \neq -1$ si sottintende l'idea di funzioni reali a variabili reali, introducendo quindi un'ulteriore interpretazione semantica; questo perché, in generale, si lavora con funzioni di questo tipo, ma di per se la cosa non è scontata. Se ad esempio si fosse pensato a funzioni definite da N in Q (o R) l'uguaglianza sarebbe risultata vera.
Questo semplice esempio ci è servito per illustrarti come spesso, nella pratica matematica, ci si imbatta in questioni sintattiche o semantiche senza accorgersene e senza osservare che, in base al punto di vista con cui si guardano le cose, si possono avere risposte diverse.
Non è superfluo osservare che, dal punto di vista morfologico e da quello sintattico, (A) risulta essere corretto solo se ci si riferisce all'usuale linguaggio dell'algebra con le relative convenzioni sulle scritture delle operazioni.
L'esempio più evidente di come, in contesto algebrico, si passi indifferentemente dalle questioni sintattiche a quelle semantiche, riguarda la risoluzioni delle equazioni. Osserva innanzi tutto che il problema è di tipo semantico: la ricerca delle soluzioni va fatta all'interno di un certo insieme e la condizione affinché un valore sia soluzione di un'equazione è una condizione (ricordiamo) di verità.
La cosa di per sé è ancor più chiara se vedi l'equazione come strumento per tradurre e possibilmente risolvere un problema; in quel caso l'ambito semantico è esplicito. Addirittura in certi problemi l'ambito semantico può fornire dei dati ausiliari indispensabili per la risoluzione.
Considera questo esempio:
"A casa di un noto matematico, Loga Ritmo, abitante in via Verdi 36, si presenta un addetto del comune per dei rilevamenti statistici. Alla domanda sul numero dei figli e sulle loro età il signor Ritmo risponde:
'Ho tre figli e, caso strano, il prodotto delle loro età coincide col numero civico della mia abitazione, mentre la somma delle loro età è uguale al numero civico della casa difronte'.
L'addetto, prestandosi al gioco, dopo alcuni conti chiede nuove informazioni. Il signor Ritmo aggiunge allora, sorridendo, che per rispondere bastava sapere che il figlio maggiore ha gli occhi azzurri.
Quali sono le età dei tre figli?"
In questo caso sembra manchino ancora dei dati. Ma dal contesto potrai trarre delle indicazioni che ti permetteranno di arrivare alla soluzione, che ti invitiamo a cercare.
Ritorniamo alle equazioni. In generale come si risolvono? Vediamo alcuni esempi.

Risolvi in R la seguente equazione:

$$\frac{x+2}{(x-2)^2}+\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-2}{x-1} \qquad \text{(B)}$$

Facciamo prima alcune considerazioni di tipo morfologico. La fbf (che indicheremo con B) di cui l'equazione proposta è un modello è formata da un predicato binario (=), quattro operazioni binarie (somma, prodotto e le loro inverse) ed un'operazione unaria (l'elevamento a quadrato). Compaiono inoltre tre costanti individuali (interpretate con 1,2,3) e x è una variabile libera. Morfologicamente parlando la costruzione è corretta.

Vediamo adesso quali passaggi occorre eseguire per risolvere l'equazione e in quale ambito ci si muove:

a) scomposizione dei denominatori della frazione: sintassi

b) minimo comune multiplo fra i denominatori così ottenuti: sintassi

c) applicazione del secondo principio d'equivalenza (sintassi) a **condizione** che sia $x\neq1$ e $x\neq2$ (semantica)

d) forma normale con l'applicazione del primo principio d'equivalenza delle equazioni: sintassi

e) formula risolutiva delle equazioni di secondo grado: ?

f) confronto tra le soluzioni trovate e le condizioni poste: semantica

g) individuazione della soluzione finale ($x=6/5$)

Ci sono alcuni tra questi passaggi che meritano una particolare riflessione.

Innanzi tutto il punto c): quando risolviamo un'equazione cerchiamo i valori che rendono vera la fbf (nel linguaggio dell'algebra) individuata dal predicato d'uguaglianza, verità relativa all'interpretazione data alla fbf (cioè relativa all'insieme numerico in cui interpreto la variabile). In teoria, quindi, non so quali valori può assumere la x, se non...provandoli, per vedere quali la soddisfano. E' chiaro che, quando si ha a che fare con insiemi infiniti, questo modo di procedere è poco opportuno. Utilizzando i criteri di equivalenza si ottiene una semplificazione (sintattica) dell'equazione per rendere più agevole questa ricerca. Quando si pongono i denominatori diversi da zero, si impone che il valore di x (che non conosco ancora!) non possa essere uguale a certi valori. La cosa strana, per certi aspetti, è che non si capisce perché l'incognita debba essere sottoposta a quella condizione: se non sono soluzioni non verranno assunti. La giustificazione che si dà è che i criteri d'equivalenza non garantiscono, in certe condizioni,....l'equivalenza tra le equazioni. Serve quindi una condizione semantica per tutelarsi dai limiti della sintassi? Il problema è più complesso: il tutto è legato al fatto che si sta risolvendo una questione semantica (la ricerca di soluzioni e quindi di valori di verità) in modo sintattico. Il punto di domanda posto al punto e) dovrebbe aiutarci a chiarire quest'aspetto. La formula risolutiva è uno strumento sintattico o semantico? Se pensi a come l'hai ricavata dovresti convincerti che è sostanzialmente uno strumento sintattico[4]. Ma non è uno strumento **dimostrativo**, quanto piuttosto **argomentativo**. In sostanza la formula risolutiva non garantisce se l'equazione ha soluzioni, ma garantisce che **se** l'equazione ha soluzioni, **allora** queste si troveranno tra quelle fornite da tale formula. Con la formula risolutiva si fa quindi la stessa valutazione che hai fatto al biennio con l'insieme universo delle equazioni fratte: se l'equazione ha soluzioni, si devono cercare in questo insieme (nell'esempio proposto $U=R\setminus\{1,2\}$). Visto quindi che si sta risolvendo un aspetto semantico le varie soluzioni trovate con i metodi sintattici dovrebbero sempre essere soggette alla verifica, vera garante della ricerca che si sta effettuando. Per certi aspetti la cosa non ti è nuova: pensa ad esempio come trovi le radici razionali di un'equazione di grado superiore al secondo utilizzando il teorema di Ruffini, teorema che permette l'individuazione di un insieme (finito) di numeri razionali entro cui cercare (mediante la verifica diretta!) le eventuali soluzioni razionali dell'equazione.

---

[4]A dire il vero, oltre all'aspetto sintattico c'è anche un aspetto morfologico legato alla sostituzione dei parametri (generici) che compaiono nella formula risolutiva coi coefficienti dell'equazione che si vuole risolvere. E' opportuno osservare che a volte i valori da sostituire sono 'uguali' ai parametri della formula (pensa ad esempio alla risoluzione dell'equazione $ax^2-2x-a+2=0$ in cui la 'a', coefficiente del termine di secondo grado, sostituisce nella formula una lettera uguale) con una conseguente confusione di ruoli che probabilmente ti ha creato, a volte, qualche difficoltà.

Se l'equazione è fratta, la determinazione dell'insieme universo sembra in un certo modo garantirci della attendibilità o meno delle soluzioni. Immagina ora di dover risolvere la seguente equazione $12x^2-1367x-4329=0$ in N.
I coefficienti coinvolti scoraggiano qualunque tentativo legato a scomposizioni o teoremi di Ruffini. Il dubbio che allora può venire è il seguente: è possibile usare, per risolverla, la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado? La domanda è legittima: le operazioni coinvolte in tale formula sono estrazioni di radice e rapporti; operazioni cioè che sono possibili in R, ma non in N. In sostanza, posso trovare le soluzioni in un insieme numerico diverso da quello in cui sto cercando i valori di verità di una fbf? Come vedi, anche in questo caso abbiamo a che fare con un conflitto tra aspetti sintattici (l'uso della formula risolutiva) e semantici (la ricerca delle soluzioni). Se pensi alla formula risolutiva in modo argomentativo, la risposta alle questioni è sì. La verifica (semantica) delle soluzioni viene fatta successivamente; la formula risolutiva ha solo lo scopo di restringere l'ambito in cui andare a "pescare" gli elementi su cui fare la verifica (visto che non è possibile farla su tutti i numeri naturali!). Il fatto di uscire dall'insieme in cui si vuole risolvere l'equazione per trovarne le (eventuali) soluzioni è puramente accidentale[5]. Se pensi invece di usare la formula risolutiva in modo semantico (cioè come colei che garantisce l'esistenza delle soluzioni e le fornisce), la risposta è no. Purtroppo una verifica esplicita non viene mai fatta, confidando sull'aspetto (semantico) della formula risolutiva. Trova (con la verifica!) le (eventuali) soluzioni dell'equazione proposta.
Quest'idea che la formula risolutiva di fatto ha solo lo scopo di restringere l'ambito entro cui ricercare le soluzioni risulta particolarmente chiaro quando tale formula...presenta alcune difficoltà. Vediamo un esempio:
Risolvi in Z_7 la seguente equazione $2x^2-x+6=0$.
Applicando la formula risolutiva avresti un radicando negativo. Ma come va applicata la formula risolutiva ad un'equazione i cui coefficienti variano in una classe di resti? Se si considerano i valori di una classe di resti e ci si riferisce ai rappresentati canonici (nel nostro caso i numeri da 0 a 6), non esistono di fatto i valori negativi (ad esempio -1 sta per -[1]=[6]). Osservando allora che [48]=[6] e che -[6]=[1], la formula risolutiva diventa
$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{(1-48)}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{4}$ (per comodità si sono omesse le parentesi quadre, 'confondendo' le classi coi loro rappresentati principali)
Il problema adesso è l'estrazione di radice, che non è una funzione in Z_7. Infatti
$[3]^2=[9]=[2]$ e $[4]^2=[16]=[2]$, per cui si hanno due possibilità:

$x_{1/2}=\frac{1\pm 3}{4}$ (1) e

$x_{1/2}=\frac{1\pm 4}{4}$ (2)

Dalla (1) ricaviamo $x_1=1$ e $x_2=\frac{-2}{4}=\frac{5}{4}=3$ (poiché $[3]\bullet[4]=[12]=[5]$).
Ti invitiamo a risolvere il caso (2) ed osservare che si ottengono le stesse soluzioni.
Dunque la formula risolutiva sembra funzionare anche in ambienti numerici 'particolari' come possono essere le classi di resto. E' sempre vero? e a quale prezzo? Partiamo dalla seconda domanda, forse la più strana. Nella risoluzione proposta abbiamo operato con la formula risolutiva come se operassimo in R, con gli opportuni 'aggiustamenti' relativi all'ambiente numerico in cui ci si muoveva. Ma quello che abbiamo fatto era tutto legittimo? L'aspetto più evidente della sostanziale differenza fra i due ambiti è fornito dall'estrazione di radice quadrata, che sembra non essere una funzione (almeno nel caso da noi esaminato). Ti ricordiamo però che anche in R si sono

[5]I numeri complessi non sono nati per poter estrarre le radici di numeri negativi, come si potrebbe pensare, ma per trovare le soluzioni **reali** delle equazioni di 3° grado. Per risolvere tali equazioni esistono delle formule risolutive, note come **formule di Cardano**, le quali forniscono soluzioni reali (un'equazione di 3° grado ha sempre almeno una soluzione reale) solo passando attraverso i numeri complessi.

dovute fare delle restrizioni per rendere la radice quadrata una funzione, restrizioni che in questo ambito acquistano un senso se si tiene conto, come detto in precedenza, che nelle classi di resti è come se non esistessero i numeri negativi. Così nell'esempio di prima puoi osservare che, posto $\sqrt{2}=4$, $-\sqrt{2}=-4=3$ che è l'altra radice trovata per $\sqrt{2}$, dove 3 e 4 sono uno l'opposto dell'altro (infatti [3]+[4]=[7]=[0]). L'idea allora che si possa usare la formula risolutiva nell'ambito migliore (che sarebbe R) per poi contestualizzarla all'insieme numerico entro cui si cercano le soluzioni (come nel caso di soluzioni intere) non sembra corretto: di fatto anche la formula risolutiva (aspetto ricordiamo sintattico) deve essere contestualizzata (aspetto semantico) in quanto le operazioni o le funzioni coinvolte mutano le loro proprietà. E questo è un primo fatto anomalo. Ma non è l'unico e neppure il più grave. Considera ad esempio questa equazione in Z_6, con cui cercheremo di rispondere alla prima domanda che ci siamo posti: $x^2+x+3=0$. Quali soluzioni fornisce la formula risolutiva? Prova a fare i conti. Quali hai trovato? Anche i tuoi compagni hanno trovato le tue? I valori trovati sono effettivamente soluzioni dell'equazione? Fai la verifica: ti accorgerai che nessuna la è. Cos'è successo? Dove l'aspetto sintattico è mancato? O meglio, quali sono le condizioni semantiche che impediscono ai valori che hai trovato di essere soluzioni?. Se hai esaminato i conti che hai fatto applicando la formula risolutiva, ti sarai accorto che $\Delta=1-12$, ma [12]=[0], per cui, dal punto di vista della formula risolutiva le equazioni $x^2+x+3=0$ e $x^2+x=0$ sono equivalenti. Sembra quindi che si debba stare attenti anche al termine noto! Il problema opposto sembra presentarsi con l'equazione $2x^2+2x=0$ (osserva che tale equazione è ottenuta da $x^2+x+3=0$ moltiplicando ambo i membri per 2) in cui la formula risolutiva sembra fornisca solo le soluzioni x=0 e x=5, mentre sembra non si trovino x=2 e x=3 che (verificalo!) sono soluzioni dell'equazione. Questo perché? Perché siamo abituati a pensare al rapporto come ad un operatore, ma mentre in N $\frac{0}{2}=0$, in Z_6 $\frac{0}{2}$ è anche uguale a 3. In sostanza il risultato di un rapporto, se esiste, non è detto sia unico. Dagli esempi proposti avrai osservato che questo succede quando si moltiplicano due numeri il cui prodotto è il numero che definisce la classe di resti od un suo multiplo (nell'esempio proposto 6). In questi casi si dice che in Z_n ci sono **divisori dello zero**, poiché $a \bullet b=0$ non comporta necessariamente a=0 oppure b=0.
Ci sono poi casi in cui la formula risolutiva non funziona proprio: se consideri ad esempio l'equazione $2x^2+x+2=0$ in Z_4, ti accorgi subito che l'applicazione della formula comporterebbe una divisione per 0. Come trovare allora le soluzioni, in questo caso? Come visto, risolvere un'equazione significa mischiare l'ambito semantico con quello sintattico; ma il problema, ricordalo, è semantico. Perché non risolverlo allora in questo modo? In pratica si tratta cioè di sostituire nell'equazione tutti gli elementi della classe di resti in cui si opera per vedere quali la soddisfano. Ti facciamo osservare in questo caso non si tratta di una verifica, ma di un vero e proprio metodo di risoluzione, l'unico che hai a disposizione. Ma anche quando trovi le soluzioni con la formula risolutiva non puoi esimerti dal fare la verifica (vera e propria) in quanto non è detto (come nel caso dell'equazione $x^2+x+3=0$ in Z_6) che i valori trovati siano soluzioni dell'equazione di partenza. In queste condizioni quindi il metodo semantico risulta indispensabile, ma la cosa non sconvolge eccessivamente se i valori da verificare sono solo quattro o sei. Ma cosa dire delle soluzioni dell'equazione $116x^3-x+61=0$ in Z_{132}? Occorre fare 132 verifiche per trovare le soluzioni, a meno che, dopo averne trovato un certo numero, tu non sia sicuro di averle trovate tutte. Se si ha, come in questo caso, un'equazione di 3° grado dovremmo aspettarci di trovare al più tre soluzioni reali se valesse il teorema fondamentale dell'algebra. Ma tale teorema vale? Può non essere facile rispondere su un'equazione di questo tipo; il sospetto che la risposta sia negativa dovrebbe esserti già venuto anche in precedenza. Per convincerti ulteriormente ti proponiamo questo esempio:
Risolvi in Z_{24} l'equazione 6x=0.
L'equazione è di primo grado. Se valesse il teorema fondamentale dell'algebra dovremmo trovare (al più) una soluzione. Ma è piuttosto semplice vedere come x=0, x=4, x=8, x=12, x=16 siano soluzioni. Quindi le verifiche da fare sono proprio 132 o $2 \bullet 10^{15}$ (circa il debito pubblico italiano, in lire) se ci muovessimo in $Z_{2 \bullet 10}{}^{15}$. Il metodo è indubbiamente lungo e noioso, ma è il metodo

corretto per risolvere qualunque tipo di equazione. Sarebbe opportuno, per insiemi finiti, ma 'numerosi', trovare qualche 'trucco' oppure impostare un programma in Pascal che facesse per te queste verifiche. Prova a farlo. Sorge allora un dubbio: che sia più facile lavorare con l'infinito che col finito 'grande'?
Al termine di queste considerazioni può venire il seguente dubbio: quando posso applicare la formula risolutiva e quando no? O meglio, quando siamo sicuri che la formula risolutiva può fornire indicazioni sulle soluzioni? Per rispondere occorrono risultati di algebra superiore. Ti basti sapere che la formula risolutiva si può applicare solo se i coefficienti dell'equazione sono elementi di un anello privo di divisori dello zero.
Il consiglio che comunque ci sentiamo di darti è sempre lo stesso: fai la verifica, se vuoi essere certo, cioè muoviti, sin che puoi, in ambito semantico.

Lo scambio continuo tra ambito sintattico ed ambito semantico è ancor più evidente nelle equazioni letterali (fratte) in cui la presenza di due lettere che hanno ruoli diversi (incognita e parametro) rende le cose più complesse. Dopo aver stabilito il ruolo delle lettere e l'insieme numerico in cui cercare le soluzioni e in cui far variare il parametro (interpretazione semantica della fbf 'equazione') si cercano i valori di verità (cioè i valori di x che rendono vera la frase aperta, valori di verità in funzione del parametro) ancora con metodi sintattici. L'aggravante in questo caso è che l'insieme universo non viene neppure stabilito a priori, ma a posteriori ed in generale non è un insieme universo per l'incognita (cosa di per se non molto significativa, come visto in precedenza), ma per il parametro.
Vediamo un esempio:
Risolvi in R la seguente equazione in x:

$$\frac{x}{ax+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{-ax}{(a+1)(ax+1)} \qquad (C)$$

La condizione 'risolvi in R' dice in modo implicito che il parametro è un numero reale; l'incognita x lo diventa di conseguenza. A parte il minimo comune multiplo, si pongono due condizioni: $x \neq -{}^{1}/_{a}$ e $a \neq -1$. La prima condizione, in particolare, dovrebbe fornire l'insieme universo in cui ricercare le (eventuali) soluzioni dell'equazione. Ma che insieme è $\{x \in R: x \neq -{}^{1}/_{a}\}$? Poiché la condizione dipende da un parametro, dovremmo scriverlo in questi termini $U=\{x \in R: x \neq -{}^{1}/_{a},\ a \in R \setminus \{-1\}\}$. Non dovrebbe risultarti difficile intuire che tale scrittura è sostanzialmente scorretta, poiché gli unici valori appartenenti all'insieme sarebbero 1 e 0, ma l'unica soluzione possibile sarebbe 1, poiché x=0 porterebbe ad un'equazione in a impossibile. Ci sono però alcune cose che non sono chiare. Innanzi tutto, può essere a=0 oppure no? Se sostituiamo a=0 nell'equazione (C) otteniamo l'equazione x+1=0 che ha come soluzione x=-1. Il problema nasce dal fatto che ad avere delle limitazioni non è l'incognita, come già detto anche in precedenza, ma il parametro. Quindi, troviamo **prima** sintatticamente l'eventuale soluzione dell'equazione e **poi** stabiliamo quali valori non può assumere il parametro, attraverso la verifica! Risolvendo infatti si arriva all'equazione $(3a+1)x=-1$ da cui, dopo aver posto $a \neq -{}^{1}/_{3}$ affinché l'insieme delle soluzioni non sia vuoto, si ottiene $x=-{}^{1}/_{(3a+1)}$.
Adesso possiamo fare la verifica per vedere se effettivamente il valore trovato, al variare di a in $R \setminus \{-1, -{}^{1}/_{3}\}$, è soluzione. Sostituendo si perviene all'equazione (in a):

$$\frac{-1}{2a+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{a}{(a+1)(2a+1)} \qquad (D)$$

Questa a sua volta risulta essere un'identità a condizione che sia $a \neq -{}^{1}/_{2}$, oltre ai valori già esclusi. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da
$S=\{x \in R: x=-{}^{1}/_{(3a+1)},\ a \in R \setminus \{-1, -{}^{1}/_{3}, -{}^{1}/_{2}\}\}$.
Come vedi, a volte lasciare distinti gli ambiti in cui ci si muove può essere più agevole, oltre che corretto!
Forse penserai che ci siamo dilungati troppo su un argomento come le equazioni. L'abbiamo fatto per due motivi:

a) lo strumento equazione, come ti sarai reso conto in questi anni, riveste un ruolo troppo importante per non approfondirlo adeguatamente anche da questo punto di vista;
b) nelle equazioni, più che in altre parti, si vede bene il rapporto tra aspetti morfologici, aspetti sintattici e aspetti semantici, per cui risultano un proficuo ambito in cui discutere queste cose.
Ti invitiamo, come conclusione di questo lavoro, ad una riflessione di tipo morfologico (in quest'ambito ti chiediamo di individuare i termini propri del linguaggio insiti nell'argomento), sintattico e semantico su argomenti come
-equazioni irrazionali;
-disequazioni (di vario tipo)
-funzioni (qualcosa è già stato detto...)
-insiemi.
Negli esercizi, poi, oltre a questioni tecniche relative agli argomenti trattati troverai altri momenti di riflessione, e le soluzioni degli 'strani problemi' che ti sono stati proposti in questo capitolo.
Se, dopo quanto hai letto, avrai una visione meno assoluta, ma più problematica della matematica, riterremo di aver raggiunto il nostro scopo.

ESERCIZI.

SEZIONE A: MORFOLOGIA E SINTASSI

1) Nel gioco della briscola individua i termini primitivi, gli assiomi e le regole d'inferenza. Prova a modificare una delle regole affinché il nuovo gioco risulti:
   a) coerente;
   b) non coerente.

2) Cerca da qualche parte le regole del backgammon e riscrivile introducendo un sistema equivalente, dopo aver cercato di dedurre, dalle regole stesse, lo 'spirito' del gioco. Quali sono in questo caso i termini primitivi?

3) Il primo articolo della Costituzione Italiana è il seguente:
   Art. 1
   L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.
   La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.
   Ricerca, su un dizionario, i termini che ritieni debbano o possano essere definiti. Quali termini considereresti come primitivi? In generale, che cosa rappresenta, dal punto di vista logico, la Costituzione per uno stato?

4) Ti proponiamo qui di seguito un gioco piuttosto semplice di cui ti chiediamo, al solito, di individuare i termini primitivi e gli assiomi che ti invitiamo a riscrivere in modo formale.
   Il gioco, noto come "Cavolini di Brussel" (poiché alla fine il disegno che si ottiene ricorda, secondo gli ideatori, un cavolino di Brussel, scritto in fiammingo, troppo cotto) è per due o più persone (con più di tre persone è consigliabile disputare più partite per alternare i giocatori che fanno la prima mossa).
   Su un foglio si disegnano alcuni punti (almeno cinque). I giocatori tracciano a turno una linea che unisce due punti e successivamente aggiungono un punto sulla linea appena tracciata.
   Le regole sono:
   a) Nessuna linea può intersecarne un'altra.
   b) Da un punto non possono partire più di tre linee.
   Si noti che un punto aggiunto durante il gioco si trova ad avere sin dall'inizio due linee partenti da lui, essendo la linea tracciata dal giocatore divisa in due dal punto, per cui in quel punto può iniziare o finire una sola nuova linea. Inoltre, in rispetto alle regole, una linea può iniziare e finire nello stesso punto.
   Vince il giocatore che traccia l'ultima linea lasciando gli avversari nell'impossibilità di tracciarne altre.
   Ti invitiamo a riflettere sulle seguenti questioni:
   i) Quali sono i teoremi del gioco? (rappresenta alcune situazioni che possono ritenersi tali)
   ii) Riesci a trovare una relazione matematica tra il numero dei punti iniziali, il numero delle linee e quello delle parti di piano racchiuse da queste che si vengono a formare alla fine di una partita?
   Buon divertimento!

5) Riconosci fra le seguenti espressioni le formule ben formate. In caso di risposta negativa, motivala. In caso di risposta positiva costruisci l'albero che l'ha generata
   a) $A(c)\wedge\neg B(c)\forall x(A(x)\rightarrow C(x))$ b) $\forall x\neg\exists y(A(x)\wedge B(y)\rightarrow C(x,y)\vee D(a))$
   c) $\forall x(\neg A(x)\rightarrow\exists x(B(x)\wedge C(a)))$ d) $A(c)\wedge B(c)\vee C(a)\rightarrow\exists xP(a,x)$
   e) $\exists x\neg(D(x)\rightarrow A(x,c)\wedge B(c))$ f) $\exists x(\neg A(x)\wedge\forall y(C(x,y)\rightarrow B(a)\vee D(x))$
   g) $\forall x(A(x)\rightarrow B)$ h) $A(a)\rightarrow B(b)\rightarrow C(a)$
   i) $\neg\forall x(A(x)\rightarrow\exists x(B(x)\wedge C(x)\rightarrow D(x)))$ l) $\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(C(y)\wedge(A(y)\rightarrow B(x)\wedge D(y)))$

6) Formalizza nel linguaggio logico, utilizzando il metodo ad albero, le seguenti proposizioni dopo aver individuato i predicati, le variabili individuali e le costanti individuali ed averle indicate esplicitamente:

a) *Se 6 è multiplo di 2 allora tutti i numeri naturali multipli di 6 sono multipli di 2.*
b) *Carlo ha accettato l'invito e tutte le sere è andato a cena.*
c) *Ascolto musica e guardo films ma non mi piace il teatro.*
d) *Se esiste un politico onesto, lo voterò.*
e) *Un uomo non dovrebbe soffrire*
f) *Mangia o bevi ma se stai male non lamentarti.*
g) *Chi è senza peccato scagli la prima pietra.*
h) *Non tutti gli uomini soffrono, ma qualcuno sì.*
i) *Non voglio venire e se qualcuno insiste mi arrabbio.*
j) *Non esistono facoltà facili e tutti gli studenti devono studiare.*
k) *Se esistesse un gatto rosa, tutte le bambine lo vorrebbero.*
l) *Se qualcuno vede Giacomo gli morsichi un orecchio.*
m) *Arrivo, ma se vado di fretta non voglio cadere.*
n) *In un triangolo, la somma degli angoli è 180°.*
o) *Non voglio né l'auto né la moto, ma se insisti prendo l'elicottero.*
p) *Scalfaro è il presidente di tutti gli italiani.*
q) *Tutti gli uomini hanno un padre.*
r) *Chi tace acconsente.*
s) *Se non mi arrabbio questa volta, tutti gli studenti diligenti possono stare tranquilli.*
t) *Qualche persona mi ha aiutato, ma io l'ho ricompensata.*
u) *Se gli italiani fossero buoni non esisterebbero persone tristi.*
v) *Esistono persone cattive e tutti dovrebbero evitarle.*

7) Formalizza nel linguaggio logico i seguenti teoremi:
a) Teorema di Pitagora.
b) Teorema delle tre perpendicolari.
c) Se due rette sono perpendicolari ad una terza retta, sono parallele tra loro.
d) Se due funzioni reali a variabile reale f e g sono continue in [a,b] allora la funzione h=f+g è continua in [a,b].
e) Sia y=f(x) una funzione continua in [a,b]. Allora ha un punto di massimo assoluto ed un punto di minino assoluto in [a,b].
f) Sia y=f(x) una funzione continua in [a,b] e siano m e M rispettivamente il minimo ed il massimo della funzione in [a,b]. La funzione assume tutti i valori compresi tra m e M.

8) Formalizza le seguenti definizioni:
a) (A,*) è un gruppo
b) Trapezio isoscele.
c) Relazione d'inclusione tra insiemi.
d) Cateto.
e) funzione e funzione biettiva.

9) Formalizza le seguenti proposizioni che possono essere assunte tra gli assiomi della geometria euclidea piana. Introduci i predicati unari P(x) e R(x) ('x è punto' e 'x è retta'), il predicato binario A(x,y) ('il punto x appartiene alla retta y') ed il predicato ternario S(x,y,z) ('i punti x,y e z sono allineati e y sta fra x e z'):

a) per due punti distinti passa una ed una sola retta;
b) su una retta vi sono almeno due punti;

c) vi sono almeno tre punti che non giacciono su una stessa retta;
d) se un punto B sta tra A e C, allora sta anche tra C ed A;
e) se due segmenti sono uguali ad un terzo, allora sono uguali tra loro;
f) se B sta tra A e C e B' sta tra A' e C', allora se AB è uguale ad A'B' e BC è uguale a B'C', allora AC è uguale ad A'C';
g) dati una retta ed un punto non appartenente ad essa esiste una ed una sola retta passante per il punto e non incidente la retta data.

10) Utilizzando le proprietà dei connettivi dimostra che:
a) $\neg(A\to B)\wedge(A\to\neg B) \dashv\vdash A\wedge(B\to A\wedge\neg A)$ b) $(A\to A\wedge B)\wedge(\neg A\to B) \dashv\vdash (A\to(A\to B))\wedge B$
c) $\neg A\vee B\to A \dashv\vdash A\wedge(B\to A)$ d) $A\leftrightarrow B \dashv\vdash (\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$
e) $(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A) \dashv\vdash A\vee\neg A$ f) $(A\wedge B)\vee((C\vee A)\wedge\neg B) \dashv\vdash (\neg A\to C)\wedge(B\to A)$
g) $\neg(B\to A)\vee(B\to C) \dashv\vdash A\wedge B\to C$

11) Dopo aver formalizzato la seguente proposizione "*Non tutte le città francesi sono grandi o pulite*" determina, utilizzando le proprietà dei connettivi e dei quantificatori, quella che risulta ad essa logicamente equivalente.

12) Quale proposizione, tra le seguenti è logicamente equivalente alla "*Non tutti gli alunni sono bravi in matematica e latino*"?
a) *Non esistono alunni bravi in matematica e latino*
b) *Esistono alunni bravi in matematica, ma non in latino*
c) *Esistono alunni non bravi in matematica o non bravi in latino.*
Dimostra quanto affermato dopo aver formalizzato le varie proposizioni nel linguaggio logico.

13) Il seguente brano fa parte dell'O.M. n° 266 del 21/4/97 relativa alle modalità di scrutinio per la fine dell'anno scolastico 1996/97:
6. La frequenza assidua e la partecipazione attiva alla vita della scuola sono elementi positivi che concorrono alla valutazione favorevole del profitto dell'alunno in sede di scrutinio finale. Pertanto, il numero delle assenze, pur non essendo di per se stesso preclusivo della valutazione del profitto stesso incide tuttavia negativamente sul giudizio complessivo, a meno che da un congruo numero di interrogazioni e di esercitazioni scritte, grafiche o pratiche, svolte in casa o a scuola, corrette e classificate nel corso dell'intero anno scolastico, si possa accertare il raggiungimento degli obiettivi propri di ciascuna disciplina.
Dopo aver letto attentamente il brano proposto, rispondi alle seguenti domande:
a) cosa voleva dire chi ha scritto l'articolo? In particolare, nelle intenzioni, le numerose assenze dovrebbero pesare o no su un giudizio di promozione?
b) la partecipazione attiva dovrebbe pesare o no sulla valutazione del profitto?
c) il termine 'Pertanto' che cosa ti fa pensare?
d) da un punto di vista logico dal primo periodo puoi dedurre il secondo?
e) che cosa puoi concludere, da un punto di vista logico?

Quali deduzioni puoi fare dalle seguenti premesse?
14) Se non mangio non cresco. Se non cresco, non mi sposerò. Mi sposo.

15) Prendi le patatine o il gelato. Se prendi il gelato, ti sporcherai. Se stai attento, rimarrai pulito. Sei stato attento.

16) Prendi i soldi e scappa. Se scappi, scrivimi. Se ti prendono non scrivermi. Se vai in banca non prendere i soldi.

17) Gli alunni ottengono la promozione alla classe successiva per effetto dello scrutinio finale, purché riportino voto non inferiore a 6/10 in ciascuna disciplina o in ciascun gruppo di discipline e non meno di 8/10 in condotta[6]. Se Mario non sarà promosso, non andrà in vacanza. Mario ha avuto, nello scrutinio finale, 4/10 in matematica e 5/10 in italiano.

18) Se il triangolo T è rettangolo, allora, se il quadrilatero Q' è un rombo, il quadrilatero Q'' è un rombo. Q' è un rombo e se Q'' è un rombo allora 1+1=3.

SEZIONE B: SEMANTICA

1) Sapresti costruire due fbf che abbiano le seguenti tavole di verità? Sono uniche le risposte che puoi dare?

A	B	
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	C	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

2) Formalizza le seguenti proposizioni

a) *Tutti i numeri divisibili per 3 sono dispari.*
b) *Esistono quadrilateri con i lati congruenti.*
c) *Tutti gli angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco sono congruenti tra loro.*
d) *Esiste l'elemento neutro della somma.*
e) *Se tutti i triangoli sono rettangoli allora esiste un triangolo che verifica il teorema di Pitagora.*
f) Se esiste un quadrilatero con i lati congruenti, tutti i quadrilateri sono quadrati.
g) Tutti i multipli di 4 sono pari.
h) Tutti i numeri pari sono multipli di 4.
i) Esistono numeri dispari non primi.
l) Un numero è primo se e solo se è dispari.
m) Tutti i numeri naturali sono multipli di 2 o multipli di 3.
n) Se un numero è primo, non può essere pari.
o) Esistono numeri primi maggiori di 25.
p) Qualche poligono ha i lati congruenti.
q) Tutti i triangoli equilateri hanno gli angoli di 60°.
r) Ogni mammifero ha quattro gambe oppure due.
s) C'è sempre qualcuno di guardia all'ospedale.
t) C'è qualcuno che è sempre di guardia all'ospedale.

[6]Art. 12.3 O.M. n°266 del 21/4/97.

Stabilisci quali sono vere in un determinato modello (da specificare), indicando, in caso di risposta positiva, se sono pure valide. Dopo aver negato le fbf relative alle proposizioni precedenti, scrivi le proposizioni ad esse corrispondenti.

Stabilisci se i seguenti ragionamenti sono corretti (esercizi dal 3 al 13):

3) Chi dorme non piglia pesci. Tutti i partecipanti al concorso prendono pesci. Quindi nessuno dei partecipanti dorme.

4) Se piove, mi bagno. Se piove esco con l'ombrello. Quindi se non esco con l'ombrello mi bagno.

5) Di una certa famiglia si sa che
Almeno un maschio è tifoso dell'Inter; nessun maschio non è maggiorenne.
E' vero che almeno un maggiorenne è tifoso dell'Inter?

6) Tutte le materie scientifiche o letterarie sono importanti. Ci sono materie non importanti. Quindi ci sono materie non scientifiche.

7) Se mangio o bevo, ingrasserò. Se non dormo e fumo, non ingrasserò. Quindi se mangio e non dormo, non fumo.

8) Tutti gli animali non vertebrati vivono nel mare. Tutti gli uccelli non vivono nel mare e sono animali. Quindi non esistono uccelli non vertebrati.

9) Se lavoro o studio, non mi diverto. Se passeggio o non studio, penso. Mi diverto e non passeggio. Quindi penso.

10) Tutti gli uomini sono bipedi e carnivori. Tutti i carnivori mangiano carne o formaggi. Esistono uomini che non mangiano carne. Quindi esistono bipedi che mangiano formaggi.

11) Non tutte le persone sono insegnanti. Tutti gli statali sono insegnati e impiegati. Quindi esistono persone non statali.
Sarebbe corretto concludere, dalle premesse precedenti, che
"Esistono persone che non sono impiegati" ?

12) Se vinco, divento famoso o ricco. Se divento ricco, non mi sposo. Quindi se mi sposo e vinco non divento famoso.

13) Chi è senza peccato, scagli la prima pietra. Chi è senza peccato andrà in paradiso. Mario non andrà in paradiso. Quindi qualche peccatore scaglierà la prima pietra.

14) Stabilisci se i seguenti schemi di ragionamento sono corretti. Assegna poi ai simboli una interpretazione a piacere in modo da costruire delle frasi ad essi associati:
a) $\forall x(P(x)\wedge A(x)\rightarrow B(x)\wedge C(x)),\ \exists x(P(x)\wedge\neg C(x)) \models \exists x(P(x)\wedge\neg A(x))$
b) $\neg\exists x(M(x)\wedge A(x)),\ \exists x(B(x)\wedge M(x)) \models \exists x(B(x)\wedge\neg A(x))$
c) $\forall x(A(x)\vee B(x)\rightarrow P(x)\wedge\neg Q(x)),\quad \neg\forall x(Q(x)\rightarrow C(x)),\forall x(\neg C(x)\rightarrow D(x)) \models \exists x(D(x)\wedge(\neg A(x)\vee P(x)))$
Cambia qualcosa per la correttezza del ragionamento se nella conclusione al posto di $\vee$ ci fosse $\wedge$? Motiva la risposta.

I SILLOGISMI. Come accennato nel testo, Aristotele fu il primo a proporre degli schemi di ragionamento come soluzione al problema della determinazione della verità, noti come *sillogismi categorici*. Aristotele si serve dei quantificatori e dei predicati, usando lettere al posto di frasi fornendo un primo uso delle variabili.
Un sillogismo si presenta come un insieme di tre enunciati di cui i primi due costituiscono le premesse e il terzo la conclusione del sillogismo. Indicando con A, B e C gli enunciati che costituiscono il sillogismo, con la terminologia da noi utilizzata questo si presenterebbe nella forma A,B|=C. Più spesso però il sillogismo è indicato nel seguente modo $\begin{array}{c} A \\ \underline{B} \\ C \end{array}$, modo che utilizzeremo anche nel seguito. Un esempio tipico di sillogismo è il seguente:

Tutti gli uomini sono mortali
<u>Tutti i greci sono uomini</u>
Tutti i greci sono mortali

che ti invitiamo a formalizzare e a dimostrarne la correttezza.
Quanti sono i possibili sillogismi?
Una classificazione di Pietro di Giuliano (1220-1277), meglio noto come Pietro Ispano, divenuto papa col nome di Giovanni XXI nel 1276, ne prevede diciannove suddivisi in quattro gruppi (o figure):
I figura: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*;
II figura: *Cesare, Camestres, Festino, Baroco*;
III figura: *Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison*;
IV figura: *Baralip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison*.
Diciamo innanzi tutto che i sillogismi di riferimento sono quelli della prima figura. Di questi strani nomi hanno importanza le lettere: le prime tre vocali indicano se le fbf considerate sono universali (*a* se affermative, *e* se negative; ad esempio 'tutti gli uomini sono mortali è un'universale affermativa, mentre 'nessun uomo è mortale' è un'universale negativa, equivalente a 'tutti gli uomini non sono mortali') oppure esistenziali (*i* se positive, *o* se negative; ad esempio 'esiste un uomo mortale' è un'esistenziale positiva, mentre 'non tutti gli uomini sono mortali', equivalente a 'esistono uomini non mortali' è un'esistenziale negativa)[7] e la prima consonante che indica per un sillogismo della seconda, terza o quarta figura il sillogismo della prima figura da cui deriva (quello con la stessa consonante iniziale). Inoltre nelle costruzioni dei sillogismi della II, III e IV figura hanno importanza le consonanti *s*, *p* e *m*. Non è questo l'ambito per una trattazione completa dei sillogismi; ci limiteremo a qualche esempio che permetta di capirne alcune strutture, soprattutto per quelli della prima figura[8].
Un sillogismo si compone di tre proposizioni di due termini: due premesse ed una conclusione. Nel complesso delle tre proposizioni compaiono solo tre termini. La struttura tipica di un sillogismo è la seguente, in cui la linea orizzontale separa le premesse dalla conclusione:

M.....P
S<u>......M</u>
S.......P

M è detto *termine medio* di un sillogismo ed ha la funzione di raccordare le due premesse, scomparendo nella conclusione (nell'esempio proposto in precedenza, tale ruolo è svolto da 'uomini'); con S abbiamo indicato il *soggetto* di un sillogismo (in quanto è il soggetto della conclusione, ruolo svolto, nel nostro caso, da 'Greci'), mentre con P abbiamo indicato il *predicato* del sillogismo (in quanto è il predicato della conclusione, ruolo svolto, nel nostro caso, da 'mortali'). Quello proposto è un tipico schema di sillogismo, in cui le varie proposizioni che lo

---

[7]Le vocali indicano il *modo* del sillogismo; in particolare le vocali a ed i, indicanti modi affermativi sono le prime vocali dal termine latino *affirmo*, mentre le vocali e ed o, indicanti modi negativi, sono le vocali di *nego*.
[8]Per chi volesse saperne di più può consultare il contributo di M.Mugnai **Per una storia della logica dall'antichità a Boole** apparso in "9 lezioni di logica-Ed. Muzzio, 1990".

compongono risultano opportunamente quantificate. La disposizione del termine medio caratterizza la figura del sillogismo. Se teniamo conto del fatto che la conclusione è sempre della forma “SP”, si ha che le possibili combinazioni delle premesse sono quattro, corrispondenti alle quattro figure sopra introdotte:

I	II	III	IV
M.....P	P.....M	M.....P	P.....M
$\underline{\text{S......M}}$	$\underline{\text{S......M}}$	$\underline{\text{M......S}}$	$\underline{\text{M......S}}$
S.......P	S.......P	S.......P	S.......P

Diamo infine le regole fondamentali per la costruzione dei sillogismi:

Regole sui termini:

a) il termine medio deve essere preso universalmente almeno in una premessa;

b) nessun termine può essere preso universalmente nella conclusione, senza che sia stato preso universalmente in una delle premesse.

Regole sulle proposizioni:

a) da premesse negative non segue alcuna conclusione;

b) se una premessa è negativa, la conclusione deve essere negativa; se una premessa è particolare, la conclusione deve essere particolare.

Formalizziamo, come esempio, i sillogismi della prima figura, utilizzando quanto detto a proposito dei nomi.

Il sillogismo di tipo *Barbara* è quello precedentemente proposto (tre proposizioni universali positive, come indicato dalle tre a presenti nel nome). Il sillogismo di tipo *Celarent* presenta tre proposizioni universali di cui due negative ed una positiva; sarà quindi del tipo

$$\begin{array}{c}\forall x(M(x)\rightarrow\neg P(x))\\ \underline{\forall x(S(x)\rightarrow M(x))}\\ \forall x(S(x)\rightarrow\neg P(x))\end{array}$$

Il sillogismo di tipo Darii si presenta nella forma

$$\begin{array}{c}\forall x(M(x)\rightarrow P(x))\\ \underline{\exists x(S(x)\wedge M(x))}\\ \exists x(S(x)\wedge P(x))\end{array}$$

Infine il sillogismo di tipo Ferio si presenta nella forma

$$\begin{array}{c}\forall x(M(x)\rightarrow\neg P(x))\\ \underline{\exists x(S(x)\wedge M(x))}\\ \exists x(S(x)\wedge\neg P(x))\end{array}$$

Proviamo ora a costruire un sillogismo della III figura, ad esempio il sillogismo di tipo Ferison.

Lo schema di riferimento è

$$\begin{array}{c}\text{M.....P}\\ \underline{\text{M......S}}\\ \text{S.......P}\end{array}$$

ed essendo le prime tre vocali *e, i* ed *o* la sua formalizzazione diventa

$$\begin{array}{c}\forall x(M(x)\rightarrow\neg P(x))\\ \underline{\exists x(M(x)\wedge S(x))}\\ \exists x(S(x)\wedge\neg P(x))\end{array}$$

Il fatto poi che il nome di tale sillogismo inizi con la lettera F, comporta che si possa dedurre dal sillogismo Ferio, come è piuttosto semplice vedere. Cerca ora tre proposizioni che possano essere formalizzate da questo sillogismo.

Ti invitiamo a fare quanto segue:

a) costruisci le altre forme dei sillogismi;

b) dimostra, almeno per i sillogismi della prima figura, che costituiscono schemi di ragionamento corretti;
c) trova delle frasi che possano tradurre questi sillogismi (magari di carattere matematico)
Attenzione! I sillogismi garantiscono la correttezza del ragionamento, senza entrare nel merito della verità delle premesse e della conclusione. Si possono avere sillogismi con premesse e conclusione false, ma formalmente corretti; ad esempio

Tutti i trapezi sono parallelogrammi
<u>Tutti i quadrilateri sono trapezi</u>
Tutti i quadrilateri sono parallelogrammi

(sillogismo di tipo Barbara) oppure da premesse false si può ottenere una conclusione vera:

Ogni triangolo rettangolo non è scaleno
<u>Ogni triangolo equilatero è rettangolo</u>
Ogni triangolo equilatero non è scaleno

(sillogismo di tipo Celarent).

15) Verifica se qualcuno dei ragionamenti (corretti) proposti negli esercizi 3B-13B rientra in qualche forma di sillogismo.

16) Costruisci un sillogismo del tipo Ferio che da premesse false porti ad una conclusione vera.

17) La filosofia scolastica medioevale aveva sviluppato molto la logica (come visto anche a proposito dei sillogismi) anche in funzione teologica. In particolare si volevano portare prove 'logiche' dell'esistenza di Dio. Tra queste ti segnaliamo il seguente ragionamento:
"Poiché ogni uomo ha un padre, allora esiste il padre di tutti gli uomini."
Il ragionamento è corretto (indipendentemente dall'esistenza o non esistenza di Dio)? Rispondi dopo averlo formalizzato nel linguaggio logico.
Il ragionamento inverso
"Se esiste il padre di tutti gli uomini allora tutti gli uomini hanno un padre"
è corretto? Dimostralo.

18) Immagina di interpretare le fbf seguenti nell'ambito della geometria euclidea ed i predicati (unari) P e Q siano interpretati come segue:
P(x): "x è un rombo"
Q(x): "x è un rettangolo".
Dopo aver tradotto nel linguaggio geometrico le seguenti fbf, stabilisci quali sono vere, motivando la risposta:
a) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ b) $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$ c) $\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$
d) $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ e) $\exists xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$ f) $\exists xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$
g) $\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$

19) Dimostra che $\models \forall xA(x)\rightarrow \exists xA(x)$

20) Dopo aver formalizzato la frase *Non tutti gli studenti sono bravi in matematica*, stabilisci, dopo averle formalizzate, quale tra le seguenti frasi è tautologicamente equivalente a quella data:
a) Alcuni studenti non sono bravi in matematica.
b) Tutti gli studenti non sono bravi in matematica.
c) Non tutti i bravi in matematica sono studenti.
d) Non tutti i bravi in matematica non sono studenti.

21) Stessa cosa dell'esercizio precedente per la frase *Non esistono persone buone o oneste* e per le frasi

a) Esistono persone non buone o non oneste.
b) Esistono persone cattive e disoneste
c) Tutte le persone sono cattive e disoneste
d) Tutte le persone sono cattive o disoneste.

22) Ti proponiamo una (semplice) teoria formale T col relativo linguaggio e la relativa assiomatizzazione.
L'alfabeto è costituito dal seguente insieme di simboli: A={a,b,*}.
Una fbf di T è una qualunque stringa (finita) di elementi di A iniziante con a o con b. Sono fbf ad esempio aa**b* , b , bbaab* mentre non lo sono * , *b*.
Diamo ora gli assiomi di T:
1) a 2) b
e le regole d'inferenza:
i) se A è un teorema, allora A*a è un teorema
ii) se A è un teorema, allora A*b è un teorema
iii) se A*a*a è un teorema, allora A*a è un teorema
iv) se A*a*b è un teorema, allora A*b è un teorema
v) se A*b*a è un teorema, allora A*b è un teorema
vi) se A*b*b è un teorema, allora A*a è un teorema.
Le regole d'inferenza permettono di 'distinguere' tra le fbf i teoremi dai non teoremi. In particolare le regole i) e ii) permettono di costruire teoremi 'più complessi' da teoremi più semplici, mentre le regole iii)-vi) fanno il contrario, cioè da teoremi più complessi permettono di passare a teoremi più semplici. Relativamente alla teoria T così proposta rispondi alle seguenti questioni:
a) quali fra le seguenti fbf sono teoremi di T
1) a*b*a*b 2) a*ba*a 3) b*a*a*a 4) a*b*a*b*a*a*b*b* ?
b) quanti e quali sono i teoremi di T 'indipendenti' (cioè non equivalenti ad altri teoremi)?
c) sapresti trovare almeno una interpretazione di T che la renda vera ?
d) sapresti trovare almeno una interpretazione di T che la renda falsa?

23) Immagina che i polinomi rispetto ad una variabile x siano fbf di un linguaggio formale. Fornisci l'alfabeto, gli assiomi e le regole d'inferenza di tale linguaggio. Che cosa si può dire dei coefficienti assunti dalle potenze di tali polinomi?

24) Considera l'enunciato A: $\forall x \forall y \forall z(P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow P(f(x,y),z))$, essendo P un predicato binario e f un simbolo funzionale binario. Interpreta tale enunciato in modo che x, y, z rappresentino insiemi, P la relazione di inclusione stretta tra insiemi (cioè, usando la terminologia del testo, $g(P(x,y))=x \subset y$) e f l'operazione di unione tra insiemi (cioè $g(f(x,y))=x \cup y$).
a) Questa interpretazione è un modello per A? Quale proprietà definisce?
Interpreta ora tale enunciato nell'insieme delle funzioni reali aventi come dominio $\Re$. Sia $g(P(x,y))= x>y$ (date due funzioni reali a variabile reale h e g diremo che $h>g$ se e solo se per ogni $x \in \Re$ $h(x)>g(x)$), mentre $g(f(x,y))=x \bullet y$ (in particolare, ricordiamo che date due funzioni reali a variabile reale h e g la funzione $k=h \bullet g$ è definita, per ogni $x \in \Re$, come $k(x)=h(x) \bullet g(x)$).
b) Questa interpretazione è modello di A? Dimostralo.
Modifica l'interpretazione del predicato P e del simbolo funzionale f nei due casi (insiemi e funzioni) affinché l'interpretazione insiemistica non risulti modello per A, mentre quella nell'insieme delle funzioni risulti modello per A.
Che cosa puoi quindi dire sulla verità, falsità o validità di A?

SEZIONE C: TEORIE COERENTI, COMPLETE, ECC.; MODELLI

1) Sia Σ l'insieme degli assiomi (tra loro indipendenti) di una teoria T del prim'ordine completa e coerente. Sia Σ' l'insieme degli assiomi precedenti privato di uno di detti assiomi e sia T' la teoria associata.
   a) T' è coerente?
   b) T' è completa?
   c) Gli assiomi di Σ' sono ancora indipendenti?

2) Sia M un modello per la teoria T del prim'ordine generata da un insieme Γ di assiomi. Supponi che in M sia vero l'enunciato A di T ($A \notin \Gamma$). Quali fra le seguenti affermazioni sono vere e quali false (motiva le risposte date)?
   a) $\vdash_T A$
   b) T è completa
   c) $\Gamma \cup \{A\}$ è indipendente
   d) $\vdash_T \neg A \rightarrow B$ essendo B una qualunque fbf del linguaggio di T.
   e) $A \vdash_T B \wedge \neg B$ essendo B una qualunque fbf del linguaggio di T.
   f) $\neg A \vdash_T B \wedge \neg B$ essendo B una qualunque fbf del linguaggio di T.

3) Sia Σ un insieme di assiomi e sia F un enunciato. Dimostra che se $\Sigma \cup \{F\}$ è indipendente, allora $\Sigma \cup \{\neg F\}$ è non contraddittorio.
   Dedurre che , se F è una formula tale che né F né $\neg F$ sono dimostrabili in una teoria coerente, allora si può aggiungere come assioma sia F sia $\neg F$, ottenendo due teorie ancora coerenti.

4) Una teoria del prim'ordine T è completa e non contraddittoria. Dimostra che se si aggiunge un altro assioma (sotto forma di enunciato) il sistema di assiomi che si ottiene è o contraddittorio o dipendente.

5) Considera un insieme $A=\{a,b\}$ con $a \neq b$. Struttura A con un'operazione * in modo che (A,*) sia un gruppo. Hai molte possibilità? Considera poi la struttura $(Z_2,+)$. Che relazione c'è tra (A,*) e $(Z_2,+)$?

6) L'esercizio precedente dovrebbe averti mostrato che esiste, di fatto, un solo gruppo con due elementi cioè $(Z_2 ,+)$ poiché tutti gli altri...gli assomigliano (sono 'uguali' a meno del nome degli elementi; in matematica si dice che sono **isomorfi**). Considera allora il seguente sistema di assiomi rispetto ad un insieme A qualunque:
   a) (A,*) è un gruppo;
   b) $\exists x \exists y(\neg(x=y) \wedge \forall z(z=x \vee z=y))$
   c) $\exists x \exists y \neg(x*x=y*y)$
   Che cosa 'dicono' gli assiomi b) e c)? La teoria T ottenuta considerando gli assiomi a), b) e c) ha un modello? E le tre teorie ottenute considerando una qualunque coppia di assiomi?

7) Sia M un modello per una teoria T del prim'ordine non contraddittoria e sia A un enunciato nel linguaggio di T. Quali fra le situazioni descritte nei seguenti casi si possono presentare?
   a) A è un teorema di T ed A è falsa in M;
   b) $\neg A$ è un teorema di T ed A è vera in M;
   c) A è un teorema di T ed A è vera in M;
   d) A è falsa in M ed A non è un teorema di T.
   e) A non è un teorema di T e A è vera in M.

8) Sia M un modello di un insieme di enunciati Σ e si supponga che in M sia soddisfatta un enunciato α. Quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre da quanto premesso?
   a) $\Sigma \vdash \alpha$
   b) non è vero che $\Sigma \vdash \neg\alpha$
   c) Σ è coerente
   d) $\Sigma \cup \{\alpha\}$ è completo

9) Sia Σ un insieme di assiomi e sia α un enunciato tale che $\Sigma \cup \{\alpha\}$ è indipendente. Quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre da quanto premesso?
   a) Σ è coerente
   b) $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ è coerente
   c) α non è un teorema della teoria generata da Σ
   d) $\neg\alpha$ non è un teorema della teoria generata da Σ

10) Sia T una teoria del prim'ordine completa, A un enunciato nel linguaggio di T e M un modello di T. Quali fra i seguenti casi si possono presentare? Quali invece si presentano sicuramente?
   a) Non $\models_M A$ e $\models_M \neg A$;
   b) $\models_M A$ e $\models_M \neg A$;
   c) $\models_M A$ oppure non $\models_M \neg A$;
   d) $\models_M A$ oppure $\models_M \neg A$;
   e) se $\models_M A$ allora non $\models_M \neg A$;
   f) se $\models_M A$ allora $\models_M \neg A$.

11) Sia A_n, per ogni n>1, la seguente formula
   $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(\neg(x_1=x_2)\wedge\neg(x_1=x_3)\wedge\ldots\ldots\wedge\neg(x_1=x_n)\wedge\neg(x_2=x_3)\wedge\ldots\ldots\wedge\neg(x_{n-1}=x_n))$
   Dopo aver verificato che A_n asserisce che "esistono almeno n elementi distinti", stabilisci quali dei seguenti sistemi di assiomi sono indipendenti, dipendenti o contraddittori, motivando la risposta:
   $I_1=\{A_3, A_5, A_9\}$ $\quad$ $I_2=\{A_4, \neg A_{10}\}$ $\quad$ $I_3=\{\neg A_7, \neg A_{13}\}$ $\quad$ $I_{4}=\{\neg A_5, A_8\}$
   Sapresti dire quali fra i sistemi d'assiomi non contraddittori presentati in precedenza ammettono un modello finito e quali invece un modello infinito?

12) Pensa al gioco degli scacchi come ad una teoria. Che cosa sono le fbf del linguaggio degli scacchi, secondo te? Ed i teoremi? Secondo te gli scacchi sono una teoria completa?

SEZIONE D: ALGEBRA ED INDUZIONE MATEMATICA

1) Riprendi la dimostrazione che ti è stata fatta al secondo anno della formula risolutiva delle equazioni di 2° grado e prova a ripercorrerne i passaggi pensando di muoverti in una classe di resti Z_n. Cerca di individuare i passaggi 'delicati' che possono mettere in discussione l'uso della formula.

Risolvi le seguenti equazioni negli insiemi numerici a fianco indicati:
(negli esercizi che seguono i coefficienti delle varie equazioni sono da intendere come abbreviazione della rispettiva classe nell'insieme a fianco indicato; così ad esempio 2 sta per [2])

2) $2x^2+3x+4=0$ in Z_{12}
3) $3x^3-5x^2+4=0$ in Z_8
4) $x^3-18x^2+2x-26=0$ in Z_{31}

5) x^2-x+5=0 in Z_{20}

Rispondi alle seguenti questioni:

6) Trova un'equazione di 2° grado che abbia in Z_{10} come soluzioni [7] e[9].
7) Trova, se possibile, un'equazione di 2° grado che abbia in Z_{16} come soluzioni [2],[3],[4]. Risolvi lo stesso problema in Z_{13}.
8) Stabilisci se le seguenti equazioni
   $x^2+2x+6=0$ e $3(x^2+2x+6)=0$
   sono equivalenti in
   a) Z_9 b) Z_8 c) Z_{15}
   Motiva i risultati trovati e, in base a quanto osservato, formula delle ipotesi sulle classi di resti in cui le due equazioni possono risultare equivalenti.

9) Risolvi l'equazione $x^2-2x+3=0$ in Z_6 nei seguenti modi:
   a) con la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado (ricorda che il rapporto fra due classi di resti può fornire più risultati);
   b) con la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado ridotta;
   c) col metodo del completamento al quadrato.
   Interpreta i risultati ottenuti, giustificando le eventuali differenze, e stabilisci semanticamente quali sono le reali soluzioni dell'equazione.

10) Supponi di introdurre in Z_8 la seguente relazione d'ordine:
   $[x]<[y]$ se e solo se $x<y$, essendo $0\leq x<7$ e $0\leq y<7$.
   Trova allora le soluzioni delle seguenti disequazioni:
   a) $x^2+3x\geq 4$ b) $x^2+3x-4\geq 0$
   Che cosa puoi concludere? Quali proprietà della relazione d'ordine '<' in Z non valgono in Z_8? Fai un esempio.
   Trova infine un modello M in cui l'enunciato
   $\forall x\forall y\forall z\forall k(P(x,y)\wedge P(z,k)\rightarrow P(f(x,z),f(y,k)))$
   risulti vero ed uno in cui risulti falso (interpreta opportunamente il predicato P ed il simbolo funzionale f).

11) Per risolvere una disequazione irrazionale del tipo
   $\sqrt{A(x)}<B(x)$ devi impostare, come sai, il seguente sistema:
   $$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)\geq 0 \\ A(x)<[B(x)]^2 \end{cases}$$
   Quali, fra le tre condizioni poste, sono di carattere sintattico e quali quelle di carattere semantico? La risoluzione del sistema è un problema sintattico o semantico? E il "modo" con cui lo risolvi?
   Giustifica le risposte date.

12) Ancora un problema sui sistemi. Considera un sistema lineare in due equazioni e due incognite e analizza il seguente metodo per classificarlo (con Δ, Δ_x, Δ_y indichiamo al solito i determinanti delle matrici dei coefficienti; inoltre in grassetto sono evidenziati dei termini di cui dovrai stabilire se sono concetti sintattici o semantici):
   "Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite in **forma normale** , si ha che
   se $\Delta\neq 0$, il sistema è **determinato**
   se $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, il sistema ha infinite soluzioni
   se $\Delta=0$ e ($\Delta_x\neq 0$ oppure $\Delta_y\neq 0$), il sistema è **impossibile** "

Questo metodo è sintattico o semantico? Attenzione! stiamo parlando del metodo che è usato per classificare il sistema, senza entrare nel merito dei termini (determinato, ecc.) con cui viene classificato.
Considera ora il seguente sistema e prova a risolverlo, senza utilizzare il metodo di classificazione sopra introdotto:

$$\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 6x-10y=-1 \end{cases}$$

Che tipo di sistema è? Come hai dedotto tale conclusione? Il metodo utilizzato, in questo caso, è sintattico o semantico?

Induzione matematica

13) Dimostra che per ogni $n \in N$ $n'=n+1$, essendo + l'operazione definita dagli assiomi N8, N9 e N11 e avendo posto $1=0'$.

14) Utilizzando il principio d'induzione dimostra che per ogni $n \in N$

$$0^2+1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

15) Dimostra che, per ogni $n \in N$, $n<2^n$.

16) Dimostra che la somma degli angoli di un poligono convesso di n+2 lati (con n>0) è uguale a n angoli piatti.

17) Dimostra le proprietà associativa e commutativa dell'addizione (nell'ordine) così com'è stata definita l'operazione negli assiomi dei numeri naturali introdotti nel testo.
(Suggerimenti: per dimostrare che $(a+b)+c=a+(b+c)$ effettua un'induzione su c; per la proprietà commutativa dimostra prima che, per ogni a, $a+0=0+a$, con un'induzione su a; successivamente dimostra che $a+b=b+a$ con un'induzione su b)

18) Trovare l'errore nella seguente dimostrazione per induzione della proprietà:
"Siano $a,b \in N$; per ogni $n \in N$, se $\max(a,b)=n$, allora $a=b$".
La proprietà vale per n=0; infatti se $\max(a,b)=0$, $a=0$ e $b=0$ da cui $a=b$.
Supponiamo che la proprietà valga per n e dimostriamola per n+1. Supponiamo che $\max(a,b)=n+1$. Poniamo $x=a-1$ e $y=b-1$. Allora $\max(x,y)=n$ per cui, per ipotesi induttiva, $x=y$; quindi $x+1=y+1$ da cui $a=b$."

19) Supponi che l'insieme dei numeri naturali sia definito dai seguenti assiomi:
a) 0 non è il successivo di alcun numero;
b) ogni numero ha uno ed un solo successivo;
c) se due numeri hanno successivi uguali sono uguali.
Sapresti trovare un modello per questo sistema di assiomi in cui non valga il principio d'induzione?

20) Utilizzando la definizione per induzione di potenza data nel testo, dimostra che per ogni $a,b,c \in N$, con $a>0$, $a^{b+c}=a^b \bullet a^c$.
(suggerimento: procedi con un'induzione su c)

21) Un classico esempio di induzione sul finito è costituito dal problema dei cappelli.
Supponi che tre persone siano sedute su tre sedie in fila indiana (ognuno vede solo quelli, o quello, che gli stanno davanti; le sedie sono numerate in modo progressivo e la sedia n°1 è

occupata dall'unico che vede gli altri due, mentre la sedia n°3 da colui che non vede nessuno degli altri due). Sono portati 5 cappelli: 3 bianchi e 2 neri. Le tre persone sono bendate e sulle loro teste viene messo uno dei 5 cappelli. Successivamente sono tolte le bende e viene chiesto a ciascuno di dire il colore del proprio cappello (ognuno vede il colore di quelli, o di quello, che gli stanno davanti, ma non il proprio, ovviamente). Alla domanda il n°1 risponde: "Non lo so"; anche il n°2 risponde "Non lo so". Il n°3, al proprio turno di risposta, risponde "Sì, so il colore del mio cappello".
Di che colore è il cappello del n°3? Quale ragionamento ha fatto per scoprirlo? E' possibile stabilire il colore dei cappelli delle altre due persone?
Generalizza il problema con un numero n qualunque di persone e con n cappelli bianchi e n-1 cappelli neri, stabilendo in particolare come deve mettere i cappelli il conduttore del gioco (colui cioè che pone i cappelli sulle teste delle persone) affinché solo il numero n individui il proprio colore.

SEZIONE E: PROBLEMI VARI

In questa sezione troverai problemi piuttosto anomali rispetto a quelli tradizionali in quanto si trovano a metà strada tra il divertimento e l'esercizio vero e proprio. Non cadere nella tentazione di andare a vedere subito la soluzione nel caso tu non la veda subito: con un po' di riflessione le cose risultano a volte meno complesse di quanto non sembrino. Soprattutto cerca 'un metodo' per arrivare a tale soluzione, eventualmente discutendone assieme ai tuoi compagni: qui non è in gioco un voto, ma il gusto di riuscire a trovare la strada corretta. Tieni in ogni caso presente che le soluzioni alla fine del capitolo...non scappano!
Per darti un'idea di come i concetti che hai appreso possano servirti per risolvere determinati problemi logici, partiamo con un esercizio svolto che ti può essere utile come traccia.

ESERCIZIO SVOLTO. Ci sono problemi di carattere logico che risulta in genere piuttosto arduo risolvere. La difficoltà, spesso, è data dall'incapacità di tradurli in un modo operativo. In alcuni casi ciò è possibile attraverso la costruzione di tavole di verità associate a particolari fbf. Consideriamo come esempio il seguente quesito, tratto da quella fonte pressoché inesauribile di problemi di questo tipo costituito dal libro "QUAL E' IL TITOLO DI QUESTO LIBRO" di R.Smullyan, da cui è tratto il problema proposto come esercizio svolto e gli esercizi 1)-22).
In un'isola ci sono due tipi di persone: i furfanti (mentono sempre) e i cavalieri (dicono sempre la verità). Su un'isola di questo tipo corre voce che vi sia sepolto dell'oro. Voi arrivate su quest'isola e chiedete ad uno dei nativi, A, se c'è oro su quest'isola. Egli dà la seguente risposta: 'Sull'isola c'è oro se e solo se io sono un cavaliere'. Stabilisci:
a) si può determinare se A è un cavaliere o un furfante?
b) si può determinare se c'è oro sull'isola?
Indicando con O la proposizione 'sull'isola c'è oro' e con C(a) la proposizione 'A è un cavaliere', la risposta fornita si formalizza con la fbf $O \leftrightarrow C(a)$, la cui tavola di verità è la seguente:

O	$\leftrightarrow$	C(a)
0	1	0
0	0	1
1	0	0
1	1	1

Come leggere la tavola di verità in relazione al problema? Poiché i cavalieri dicono il vero e i furfanti mentono, il valore di verità relativo alla formula atomica C(a) deve coincidere con quello del connettivo $\leftrightarrow$ (cioè se l'interlocutore è un cavaliere la proposizione dev'essere vera; viceversa se è un furfante) e questo succede solo in corrispondenza delle ultime due righe. Non è possibile stabilire quindi se stiamo parlando con un cavaliere o con un furfante, ma è certo che sull'isola c'è dell'oro.

☺1) Supponiamo che, nel caso del problema precedente, tu abbia chiesto ad A: "L'affermazione che tu sei un cavaliere è equivalente all'affermazione che c'è oro su quest'isola?". Se avesse risposto "Sì" il problema si sarebbe ridotto al precedente. Supponiamo che abbia risposto "No". Si potrebbe allora dire se c'è oro sull'isola?

☺2) Supponiamo che una persona, di cui non si sa se è un cavaliere o un furfante, faccia le seguenti affermazioni:
a) Io amo Linda;
b) Se amo Linda allora amo Kathy.
E' un cavaliere o un furfante?
(Suggerimento: formalizzando con L la a) e con $L \to K$ la b), costruisci la tavola di verità di $L...L \to K$, dopo aver stabilito il connettivo da mettere al posto dei puntini)

☺3) Supponiamo che qualcuno mi chieda: "E' proprio vero che se tu ami Betty allora ami anche Jane?". Io rispondo: "Se è vero, allora amo Betty". Ne segue che amo Betty? Ne segue che amo Jane?

☺4) Supponiamo che le due seguenti proposizioni siano vere:
a) Io amo Betty o amo Jane.
b) Se amo Betty allora amo Jane.
Ne segue necessariamente che io amo Betty?
Ne segue necessariamente che io amo Jane?

☺5) Abbiamo due persone, A e B, ognuna delle quali è un cavaliere o un furfante. Supponiamo che A faccia la seguente affermazione: "Se io sono un cavaliere, allora lo è anche B". Si può determinare che cosa sono A e B?

☺6) Qualcuno chiede ad A: "Siete un cavaliere?". Egli risponde: "Se sono un cavaliere, allora mi mangerò il cappello!".
Dimostrare che A deve mangiarsi il cappello.

☺7) A dice: "Se io sono un cavaliere, due più due fa cinque". Che cosa concludi?

☺8) A dice: "O io sono un furfante oppure due più due fa cinque". Che cosa concludi?

☺9) Ci sono due persone A e B, cavalieri o furfanti. A dice: "Se B è un cavaliere, io sono un furfante". Che cosa sono A e B?

☺10) Supponiamo che A dica: "O io sono un furfante o B è un cavaliere". Che cosa sono A e B?

☺11) Supponiamo che A dica: "Io sono un furfante, ma B non lo è". Che cosa sono A e B?

☺12) Una volta, quando visitai l'isola dei cavalieri e dei furfanti, mi imbattei in due abitanti che riposavano sotto un albero. Chiesi a uno di loro: "Uno di voi due è un cavaliere?" Egli rispose e **seppi** la risposta alla mia domanda. Cos'è la persona a cui feci la domanda? E che cos'è l'altro?

☺13) Ci sono tre persone A, B, C ognuna delle quali è un cavaliere o un furfante. A e B fanno le seguenti affermazioni:
A: Siamo tutti furfanti.
B: Solo uno di noi è un cavaliere.

Che cosa sono A, B e C?

☺14) Supponiamo invece che A e B facciano le seguenti affermazioni:
A: Siamo tutti furfanti.
B: Solo uno di noi è un furfante.
Si può determinare che cos'è B? Si può determinare che cos'è C?

☺15) Due individui X e Y sono processati per aver partecipato ad un furto. A e B sono testimoni e ognuno di essi è un cavaliere o un furfante. I testimoni fanno le seguenti dichiarazioni:
A: Se X è colpevole lo è anche Y.
B: O X è innocente o Y è colpevole.
A e B sono necessariamente dello stesso tipo? (ambedue cavalieri o ambedue furfanti)

☺16) Sull'isola dei furfanti e dei cavalieri, tre abitanti A,B, C sono intervistati. A e B fanno le seguenti affermazioni:
A: B è un cavaliere.
B: Se A è un cavaliere lo è anche C.
Si può determinare che cosa sono A, B e C?

Alcuni problemi di deduzione:

☺17) Ci sono tre ragazze: Susanna , Marzia e Diana. Supponiamo che siano vere le seguenti affermazioni:
a) Io amo almeno una delle tre ragazze.
b) Se amo Susanna ma non Diana, allora amo anche Marzia.
c) O io amo sia Diana che Marzia, o nessuna delle due.
d) Se amo Diana, allora amo anche Susanna.
Quali ragazze amo?

☺18) Supponiamo che vi siano due isole vicine, ognuna delle quali abitata esclusivamente da cavalieri e furfanti. Ti è detto che in una delle due isole c'è un numero pari di cavalieri e che nell'altra isola essi sono in numero dispari. Ti viene anche detto che c'è oro nell'isola contenente un numero pari di cavalieri, ma che non c'è oro nell'altra isola. Scegli a caso una delle due isole e ci vai. Tutti gli abitanti sanno quanti cavalieri e quanti furfanti vivono nell'isola. Interroghi tre abitanti A, B e C ed essi fanno le seguenti dichiarazioni:
A: Su quest'isola c'è un numero pari di furfanti.
B: In questo momento c'è un numero dispari di persone sull'isola.
C: Io sono un cavaliere se e solo se A e B sono dello stesso tipo.
Supponendo che tu non sia né un cavaliere né un furfante e che al momento tu sia l'unico visitatore dell'isola, c'è oro o no sull'isola?

☺19) Un uomo era processato per furto. Il pubblico ministero e l'avvocato difensore fecero le seguenti affermazioni:
Pubblico Ministero: 'Se l'imputato è colpevole, allora ebbe un complice'.
Avvocato difensore: 'Non è vero!'
L'uomo fu condannato. Perché?

☺20) Tre uomini A, B e C furono processati per furto. Furono accertati i seguenti fatti:
a) se A è innocente o B è colpevole, allora C è colpevole;
b) se A è innocente, allora C è innocente.
Si può stabilire per ognuno dei tre se è colpevole o innocente?

☺21) In questo caso sono coinvolti quattro imputati A, B, C e D. Furono accertati i seguenti fatti:
a) se A è colpevole, allora B fu suo complice;
b) se B è colpevole, allora o C fu suo complice oppure A è innocente;
c) se D è innocente, allora A è colpevole e C è innocente;
d) se D è colpevole, lo è anche A
Chi è colpevole e chi innocente?

☺22) "Che cosa riesce a dedurre da questi fatti?" chiese l'ispettore Craig al sergente McPherson.
a) se A è colpevole e B innocente, allora C è colpevole;
b) C non lavora mai da solo;
c) A non lavora mai con C;
d) nessun altro tranne A, B e C era implicato e almeno uno di essi era colpevole.
Il sergente si grattò la testa e disse : "Non molto, temo. Lei riesce a dedurre da questi fatti chi è innocente e chi colpevole?"
"No" rispose Craig, "ma c'è materiale sufficiente per incriminare con certezza uno di essi".
Di chi si può affermare che è colpevole senza sbagliare?

☺23) Supponi di avere quattro carte, due coperte e due scoperte. Sulle due scoperte c'è il cinque di picche e il quattro di quadri; le due coperte presentano un dorso blu ed un dorso rosso. Quante e quali carte devi girare per stabilire se l'affermazione "Se una carta ha il dorso blu è dispari" è vera?

☺24) 'Uno è bugiardo' disse Cucciolo.
'Due sono i bugiardi' disse Brontolo.
'Tre sono i bugiardi' disse Eolo.
'Quattro sono i bugiardi' disse Mammolo.
'Cinque sono i bugiardi' disse Pisolo.
'Sei sono i bugiardi' disse Dotto.
'Sette sono i bugiardi' disse Gongolo.
'Otto sono i bugiardi' disse Biancaneve.
Chi dice la verità?

☺25) Quattro persone A, B, C, e D fanno le seguenti coppie di affermazioni. Una delle due è vera, mentre l'altra è falsa:
A: "Io sono un rospo trasformato in principe. Almeno tre di noi sono rospi"
B: "Due di noi sono rospi. Io sono un principe"
C: "Io sono un principe. D mente sempre"
D: "Solo uno di noi è un rospo. Io sono un rospo trasformato in principe"
Ci sono rospi? Chi sono?

☺26) Lewis Carroll, l'autore di 'Alice nel paese delle maraviglie', era anche un illustre logico. Quella che segue è una sequenza di frasi da lui inventata da cui si deve trarre una conclusione che discenda da tutte:
a) Gli unici animali di questa casa sono gatti[9].
b) Ogni animale che ami guardare la luna è addomesticato.
c) Quando io detesto un animale lo evito.
d) Nessun animale è carnivoro, a meno che non vada in giro di notte.
e) Nessun gatto si astiene dall'uccidere i topi.
f) Nessun animale mi appartiene eccetto quelli che sono in questa casa.
g) I canguri non sono addomesticabili.
h) Nessun animale, eccettuati i carnivori, uccide i topi.

[9]Nel testo originale si parla di felini, con qualche difficoltà per la correttezza della deduzione.

i) Io detesto gli animali che non mi appartengono.
l) Gli animali che vanno in giro di notte amano sempre guardare la luna.
Qual è la conclusione?

☺27) Ti potrà capitare, andando in paesi esotici, di imbatterti in tribù poco comprensive nei confronti di chi invade a loro insaputa il loro territorio. Una di queste tribù, che ritiene sacro il proprio habitat, per preservarlo condanna a morte chiunque lo violi, lasciando però al condannato la scelta se essere immolato al Dio della menzogna o al Dio della verità. Nel primo caso il malcapitato dovrà dire una bugia, nel secondo caso una verità. Quale risposta dovresti dare per salvarti nel caso ti imbattessi in questa tribù?

☺28) Nella tribù vicina a quella citata nel problema precedente si preferisce andare sul sicuro, pur lasciando agli usurpatori una parvenza di speranza. Ai prigionieri sono presentate due arance perfettamente uguali all'esterno, ma una con la polpa bianca, l'altra con la polpa rossa. Se il prigioniero sceglie l'arancia con la polpa rossa è sacrificato al Dio che protegge il territorio, se sceglie quella con la polpa bianca viene liberato. Apparentemente la vita è affidata al caso; ma lo stregone, appunto per non correre rischi, porta sempre al prigioniero due arance con la polpa rossa. Ora lo sai: se quindi malauguratamente invadi il territorio di quella tribù, come potresti fare per salvarti **sicuramente**? (ricorda, a scanso d'equivoci, che lo stregone è sacro e che mettere in discussione la sua autorità, ad esempio tagliando le due arance per smascherarlo, è ancor più grave che oltrepassare i loro confini).

☺29) Durante una cena quattro amici A, B, C e D discutono, come al solito, di politica:
"Alcuni politici sono disonesti, ma non tutti" sostiene A.
"Sicuramente esiste un politico onesto" sostiene B.
"Vi garantisco che sono tutti disonesti" sostiene C.
"E tu che cosa ne pensi?" chiesero a D.
"Non ho abbastanza esperienza in fatto di politica e di politici per rispondere. So solo che delle tre affermazioni che avete fatto due possono essere entrambe vere, ma non entrambe false; viceversa due possono essere entrambe false, ma non entrambe vere".
Sapresti dire anche tu quali sono queste due coppie di affermazioni?

SOLUZIONI

SEZIONE A.

5) **Non** sono fbf: a (manca un connettivo), c (è quantificata da $\forall$ una variabile non libera), d (sull'antecedente mancano delle parentesi per assegnare la priorità ai connettivi), f (manca una parentesi), h (mancano due parentesi: non si capisce qual è il connettivo principale), i (vedi c), l (vedi f).
6)
12) c
14) Mangio.
15) Ha preso le patatine.
16) Non è andato in banca e non l'hanno preso
17) Dipende...Fai un'indagine nella tua classe (da un punto di vista logico, Mario non doveva andare in vacanza)
18) Il triangolo T non è rettangolo.

SEZIONE B.

3) corretto 4) non corretto 5) Sì 6) corretto
7) corretto 8) corretto 9) corretto 10) corretto
11) corretto/non corretto 12) non corretto 13) non corretto
14) a) corretto ; b) corretto ; c) corretto/non corretto
18) Sono vere: b, c, f, g
19) Per il teorema di conseguenza tautologica conviene dimostrare che $\forall xA(x) \models \exists xA(x)$. Sia quindi M un modello di $\forall xA(x)$; allora....
20) a
21) c
22) a) 1 e 3 b) sono due: a e b
c) Una possibile interpretazione di T può essere la regola dei segni nei prodotti: ponendo g(a)=+, g(b)=- e g(*)='prodotto', si ritrova appunto la regola dei segni solita. Un'altra possibile interpretazione è data da Z_2 in cui g(a)=0, g(b)=1 e g(*)='somma'.
d) Ad esempio Z_2 in cui g(*)='prodotto'.
25) a) sì
b) no (ad esempio f(x)=5, g(x)=-1 e h(x)=-2)

SEZIONE C.

1) a) sì b) no c)sì
2) Sono vere: a (poiché per T vale il teorema di completezza), d ($\neg A$ è falsa in M, per cui $\neg A \rightarrow B$ è vera in M e quindi è un teorema di T), f (stessa motivazione di d, con il teorema di deduzione).
Sono false: c (essendo A vera in M, è un teorema di T e quindi deducibile dagli assiomi di Γ), e.
Su b nulla si può dire.
3) Se, accettando $\neg F$ si arriva ad una contraddizione, allora abbiamo una dimostrazione per assurdo di…..
Per la seconda parte, un esempio è costituito dal postulato delle parallele e dalla teoria formata dagli assiomi della geometria euclidea.
4) Sia A l'enunciato aggiunto. Essendo T completa, o A è un teorema di T (per cui il nuovo sistema di assiomi ottenuto aggiungendo agli assiomi di T A è dipendente) oppure $\neg A$ è un teorema per cui aggiungendo agli assiomi di T A si ottiene un sistema contradditorio.
6) L'assioma b afferma che A ha solo due elementi distinti; l'assioma c è evidente. Per quanto osservato nell'esercizio precedente, tutti i gruppi di due elementi sono isomorfi a $(Z_2,+)$ e poiché in Z_2 1+1=0=0+0, non esiste un modello per il sistema di assiomi {a, b, c}. Il sistema d'assiomi {a,b} ammette Z_2 come modello (ed è l'unico modello, a meno di isomorfismi), {a,c} ammette come

modello (Z_5 ,+) (non è l'unico; cercane altri), mentre {b,c} ammette come modello, ad esempio, (Z_2, •), avendo indicato con • il prodotto in Z_2.
7) c, d
8) a, b
9) tutti
10) Si può presentare a; si presentano sicuramente: c, e.
11) I_1: dipendente; I_2: indipendente; I_3 : dipendente; I_4: contraddittorio.
I_1 ha modelli infiniti, mentre I_2 ed I_3 hanno solo modelli finiti (il primo con un numero di elementi che può andare da 4 a 9, il secondo con al massimo 6 elementi)

SEZIONE D.
2) S={[4],[8]}
3) S={[2],[3],[6]}
4) S={[3].[5],[10]}
5) S=∅
6) Ad esempio $x^2-6x+3=0$
7) Il problema ha soluzione in Z_{16} : ad esempio $8(x^2-5x+6)=0$. Non ha soluzione in Z_{13}, essendo (Z_{13},•) privo di divisori dello zero.
13) Tale proprietà è una banale conseguenza degli assiomi N8 ed N9. Infatti, particolarizzando tali assiomi con n e 0 si ha che n'=(n+0)'=n+0'=n+1
17) Ti lasciamo da dimostrare la proprietà associativa. Dimostriamo che, per ogni a∈N, a+0=0+a.
La proprietà vale per 1: infatti 1+0=1 (dall'assioma N8) e 0+1=0'=1, per cui 1+0=0+1 (base induttiva). Supponiamo che la proprietà valga per a; dimostriamo che vale per a+1=a'
(a+1)+0=a+(1+0)= a+(0+1)= (a+0)+1= (0+a)+1=0+(a+1)
dove la prima, terza e quinta uguaglianza sono giustificate dalla proprietà associativa della somma; la seconda e la quarta rispettivamente dalla base e dall'ipotesi induttiva.
Dimostriamo ora che per ogni b∈N a+b=b+a. Per induzione su b:
la proprietà vale per 0 per dimostrazione precedente (base induttiva);
supponiamo valga per b e dimostriamo che vale per b+1 (omettiamo le giustificazioni sulle uguaglianze quando queste risultano ovvie):
a+(b+1)= (a+b)+1=(b+a)+1=b+(a+1)=b+a'=b'+a=(b+1)+a
dove la quinta uguaglianza è giustificata dalla proprietà di scambio del successivo.
18) L'errore consiste nel porre x=a-1 e y=b-1, poiché tale sottrazione si può fare solo se a e b sono maggiori di 0, mentre la proprietà che si pretende di dimostrare deve partire proprio da 0.
19) Innanzi tutto, una riflessione: mancando il principio d'induzione, manca la possibilità di estendere a tutti i numeri naturali proprietà che, valendo per 0 e, supposto valgano per n, valgano per il successivo. In quest'ottica non è possibile definire in N operazioni quali somma, prodotto e potenza o dimostrare proprietà essenziali di tali operazioni come ad esempio l'associativa e la commutativa della somma.
Trovare un modello in cui valgano questi assiomi, che definiscono le proprietà della funzione successione, senza che valga l'induzione non è facile, in quanto l'induzione è strettamente legata all'insieme dei numeri naturali. Un possibile modello potrebbe essere il seguente: consideriamo N e associamo lo 0 degli assiomi allo 0 di N. Definiamo la funzione successivo in questo modo:
∀x(x'=x+2), essendo + la somma in N. Non è difficile osservare che tale funzione soddisfa gli assiomi presentati nell'esercizio, quindi quello proposto è un modello per tale sistema d'assiomi. Prima di proseguire, è d'obbligo una riflessione: può sembrare strano l'aver utilizzato N, così come lo conosciamo, per individuare N! Ma la cosa non è così: stiamo usando N per costruire un modello del sistema d'assiomi proposto, il quale non è detto che fornisca N! Così posso proporre funzioni successivo 'strane', purché verifichino gli assiomi.
Considera ora, all'interno di questo modello, la proprietà α(n): ∃x(n=2•x).
La proprietà vale per 0: basta prendere x=0. Supponiamo valga per n e sia m tale che n=2•m; allora

$n'=n+2=2\bullet m+2=2\bullet(m+1)$. Quindi vale $\alpha(0)$ e $\forall n(\alpha(n)\rightarrow \alpha(n'))$, ma la proprietà non vale per tutti i numeri naturali, poiché non è soddisfatta dai numeri dispari (la cui presenza in N, bada bene, non contraddice gli assiomi).
20) Il n°3 ragiona in questo modo: "Se il n°1 avesse visto due cappelli neri avrebbe dedotto che il suo è bianco; ha quindi visto o due cappelli bianchi o un bianco ed un nero. Se il n°2 avesse visto sulla mia testa un cappello nero avrebbe dedotto che il suo è bianco, dall'impossibilità del n°1 di dedurre il colore del suo cappello; poiché anche il n°2 non è riuscito a dedurre il colore del suo cappello, posso concludere che il mio cappello è bianco". Per gli altri due, invece, non c'è modo di stabilire il colore del proprio cappello.
Prima di proseguire nella lettura, prova a generalizzare il problema, se non l'hai già fatto.
Innanzi tutto una considerazione sulla disposizione dei cappelli: per poter indovinare il colore del proprio cappello (che può essere solo bianco!) una persona deve vedere davanti a sé solo cappelli neri (prova a fare qualche esempio con una disposizione qualunque di cappelli su un numero di 4 o 5 persone), dopo di che il tipo di ragionamento è analogo e si riferisce al tipo di configurazione che deve vedere la k-esima persona per potersi salvare. Se quindi il conduttore del gioco (colui che pone i cappelli sulle varie teste) vuole che solo l'ultimo possa stabilire il colore del suo cappello non deve mettere, da un certo punto in poi, solo cappelli neri.
Il tipo di ragionamento proposto sfrutta in fondo un'induzione sul finito e proprio per questo un'induzione particolare: l'ultimo della fila arriva a stabilire il colore del proprio cappello dal fatto che ciascuno di quelli che lo precedono non riesce a farlo. In sostanza la proprietà "Non conosco il colore del mio cappello" che vale per la prima persona della successione e se vale per la persona k-esima vale anche per la persona k+1-esima, vale per tutte tranne che per l'ultima persona della fila. D'altra parte il fatto di avere un numero finito di elementi impedisce che proprio tutti godano della stessa proprietà (se la fila fosse formata da infinite persone nessuno riuscirebbe a dedurre il colore del proprio cappello), rendendo anomalo proprio l'ultimo, l'unico cioè che non ha un successore che possa godere della sua stessa proprietà. In questo caso l'induzione sul finito presenta un'anomalia rispetto a quella "normale", se si pensa al principio d'induzione come ad una fila di buste ciascuna delle quali contenente l'istruzione "Apri la busta successiva, leggine l'ordine ed eseguilo" (il paragone è di Hugo Steinhaus). L'elemento senza successore non può avere questa possibilità per cui, per l'ultimo elemento l'istruzione (o se si vuole la proprietà) deve cambiare.
Un'ultima osservazione sul principio d'induzione. Al di là di questa anomalie, è possibile fare anche induzioni sul finito, quando la verifica 'diretta' di una proprietà (possibile, trattandosi di un numero limitato di elementi) risulta comunque scomoda o necessita di una generalizzazione. Questo inoltre farebbe pensare ad un contesto più "reale", visto che la realtà è appunto "al finito". Attento però a non confondere l'induzione matematica, frutto di un ragionamento (come nel caso del problema dei cappelli), con un'induzione empirica, frutto dell'osservazione di un'esperienza la cui ripetitività per un certo numero di prove non garantisce, in assoluto, il successo all'ennesima prova.
Per chiarirci, vediamo due esempi. L'affermazione "Il 10 gennaio 2100 sorgerà il sole" ha un'alta probabilità di verità, pensando al gran numero di albe passate che possano giustificare la verità di tale affermazione, anche se nulla toglie che una cometa gigante (come vuole la mitologia di Immanuel Velikovsky) faccia fermare la rotazione della Terra e rimanere il Sole ancora su Giberon.
Più esplicita, sui rischi dell'induzione empirica, è questa storiella: un tacchino osservò che tutte le mattine un uomo gli portava il mangime. Cambiò la stagione e l'uomo continuò a portargli il mangime. Un giorno nevicò e ciò nonostante l'uomo gli portò il mangime. Dopo varie prove di questo tipo in diverse condizioni di tempo in cui l'uomo gli aveva portato il mangime, il tacchino concluse che l'uomo gli avrebbe sempre portato il mangime. Il giorno dopo l'uomo lo prese e gli tirò il collo.
Queste considerazioni non devono però far rigettare, in assoluto, un metodo (quello appunto dell'induzione empirica) la cui utilità e i cui risultati hanno ampiamente confermato, anche in campo matematico, la legittimità di certe applicazioni: pensa ad esempio ai processi di estrapolazione tipici di certe indagini di mercato o di certe analisi statistiche, in cui, pur avendo a

che fare con un insieme finito, problemi di costi impediscono un'indagine nominale. Tutto questo per dire dell'esigenza, come in tutte le cose, di guardare agli strumenti della matematica in modo critico quando li si applica, valutandone le potenzialità ed i limiti per evitare di far 'loro dire' cose che non le attengono.

SEZIONE E.

1) In questo caso occorre confrontare la terza colonna con la seconda negata. Anche in questo caso non si riesce a stabilire con chi si parla, ma si scopre che non c'è oro sull'isola.
2) Costruendo la tavola di verità della congiunzione delle due affermazioni ci si accorge che l'unico caso possibile è che siano entrambe vere, per cui l'interlocutore è un cavaliere.
3) Costruisci la tavola di verità della fbf $(B \to J) \to B$ (con ovvio significato dei simboli) e considera le (due) righe in cui la fbf risulta vera. In entrambe queste righe, B risulta vera, mentre J risulta una volta vera ed una falsa. Quindi amo Betty, mentre nulla si può dire su Jane.
4) Costruisci la tavola di verità della fbf $(B \lor J) \land (B \to J)$ e considera le righe in cui la fbf risulta vera. In entrambi i casi J risulta vera, mentre B una volta vera ed una falsa. Quindi amo Jane mentre nulla si può dire di Betty.
5) Considera la fbf $C(a) \to C(b)$ dove C(a) sta per 'A è un cavaliere' e C(b) per 'B è un cavaliere' e costruiscine la tavola di verità. Se A è un cavaliere, la fbf deve essere vera quando C(a) è vera, mentre deve essere falsa quando C(a) è falsa; questo secondo caso non si verifica mai, mentre per il primo si ha solo un'opportunità. Quindi A e B sono cavalieri.
6) Analogo al precedente; tutte le affermazioni che cominciano con "Se sono un cavaliere..." sono fatte effettivamente da un cavaliere e sono perciò vere, come pure il conseguente.
7) Concludi che l'autore ha preso un'insolazione: una tale affermazione non potrà mai essere fatta per quanto detto nella risposta precedente.
8) E' equivalente a quella dell'esercizio precedente.
9) Indicato con C(a) 'io (A) sono un cavaliere', considera la tavola di verità della fbf $C(b) \to \neg C(a)$ e cerca le righe in cui la fbf e C(a) sono entrambi veri o entrambi falsi. Si verifica solo il primo caso in corrispondenza del quale si osserva che B è un furfante (C(b) è falsa).
10) Equivalente alla frase dell'esercizio 5.
11) Costruisci la tavola di verità della fbf $\neg C(a) \land C(b)$; devono coincidere i valori di verità della fbf con quelli di C(a). L'unico caso che si presenta porta a concludere che A e B sono furfanti.
12) Costruisci la tavola di verità di $C(a) \lor C(b)$. Supponiamo che la domanda sia stata rivolta ad A (è indifferente). Se A risponde sì può essere un cavaliere (e B cavaliere o furfante) o un furfante (e B furfante). Queste eventualità corrispondono a tre righe della tavola di verità e comportano possibilità che **impediscono** di conoscere la risposta alla domanda. Poiché tale risposta è nota, A deve aver risposto 'No' e quindi A è un furfante e B un cavaliere (quarto caso della tavola di verità).
13) A è un furfante (un cavaliere non potrebbe mai fare un'affermazione così) e quindi non tutti sono furfanti. Se B fosse un furfante, allora sarebbero tutti furfanti (cosa esclusa in precedenza) o ci sarebbero due cavalieri (non tre, poiché A è un furfante, come detto). Ma allora B dovrebbe essere un cavaliere, contro l'ipotesi che sia un furfante. Quindi B è un cavaliere (l'unico) e C un furfante.
14) A è un furfante, come prima. B potrebbe essere un cavaliere o un furfante (verificalo!), ma C è senz'altro cavaliere (in entrambi i casi).
15) Le due frasi sono equivalenti, quindi A e B sono dello stesso tipo.
16) Costruisci la tavola di verità di B: $C(a) \to C(c)$ corrispondente all'affermazione di B. Occorre cercare una riga in cui C(a) e B assumono lo stesso valore (se A è un furfante anche B lo è). L'unico caso è quello in cui C(a) è vero e B è vera, per cui sono tutti e tre cavalieri.
17) Amo tutte e tre le ragazze. Infatti se non amassi Diana non amerei neppure Marzia (c) e quindi amerei Susanna (a). Ma se amo Susanna e non amo Diana allora amerei Marzia (b) e questo è assurdo. Quindi amo sia Diana che Marzia e per la premessa (d) amo anche Susanna.

Questa, al di là delle apparenze, non è una dimostrazione per assurdo. il presupposto da cui parte è che se ho una premessa disgiuntiva si deve verificare una delle due condizioni (in questo caso non è possibile che si verifichino entrambe): se non è possibile che se ne verifichi una, deve verificarsi l'altra. Fatta in modo formale la dimostrazione risulterebbe piuttosto complessa.
18) Come visto in precedenza tutte le frasi del tipo "se io sono un cavaliere..."sono vere e dette da cavalieri quindi C è un cavaliere. A e B sono quindi o entrambi cavalieri o entrambi furfanti. Nell'affermazione di B, qualunque cosa lui sia, occorre tenere presente che tra le persone sull'isola ci sei anche tu (che non sei né cavaliere né furfante). Se B è un furfante i cavalieri più i furfanti sono in numero dispari sull'isola (mente, quindi le persone presenti sono in numero pari; tolto tu ne rimangono un numero dispari); anche A mente, quindi i furfanti sono in numero dispari, per cui i cavalieri sono in numero pari. Alla stessa conclusione si perviene anche nel caso si suppongano A e B cavalieri (prova!) per cui sull'isola c'è dell'oro.
19) La negazione dell'affermazione del Pubblico Ministero è equivalente ad affermare che l'imputato è colpevole e non aveva complici. L'avvocato difensore, in seguito, dovette cambiare mestiere per mancanza di clienti.
20) Le premesse sono (indicando con C(x) la proposizione 'x è colpevole'):
a) $\neg C(a)\vee C(b)\rightarrow C(c)$
b) $\neg C(a)\rightarrow\neg C(c)$
Questo tipo di problema (ed il successivo) si presta ad una risoluzione di tipo formale, ma forse è meglio semplificarla, senza perdere di vista gli assiomi o le regole d'inferenza (anche derivate) utilizzate. Da a si deduce, utilizzando gli assiomi 1 e 7, $\neg C(a)\rightarrow C(c)$ (e); da b ed e, utilizzando l'assioma 9, si deduce $\neg C(a)\rightarrow C(c)\wedge\neg C(c)$, da cui, dall'assioma 12, si deduce C(a) e questa è l'unica certezza.
21) Le premesse sono (utilizzando la notazione precedente):
a) $C(a)\rightarrow C(b)$
b) $C(b)\rightarrow C(c)\vee\neg C(a)$
c) $\neg C(d)\rightarrow C(a)\wedge\neg C(c)$
d) $C(d)\rightarrow C(a)$
Dalla premessa c si deduce, utilizzando gli assiomi 3 e 7 che $\neg C(d)\rightarrow C(a)$ (e); da e e da d, utilizzando gli assiomi 8 e 13, si deduce C(a), cioè che A è colpevole; da a per MP si deduce che B è colpevole. Da b si deduce che C è colpevole; da c, utilizzando la sua contronominale, si deduce che anche D è colpevole.
Osserva che in questo ragionamento non si è mai parlato di verità in quanto ci si è mossi sempre in un ambito sintattico.
22) Da a e c si deduce che non può essere A colpevole e B innocente, quindi dev'essere $\neg C(a)\vee C(b)$. Se C è colpevole, anche B lo è (dalla b e dalla c). Se C è innocente, indipendentemente dall'innocenza o colpevolezza di A, B sarebbe colpevole (se anche A fosse innocente la colpevolezza di B si dedurrebbe da d). Quindi B è sicuramente colpevole.
Quella proposta è una tipica dimostrazione per casi che hai già trovato in altri contesti matematici (ad esempio, quando devi dimostrare delle proprietà dei numeri naturali in cui occorre fare la distinzione tra numeri pari e numeri dispari).
23) Ovviamente la carta con il dorso blu (che deve essere dispari), ma anche il quattro di quadri (che deve avere il dorso rosso) in quanto l'affermazione fatta è equivalente a "Se una carta è pari ha il dorso rosso". E' del tutto inutile girare le altre carte.
24) Ovviamente Gongolo.
25) La coppia di frasi da cui partire è quella detta da C: poiché la seconda è falsa (per ipotesi una delle affermazioni di D è vera), la prima è vera. La seconda affermazione di A è falsa (se fosse vera, dovrebbe essere vera anche la prima, non essendo C un rospo), quindi la prima è vera. Se la seconda affermazione di D fosse vera, le due affermazioni di B sarebbero entrambe vere. Quindi c'è solo un rospo, che è A.

26) La conclusione è: “Io evito i canguri”. Ci si può arrivare considerando nell’ordine le seguenti proposizioni:
da a-e: tutti gli animali di questa casa uccidono i topi (m)
da m ed h: tutti gli animali di questa casa sono carnivori (n)
da n e d: tutti gli animali di questa casa vanno in giro di notte (o)
da o e f: tutti gli animali che mi appartengono vanno in giro di notte (p)
da p ed l: tutti gli animali che mi appartengono amano guardare la luna (q)
da q e b: ogni animale che mi appartiene è addomesticato (r)
da r e g: i canguri non mi appartengono (s)
da s e i: io detesto i canguri (t)
da t e c: io evito i canguri.
27) Basta dire una frase indecidibile, ad esempio “Io mento”. Un’altra possibilità, più raffinata, sarebbe quella di dire: “Sarò sacrificato al Dio della menzogna”, altra frase indecidibile.
28) E’ un problema che si risolve con una logica negativa. Dovresti prendere un’arancia, quella che hai scelto e chiedere che sia tagliata l’altra: se l’altra ha la polpa rossa (e l’ha senz’altro) allora potrai affermare che la tua ha la polpa bianca senza bisogno di tagliarla e senza smascherare lo stregone. E’ interessante osservare che tu non dimostri direttamente (e non potresti farlo!) che la tua arancia ha la polpa bianca, ma fai, di fatto, una dimostrazione per assurdo (se la mia non fosse bianca, dovrebbe esserlo l’altra; poiché l’altra non è bianca, allora lo è la mia). Non stupisce quindi che qualcuno contesti questa soluzione (forse non convince neppure te) poiché, dicono, non hai effettivamente dimostrato che la tua arancia ha la polpa bianca. L’obiezione è la stessa che gli intuizionisti muovono alla logica classica, con il conseguente rifiuto delle dimostrazioni per assurdo. Questo scetticismo dimostra come, in fondo, si sia più intuizionisti di quanto forse non si pensi. In una situazione come quella descritta dal problema c’è solo da augurarsi che la tribù segua una logica rigorosamente classica.
29) Le affermazioni di A e B possono essere entrambe vere, ma non entrambe false (la negazione di A, che si formalizza con la fbf $\exists xD(x)\wedge\neg\forall xD(x)$ sarebbe $\forall x\neg D(x)\vee\forall xD(x)$ cioè ”o tutti i politici sono disonesti o sono tutti onesti”, proposizione che risulta vera se fosse falsa l’affermazione di B); le affermazioni di A e C possono essere entrambe false (nel caso in cui tutti i politici siano onesti), ma non entrambe vere.